Rast populacije

Problem 1:

Neka je sa A označena neka super neuništiva populacija A koja ima neograničen izvor hrane. Ukoliko je poznata promena broja jedinki te superpopulacije poslednjih 100 godina (u procentima), opisati priraštaj te superpopulacije u funkciji vremena t.

Rešenje:

Neka se broj jedinki superpopulacije A može izraziti sa $A(t)$. Priraštaj jedinki se može odrediti na sledeći način:

$$A(t+\Delta t) = A(t) + nA(t) - mA(t)\ , \qquad (1)$$

gde je procenat nataliteta označen sa n a procenat mortaliteta sa m.

Promena broja jedinki za period Δt se može odrediti na sledeći način:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = p \cdot A(t), \qquad (2)$$

gde je sa $p = n - m$ označen procenat rasta.

Rešavanjem diferencijalne jednačine $\frac{\partial A}{\partial t}(t) = p \cdot A(t)$ broj jedinki superpopulacije A u trenutku t se može izraziti sa $A(t) = ce^{pt}$.

Ako pretpostavimo da je u trenutku $t = 0$ postojalo $A(0) = A_0$ jedinki ove vrste, tada se iz relacije

$$A(0) = ce^0 = A_0$$

dobija da je $c = A_0$, odnosno da se broj jedinki superpopulacije A može izraziti funkcijom

$$A(t) = A_0\, e^{pt} \qquad (3)$$

(Malthaus-ov model)

Primetimo da vrednost $A(t)$ treba da bude celobrojna, tj. da je opisani problem diskretan. Međutim, prelazeći na kontinualno rešenje, ovakav model nam daje više informacija o broju jedinki u zavisnosti od vremena t. Na primer, ukoliko je prirodni priraštaj posmatrane populacije pozitivan, rešenje formiranog modela eksponencijalno raste sa vremenom. Slično, ako je prirodni priraštaj negativan, videćemo da će broj populacije eksponencijalnom brzinom opadati ka nuli.

Takođe, jasno je da se populacija A ne može razmnožavati u nedogled i da će, ukoliko ih je više od npr. nekog broja A_{max}, doći će do prenaseljenosti, ili će umreti od gladi, s obzirom da neće biti dovoljno hrane da se prehrani čitava populacija.

Dakle, neka je od trenutka t_{max} za koji važi $A(t) = A_{max}$ broj jedinki ove vrste konstantan i jednak A_{max}. Za $t \in [t_{max}, +\infty)$ se priraštaj ove populacije može opisati jednačinom:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = pA(t) - p\frac{A(t)}{A_{max}}A(t) = 0 \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial t}(t_{max}) = pA_{max} - p\frac{A_{max}}{A_{max}}A_{max} = 0\right).$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = p\left(1 - \frac{A(t)}{A_{max}}\right)A(t) \qquad (4)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (4) je

$$A(t) = \frac{A_{max}c_0 e^{pt}}{1 + c_0 e^{pt}}.$$

Vrednost koeficijenta c_0 dobijamo iz početnih uslova

$$A(0) = A_0 \quad \rightarrow \quad A(0) = \frac{A_{max}c_0}{1+c_0} = A_0 \quad \rightarrow \quad c_0 = \frac{A_0}{A_{max} - A_0}.$$

Konačno, broj jedinki superpopulacije A se može opisati funkcijom

$$A(t) = \frac{A_{max}A_0e^{pt}}{A_{max}-A_0+A_0e^{pt}}.$$

Uzimajući da $t \to \infty$ važi sledeće

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_{max}A_0e^{pt}}{A_{max}-A_0+A_0e^{pt}} = A_{max} \qquad (5)$$

(Verhulst-ov model)

