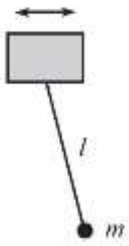
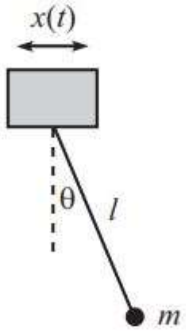
ZADACI ZA VEŽBU NA ČASU:

1. Neka je teg konstantne mase m nerastegljivim kanapom dužine l (zanemarljive mase) pričvršćen za oslonac koji oscilira po x osi po pravilu $x(t) = Acos(wt)$. Odrediti jednačinu kretanja klatna u funkciji od vremena.



Rešenje:



Pretpostavimo da je u trentuku t_0 teg otklonjen od ravnotežnog položaja za ugao θ.
Koordinate tega se mogu opisati sa

$$X(t) = x(t) + l \cdot \sin\theta(t)$$
$$Y(t) = -l \cdot \cos\theta(t)$$

Brzina kretanja klatna se može opisati sa

$$v_m^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 = l^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\cos\theta$$

Lagranževa jednačina $L = K - P = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ koja odgovara posmatranom problemu:

$$L = \frac{1}{2}m\left(l^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\cos\theta\right) + mgl\cos\theta$$

Iz uslova

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ i } \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial \theta}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

se dobija sledeći sistem jednačina:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ml\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$ml^2\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + ml\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\cos\theta + mgl\sin\theta = 0$$

$$\left(\begin{array}{ll}
\frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\sin\theta - mgl\sin\theta \\
\frac{\partial L}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + ml\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\cos\theta, & \frac{\partial L}{\frac{\partial \theta}{\partial t}} = ml^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) + ml\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\cos\theta \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x}{\partial t}}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ml\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial \theta}{\partial t}}\right) = ml^2\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + ml\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\cos\theta - ml\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\sin\theta
\end{array}\right)$$

Rešavanjem sistema

$$l\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\cos\theta = -g\sin\theta$$
$$x(t) = Acos(wt)$$

dobija se da je

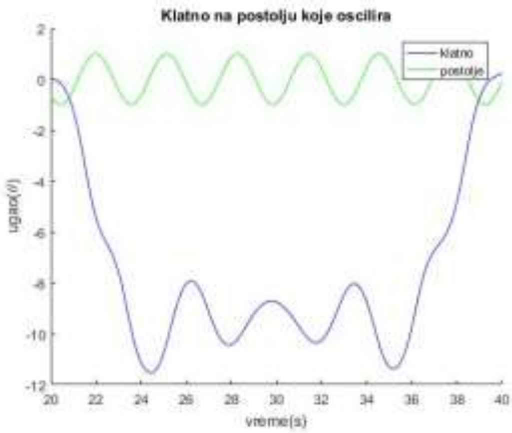
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{A}{l}w^2\cos(wt)\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Zad1.m

```
A = 1;
w = 2;
g = 9.81;
l = 2;
f = @(t,theta) [theta(2);…
A/l*w^2*cos(w*t)*cos(theta(1))+g/l*sin(theta(1))];

[t x] = ode45(f,[20 40], [0, 0]);

clf;
hold on
plot(t, x(:,1),'b');
plot(t, A*cos(w*t),'g');
legend('klatno','postolje');
xlabel('vreme(s)');
ylabel('ugao(\theta)');
title('Klatno na postolju koje oscilira');
hold off
```



Za manje vrednosti ugla θ ($\theta \ll 15^0, \sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$) jednačina dobija oblik

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + w_0^2\theta = aw^2\cos(wt)\,, w_0 = \sqrt{g/l}, a = \frac{A}{l}$$

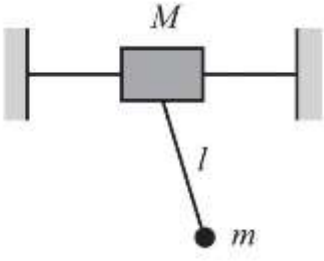
čije je rešenje

$$\theta(t) = \frac{aw^2}{w_0^2 - w^2}\cos(wt) + Ccos(w_0 t + \phi),$$

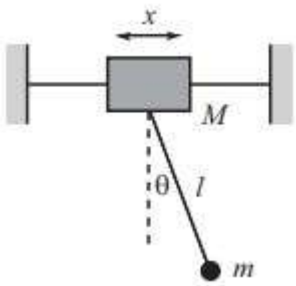
gde se ϕ i C dobijaju iz početnih uslova.

Dobijena jednačina ne odgovara situacijama kada je $w = w_0$ zato što trpi samo male oscilacije.

2. Teg mase M može slobodno da klizi duž šipke. Klatno mase m koje visi na kanapu dužine l zakačeno je za teg. Opisati kretanje klatna jednačinama koje zavise od vremena.



Rešenje



Neka su kretanja tega M može opisati sa $x(t)$ i $y(t)$. Budući da je teg M fiksiran za šipku na nekoj visini, može se staviti da je $y(t) = const$.
Koordinate tega klatna ćemo označiti sa $(x + l\sin\theta\,, -l\cos\theta)$.
Na osnovu jednačine za brzinu klatna dobija se da je

$$v_m^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + l^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + 2l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\cos\theta$$

Lagranževa jednačina je stoga

$$L = \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + l^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + 2l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)\cos\theta\right) + mgl\cos\theta$$

Jednačina kretanja treba da zadovoljava sistem

$$(m+M)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ml\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\cos\theta - ml\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\theta + l\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + g\sin\theta = 0.$$

U slučajevima da je ugao θ mali, možemo se poslužiti aproksimacijama ($\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$):

$$(m+M)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ml\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + l\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + g\theta = 0.$$

Prva jednačine predstavlja jednačinu očuvanja momenta sile. Njenim integraljenjem dva puta dobija se

$$x(t) = -\left(\frac{ml}{M+m}\right)\theta + At + B$$

Druga jednačina predstavlja jednačinu $F = ma$ tangencijalne sile.
Eliminisanjem $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ iz jednačine dobija se da je

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{g}{l}\theta = 0$$

čije je rešenje

$$\theta(t) = C\cos(wt + \phi)\,, w = \sqrt{1 + \frac{m}{M}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Konačno, kretanje klatna se može opisati jednačinama

$$\theta(t) = C\cos(wt + \phi)$$

$$x(t) = -\left(\frac{Cml}{M+m}\right)\cos(wt + \phi) + At + B.$$

Konstanta B se može zanemariti.
Ako je $A = 0$ sledi da je $x(t) = -\frac{\theta(t)ml}{M+m}$, što znači da klatno i teg osciliraju uvek u suprotnim pravcima.
Ako je $C = 0$ dobija se da je $\theta(t) = 0$ i da je $x(t) = At$, označavajući slučaj u kome se klatno i teg kreću horizontalno istom brzinom. Frekvencija oscilacija je jednaka nuli.

3. Opisati kretanje klatna koje je zakačeno za plafon kamiona ukoliko se kamion kreće brzinom v.

Rešenje:
Slično kao i kod 2. zadatka, označimo koordinate tega sa $X(t)$ i $Y(t)$, a kretanje kamiona sa $x(t)$.
Budući da pomeranje kamiona dodatno utiče na kretanje klatna, dobija se da je:

$$X(t) = x(t) + l \sin\theta(t)$$
$$Y(t) = -l\cos\theta(t).$$

Kinetička energija koja deluje na teg klatna je

$$K = \frac{1}{2} m_{klatna} v_{klatna}^2 + \frac{1}{2} m_{kamiona} v_{kamiona}^2 = \frac{1}{2} m_{kamiona} \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} m_{klatna} \left(\left(\frac{\partial X(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y(t)}{\partial t}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + 2l \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)\cos\theta + l^2 \left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)^2\right)$$

Potencijalna energija koja deluje na klatno je

$$P = P_k + m_{klatna} g h \qquad \left(P_{kamion} = \frac{1}{2} k v_{kamion}^2,\ v_{kamion} - \text{brzina kamiona}\right)$$
$$= \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 - mgl\cos\theta$$

Lagranževa jednačina je

$$L\left(x, \theta, \frac{\partial x(t)}{\partial t}, \frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + 2l \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)\cos\theta + l^2 \left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)^2\right) - \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right)^2 + mgl\cos\theta$$

Rešavanjem sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ \text{ i } \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

sledi da se kretanje tega može opisati korišćejem sledeće dve jednačine:

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = ml\left(\left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)^2 \sin\theta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\cos\theta\right)$$
$$l\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\theta = -g\sin\theta$$

Rešavanjem sistema dobija se da je

$$ml\sin\theta\left(-\sin\theta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial \theta(t)}{\partial t}\right)^2 \cos\theta\right) + kx(t)\cos\theta - gm\sin\theta = 0$$

4. Neka su dva tega masa m_1 i m_2 međusobno povezana kanapom zanemarljive težine okačena preko jednog kotura (takođe zanemarljive težine), videti sliku. Odrediti jednačine kretanja tegova.