Neka je broj jedinki na početku jednak 2, tj. neka je $A_0 = 2$ i neka je rast populacije 2, *p* = 2, tada se na osnovu Malthausovog modela funkcija $A(t)$ može izraziti kao

$$A(t) = 2e^{2t}$$

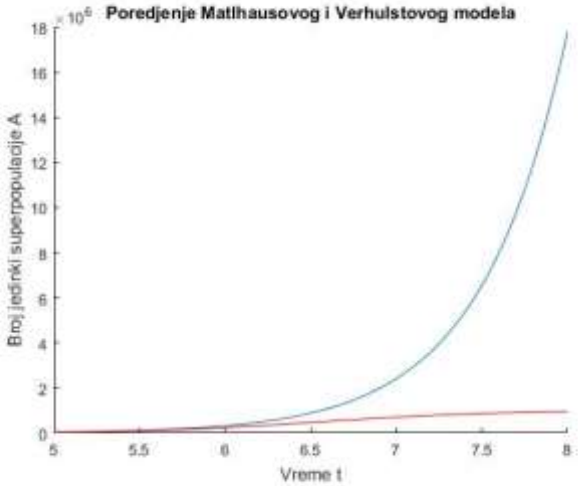
dok se korišćenjem Verhultovog modela, dobija da je

$$A(t) = \frac{2A_{max}e^{2t}}{A_{max} - 2 + 2e^{2t}}$$

Poređenja radi, pretpostavimo da je maksimum jedinki 1 000 000, tj. A_{max} = 1000000:

- na osnovu Matlhausovog modela se za $t = 10$ dobija da je $A(10) \approx 9.7 \cdot 10^8$
- na osnovu Verhulstovog modela se za $t = 10$ dobija da je $A(10) \approx 9.9897 \cdot 10^5$

Radi preglednosti, nacrtaćemo grafike ovih funkcija za $t \in [5,8]$.




```
A_Malthouse = @(t,p,A0) A0.*exp(p.*t);
A_Verhulst = @(t,A0,Amax,p) (Amax.*A0.*exp(p.*t))./(Amax-A0+A0.*exp(p.*t));

t = linspace(5,8);
p = 2;
A0 = 2;
Amax = 1000000;
hold on
plot(t,A_Malthouse(t,p,A0));
plot(t,A_Verhulst(t,A0,Amax,p),'r');
title('Poredjenje Matlhausovog i Verhulstovog modela');
xlabel('Vreme t');
ylabel('Broj jedinki superpopulacije A')
hold off

A_Malthouse(10,2,2)
A_Verhulst(10,2,1000000,2)
```

Problem se može rešiti korišćenjem Matlab funkcije ode45 (ime funkcije, inerval integracije, početne vrednosti) za rešavanje diferencijalnih jednačina.

Problem 2:

Svaka populacija ima svog prirodnog (ne)prijatelja.

Pretpostavimo da postoje dve populacije, A i B. Neka su brojevi jedinki tih populacija izraženi funkcijama od vremena t, tj. neka $A(t)$ i $B(t)$ predstavljaju brojeve jedinki populacija A i B (tim redom) u trenutku t. Neka je $A(0) = A_0$ i $B(0) = B_0$.

Označimo maksimalne brojeve jedinki tih populacija sa A_{max} i B_{max}.

Pretpostavimo još da se vrsta B hrani vrstom A, dok vrsta A ima neograničen izvor hrane. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Vrsta A je istrebljena:
   a. U slučaju istrebljivanja vrste A, vrsta B ostaje bez hrane
      - Stopa priraštaja vrste B se može izraziti kao $\frac{\partial B}{\partial t}(t) = -\gamma B(t),\ \gamma > 0$ (integraljenjem jednačine se dobija da je $B(t) = B_0 e^{-\gamma t}$ (što će dovesti do istrebljenja).
2. Vrsta B je istrebljena:
   a. u slučaju istrebljivanja vrste B, vrsta A će ostati bez prirodnog neprijatelja.
      - Stopa priraštaja vrste A se može izraziti kao $\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \alpha A(t), \alpha > 0$ (koeficijent α se naziva koeficijentom automatskog priraštaja (Malthausov model)). Integraljenjem se dobija da je $A(t) = A_0 e^{\alpha t}$ što dovodi do prenaseljenja.
3. Postoje jedinke obe populacije. Priraštaj populacije predatora, odnosno priraštaj populacije plena, usled hranjenja je proporcionalan broju susreta jedinki tih vrsta, tj. priraštaj je $-\beta A(t)B(t)$ za plen, i $\delta A(t)B(t)$ za predatore ($\beta, \delta > 0$).

Dakle, broj jedinki vrste A zavisi od prirodnog priraštaja i delovanja vrste B, tj.