Rešenje:
Neka je $M_1 > M_2$ i neka je sa $x_1(t)$ označeno vertikalno kretanje tega sa leve strane na dole. Ukoliko se teg sa leve strane spusti za x sledi da će se teg sa desne strane podići za istu visinu $x_2(t) = -x(t)$. Brzina kojom se tegovi pomeraju, može se označiti kao $v_1 = x_1'(t), v_2 = -x_1{}'(t)$ (zato što je rastojanje između tegova konstantno, jednako l).
Dakle, ako je $x_1(t) = x(t)$ onda je $x_2(t) = l - x(t)$.
Odgovarajuća kinetička i potencijalna energija se može izračunati kao

$$K = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2$$

$$P = -M_1gx - M_2g(l-x)$$

$$L = K - P = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + M_1gx + M_2g(l - x(t))$$

Rešavanjem sistema

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, i = 1,2$$

dobija se sistem

$$M_1\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + M_2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - (M_1 - M_2)g = 0$$

$$(M_1 + M_2)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - (M_1 - M_2)g = 0$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g$$

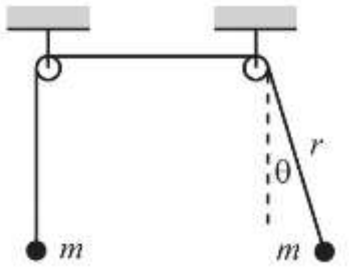
Sa obzirom da drugi izvod predstavlja ubrzanje, sledi da je ubrzanje kojim se teži teg kreće na dole a lakši na gore je

$$a = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g$$

5. Neka je u prethodnom zadatku umesto tega mase M_2 na drugi kraj nerastegljivog kanapa zakačen kotur preko koga vise dva tega masa M_2 i M_3

Rešenje: (za domaći).

6. Neka su dva tega mase m, medjusobno povezana kanapom zanemarljive težine, okačena preko dva kotura (takođe zanemarljivih težina), videti sliku. Ako se teg sa leve pomeri vertikalno odrediti pravilo po kome teg sa desne strane osciluje. Ukoliko je teg sa leve strane počne da osciluje sa apmlitudom ϵ, odrediti jednačine kretanja tega sa leve strane?



Rešenje:

Slično kao i kod prethodnih zadataka, za opisani problem se može formirati Lagranževa jednačina:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2\right) - mgr + mgr\cos\theta$$

Jednačine koje odgovaraju promeni dužine r i ugla θ su

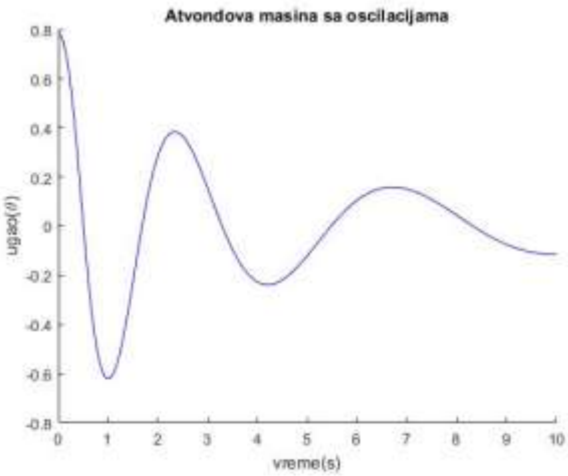
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta & \dfrac{\partial L}{\partial r} = mr\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 - mg + mg\cos\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial t}} = mr^2\dfrac{\partial \theta}{\partial t} & \dfrac{\partial L}{\partial \frac{\partial r}{\partial t}} = 2m\dfrac{\partial r}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial t}}\right) = mr^2\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2mr\dfrac{\partial \theta}{\partial t}\dfrac{\partial r}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \frac{\partial r}{\partial t}}\right) = 2m\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \theta}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\right) \quad mr^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + 2mr\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t} + mgr\sin\theta = 0 \qquad /: mr \;\Rightarrow\; r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + 2\frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t} + g\sin\theta = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial r}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0\right) \quad 2m\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - mr\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + mg - mg\cos\theta = 0 \quad /: m \;\Rightarrow\; 2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - r\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + g(1-\cos\theta) = 0$$