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \alpha A(t) - \beta A(t)B(t),$$

dok se broj jedinki vrste B može zapisati kao

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = -\gamma B(t) + \delta A(t)B(t).$$

(Lotka-Volterra model)

Dobijeni sistem se može korišćenjem Matlab funkcije ode45.

Uzmimo za primer da je $\alpha = 2, \beta = 1.1, \gamma = 1$ i $\delta = 0.9$. Dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = 2A(t) - 1.1A(t)B(t),$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = -B(t) + 0.9A(t)B(t)$$

I neka su $A(0) = 2, B(0) = 1$ (broj jedinki populacije B je 2x manji od broja jedinki populacije A)

```
function dy = lotka_voltera1(t,y)
alpha = 2;
beta = 1.1;
gamma = 1;
delta = 0.9;
dy = [alpha*y(1) - beta.*y(1).*y(2); -gamma.*y(2) + delta.*y(1).*y(2)];
end
```

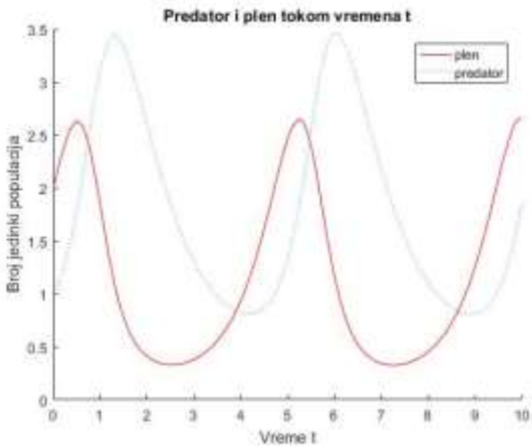
predator_plen.m

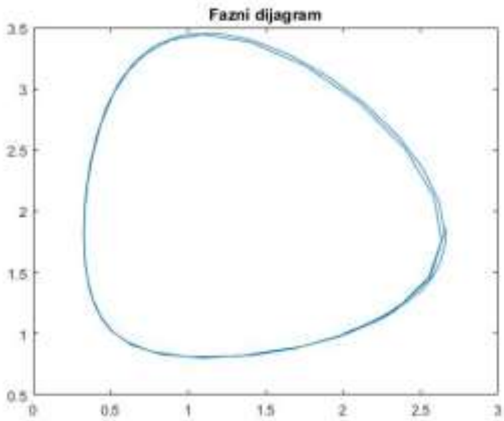
```
clc;
y0 = [2;1]

[t y] = ode45(@lotka_voltera1, [0,10], y0);

figure(1)
hold on
plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),':');
xlabel('Vreme t');
ylabel('Broj jedinki populacija');
title('Predator i plen tokom vremena t');
legend('plen','predator');

figure(2)
plot(y(:,1),y(:,2));
title('Fazni dijagram');
```





Lotka i Voltera su razvili formulu za problem predatora i plena u slučaju kada postoji n različitih vrsta. Razvijeni model je u slučaju kada je $n = 2$ sledećeg oblika

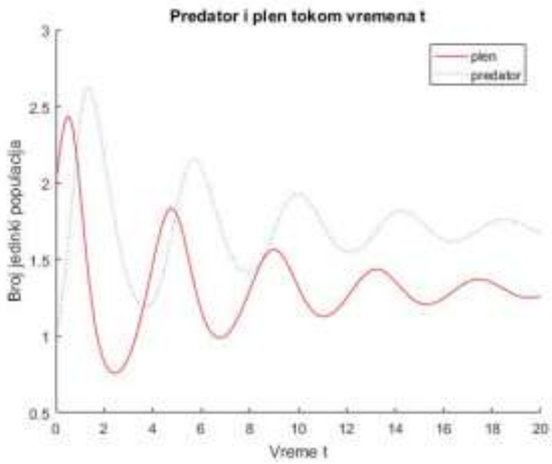
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \alpha A(t) - \lambda A(t)^2 - \beta A(t)B(t),$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = -\gamma B(t) - kB(t)^2 + \delta A(t)B(t).$$

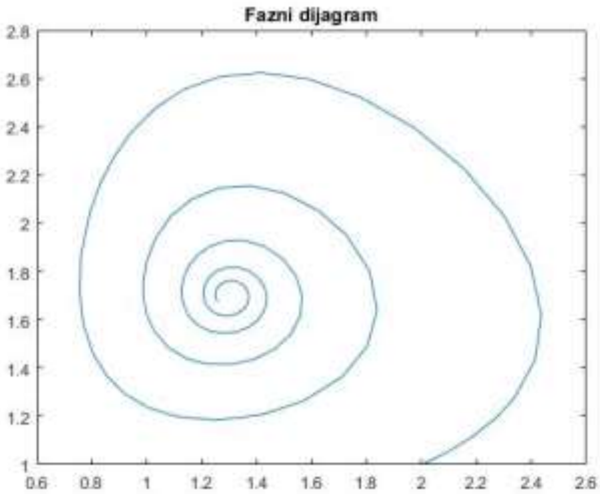
gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, k > 0$.

Opisanim jednačinama fluktuacije funkcija A i B teže ka ravnotežnom stanju tokom vremena.

Neka je u prethodnom zadatku, pored navedenih promenljivih $\lambda = 0.1, k = 0.1, A(0) = 2, B(0) = 1$. Dobija se sledeći grafik:

```
function dy = lotka_voltera1(t,y)
alpha = 2;
beta = 1.1;
gamma = 1;
delta = 0.9;
l = 0.1;
k = 0.1;
dy = [alpha*y(1)-l.*y(1).*y(1)-beta.*y(1).*y(2); -gamma.*y(2)-
k.*y(2).*y(2)+delta.*y(1).*y(2)];
end
```





Neka je sada maksimalni broj jedinki populacija A i B označen sa A_{max} i B_{max}.
Jasno je da je za $A_{max} = A_0$ i $B_{max} = B_0$
važi sledeće $\frac{\partial A}{\partial t}(t) = 0$ i važi $\frac{\partial B}{\partial t}(t) = 0$.
Dakle, za populaciju A važe sledeće pretpostavke:

1. $p_A A(t)$ promena populacije A u slučaju da grabljivci ne postoje.
2. $a \cdot A(t) \cdot B(t)$ umanjenje populacije A usled delovanja populacije B, tj. broj pojedenih jedinki populacije A direktno je proporcionalan proizvodu obe populacije.
3. $p_A\left(A(t) - \frac{A(t)}{A_{max}}\right)$ promena populacije u slučaju da postoje grabljivci i da je maksimalni broj jedinki te populacije A_{max}.

Kombinovanjem 2. i 3. se dobija da je

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = A(t)\left(p_A - \frac{1}{A_{max}} - aB(t)\right)$$

Slično se može izvesti za populaciju B. Neka je

1. $p_B B(t)$ promena populacije B u slučaju neograničenog izvora hrane
2. $b \cdot B(t) \cdot A(t)$ promena populacije B koja direktno zavisi od ulovljenog plena
3. B_{max} maksimalni broj jedinki populacije B usled prenaseljenosti
4. $mB(t)$ stopa smrtnosti usled nedostatka hrane

Kombinovanjem 2. i 3. se dobija da je

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = B(t)(p_B + bA(t) - m)$$

Najzad, iz graničnih uslova:

4. Broj jedinki populacija (A,B) u trenutku $t = 0$ jednak $(A_0\,, B_0) = (1{,}1)$,
5. Broj jedinki populacija A i B najviše je jednak (A_{max}, B_{max}):
   a. $\frac{\partial A}{\partial t}(t) = 0 \;\rightarrow\; A_{max}\left(p_A - \frac{1}{A_{max}} - a\,B_{max}\right) = 0$,
   b. $\frac{\partial B}{\partial t}(t) = 0 \rightarrow\; B_{max}(p_B + bA_{max} - m) = 0$

   Rešavanjem se dobija da je $\frac{p_A}{a} = B_{max} + \frac{1}{A_{max}}$ i da je $\frac{m-p_B}{b} = A_{max}$

Dakle, posmatramo sledeći sistem jednačina:

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = aA(t)(B_{max} - B(t)) = aB_{max}A(t)\left(1 - \frac{B(t)}{B_{max}}\right)$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = bB(t)(A(t) - A_{max}) = -bA_{max}B(t)\left(1 - \frac{A(t)}{A_{max}}\right)$$

(Lotka-Volterra model)

Koji je poznat kao Lotka-Voltera model.