Problem možem rešiti numerički, korišenjem Matlab programa:

```
% z(1) - r(t)          z_1'(t) = z(2)
% z(2) - ∂r/∂t         z_1''(t) − izraz iz druge jednačine
% z(3) - θ(t)          z_2'(t) = z(4)
% z(4) - ∂θ(t)/∂t      z_2''(t) = izraz iz prve jednačine
g = 9.81;
l = 1;
f = @(t,z) [z(2);
            1/2*(z(1).*(z(4)).^2-g*(1-
      cos(z(3)) ));
            z(4);
            (-2*z(2).*z(4)-
      g*sin(z(3)))./z(1)];
[t x] = ode45(f,[0 10], [1, 0, pi/4 ,0])
clf;
hold on
plot(t, x(:,3),'b');
xlabel('vreme(s)');
ylabel('ugao(\theta)');
title('Atvondova masina sa oscilacijama');
hold off
```



Ili eksplicitno. Kako je

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = r^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + 2r\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = -g\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{g}{r^2}\cos\theta$$

dok je na osnovu druge jednačine

$$2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 - g(1-\cos\theta)$$

Zamenom u drugu jednačinu dobija se da je

$$2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r\left(\frac{g}{r^2}\cos\theta\right)^2 - g(1-\cos\theta) = \frac{g^2}{r}\cos^2\theta - g(1-\cos\theta)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{g^2}{r}\cos^2\theta - g(1-\cos\theta)\right).$$

- Za manje uglove ($\theta \ll 15^0$) se mogu koristiti aproksimacije $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, pa se uz uslov $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$ sistem se svodi na:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{g^2}{2r}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{r}\theta = 0$$

  Dobijene jednačine označavaju situaciju da se teg sa desne strane ponaša kao klatno.

- Međutim, ako koristimo preciznije aproksimacije: $1-\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$ uz početni uslov $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$ se dobija da je

$$2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}g\theta^2$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{g}{r}\theta = 0$$

  Uzimajući da se desni teg ponaša kao klatno koje oscilira sa apmplitudom ϵ, sledi da je

$$\theta(t) = \epsilon\cos(wt+\phi)\,, w = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

  Zamenom vrednosti u prvu jednačinu dobija se da je

$$2\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \epsilon^2 g\left(\sin^2(wt+\phi) - \frac{1}{2}\cos^2(wt+\phi)\right).$$

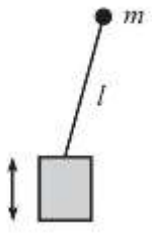
- Ako uzmemo da je $\theta_0 = 0$ i da je $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ u početku, posmatrani problem se svodi na prethodni zadatak, tj. dobija se da je

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0.$$

  što odgovara prethodnom problemu.

Obrnuto klatno

7. Neka se na jednom kraju štapa dužine l (masa štapa je zanemarljiva) nalazi klatno mase m i neka drugi kraj štapa oscilira vertikalno tako da važi $y(t) = Acos(wt)$, gde je $A \ll l$ (videti sliku). Pokazati da za dovoljno veliko w klatno neće pasti, odnosno da će lagano oscilirati levo desno oko vertikalne pozicije. Odrediti jednačine kretanja klatna.

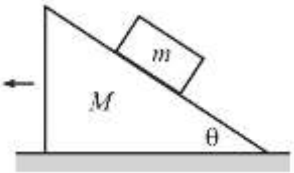


(Za domaći)

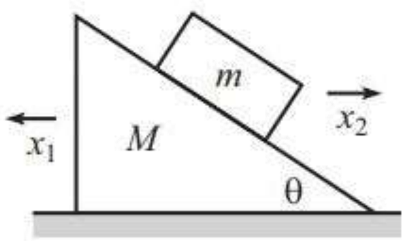
8. Pretpostavimo da se na jednom kraju štapa koji stoji vertikalno ukoliko na njega ne deluje ni jedna sila nalazi teg. Pretpostavimo sada da se taj štap nalazi unutar prikolice koja se može pomerati horizontalno napred ili nazad . Odrediti jednačine kretanje tega tokom kretanja prikolice.

(Za domaći)

9. Neka je na postolje mase M, čija gornja površina formira ugao θ sa horizontalnom površi, u trenutku $t_0 = 0$ spušten teg mase m (videti sliku). Odrediti ubrzanje postolja izazvano spuštanjem tega, ako na teg deluje samo sila zemljine teže. Odrediti ugao θ sa kojim bi posmatrano postolje dobilo najveće ubrzanje.



Rešenje:



- Neka se kretanje jedne tačke postolja može opisati sa $x_1(t)$ i $y_1(t)$, a kretanje jedne tačke tega sa $x_2(t)$ i $y_2(t)$ (kretanje postolja u levo predstavlja pozitivne vrednosti za $x_1(t)$, a kretanje tega u desno pozitivne vrednosti za $x_2(t)$).
- Sa obzirom da se postolje pomera samo po horizontalnoj osnovi može se uzeti da je $y_1(t) = const$ (na primer $y_1(t) = 0$).
- U svakom trenutku t horizontalno rastojanje između posmatranih tačaka je $x_1(t) + x_2(t)$, a vertikalno $y_2(t) = \big(x_1(t) + x_2(t)\big)tg(\theta)$.

Lagranžova funkcija je sledećeg oblika:

$$L = K - P$$

$$K = \frac{1}{2}mv_{teg}^2 + \frac{1}{2}Mv_{postolje}^2$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 (tg\ \theta)^2\right)$$

$$P = -Mgy_1(t) - mgy_2(t)$$

$$= -mg(x_1(t) + x_2(t))tg\ \theta$$

$$L = \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 (tg\ \theta)^2\right) + mg(x_1(t) + x_2(t))tg\ \theta$$

Iz uslova

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x_i}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ \ i = 1,2$$

dobija se sledeći sistem jednačina:

$$M\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + m\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\right)(tg\ \theta)^2 - mg(tg\ \theta) = 0$$

$$m\,\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + m\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\right)(tg\ \theta)^2 - mg(\ tg\ \theta) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial L}{\partial x_1} = mgtg\,\theta & \frac{\partial L}{\partial x_2} = mgtg\,\theta \\ \frac{\partial L}{\frac{\partial x_1}{\partial t}} = M\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) + m\left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)(tg\,\theta)^2 & , \quad \frac{\partial L}{\frac{\partial x_2}{\partial t}} = m\left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\right)(tg\,\theta)^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x_1}{\partial t}}\right) = M\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + m\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\right)(tg\,\theta)^2 & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial x_2}{\partial t}}\right) = m\left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\right) + m\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\right)(tg\,\theta)^2 \end{array}\right)$$

Oduzimanjem jednačina dobija se direktna veza između funkcija x_1 i x_2:

$$M\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - m\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\partial}{\partial t}\left(M\frac{\partial x_1}{\partial t} - m\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = 0.$$

Zamenom u dobijeni sistem sledi da je:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\,(\sin\theta)^2}.$$

Za fiksirane težine postolja i tega, postolje dostiže maksimalno ubrzanje u slučajevima kada je ugao $\theta = \theta_0$, gde je

$$tg\,\theta_0 = \sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

U zavisnosti od međusobnog odnosa težina između postolja i tega razlikujemo sledeće slučajeve:

- Za $M \ll m$, i $m \gg 1$ se dobija da je $\theta_0 \approx 0$, tj. ${x_1}'' \approx \frac{g}{tg\,\theta}$.
- Za $M \gg m$ dobija se da je $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, pa je ${x_1}'' \approx \frac{g\left(\frac{m}{M}\right)(tg\,\theta)}{1+(tg\,\theta)^2} = g\left(\frac{m}{M}\right)\sin\theta\cos\theta$, tj.

$$a_x = \left(\frac{M}{m}\right){x_1}'' \approx g\sin\theta\cos\theta.$$

Odakle može da se zaključi da je ubrzanje a_x tega duž postolja jednako $\frac{a_x}{\cos\theta} \approx g\sin\theta$ kao što se i moglo očekivati.