Radi lakšeg računa uvodimo smene

$$x(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}, y(t) = \frac{B(t)}{B_{max}},\;\; \bar{a} = a\frac{B_{max}}{A_{max}},\;\; \bar{b} = b\frac{A_{max}}{B_{max}}$$

Rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \bar{a}x(1-y)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\bar{b}y(1-x)$$

dobija se da je

$$\partial t = \frac{\partial x}{\bar{a}x(1-y)} = -\,\frac{\partial y}{\bar{b}y(1-x)}$$

odnosno

$$\frac{\partial x(1-x)}{\bar{a}x} + \frac{\partial y(1-y)}{\bar{b}y} = 0 \qquad \backslash * \bar{a}\bar{b} \quad \backslash \int$$
$$\bar{b}\big(x(t) - ln\big(x(t)\big)\big) + \bar{a}\big(y(t) - ln\big(y(t)\big)\big) = c$$

Rešenje ove jednačine predstavljaju trajektorije modela Lotke Voltera.

Dakle, jednačina kojom se opisuju trajektorije superpopulacija A i B je sledeća

$$b\frac{A_{max}}{B_{max}}\left(\frac{A(t)}{A_{max}} - ln\left(\frac{A(t)}{A_{max}}\right)\right) + a\frac{B_{max}}{A_{max}}\left(\frac{B(t)}{B_{max}} - ln\left(\frac{B(t)}{B_{max}}\right)\right) = c$$

Iz uslova da je na početku bilo A_0 i B_0 jedinki obe populacije, dobiće se vrednost konstante c:

$$b\frac{A_{max}}{B_{max}}\left(\frac{A_0}{A_{max}} - ln\left(\frac{A_0}{A_{max}}\right)\right) + a\frac{B_{max}}{A_{max}}\left(\frac{B_0}{B_{max}} - ln\left(\frac{B_0}{B_{max}}\right)\right) = c$$

Dakle, dobija se da je

$$bA_{max}^2\left(\frac{A(t) - A_0}{A_{max}} - ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)\right) + aB_{max}^2\left(\frac{B(t) - B_0}{B_{max}} - ln\left(\frac{B(t)}{B_0}\right)\right) = 0$$

Ugrađena funkcija je *lotka.m*

Zadatak za vežbu

Rešiti problem ako je na početku populacije A bilo npr. 30 dok je populacije B bilo 8. Uzeti da je $B_{max} = 30$, $a = 0.1$, $A_{max} = 36$, $b = \ 0.05$

Nacrtati grafike zavisnosti funkcija A i B.

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = aA(t)(B_{max} - B(t)) = aB_{max}A(t)\left(1 - \frac{B(t)}{B_{max}}\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}(t) = bB(t)(A(t) - A_{max}) = -bA_{max}B(t)\left(1 - \frac{A(t)}{A_{max}}\right)$$

Rešenje

```
function dy = lotka_voltera(t,y)
a = 0.1;
b = 0.05;
Amax = 36;
Bmax = 30;
dy = [a*y(1)*Bmax - a.*y(1).*y(2); -b.*Amax.*y(2) + b.*y(1).*y(2)];
end
```

predator_plen.m

```
[t y] = ode45(@lotka_voltera1, [0,10], y0);

figure(1)
hold on
plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),':');
xlabel('Vreme t');
ylabel('Broj jedinki populacija');
title('Predator i plen tokom vremena t');
legend('plen','predator');

figure(2)
plot(y(:,1),y(:,2));
title('Fazni dijagram');
```

Za vežbu

Nacrtati sistem jednačina

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2x - 0.1x^2 - 1.1xy$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y - 0.1y^2 + 0.9xy$$

Uzeti da su $x(0) = 1, y(0) = 0.5$ i da je $t \in [0,20]$. Diskutovati rešenje.

```
figure(3)
r = 1.5;
s = 0.5;
u = 0.7;
v = 1.6;
a = 1;
K = 3;
h = 0.01;
P = 0.7;
Q = 3;
y1 = [P Q];
for t = 1:10000
    dP = (r*(1-P/K) - (s*Q)/(a+P) )*P*h;
    dQ = (-u + (v*P)/(a+P) )*Q*h;
    P = P+dP;
    Q = Q+dQ;
    y1 = [y1; P Q];
end
P = 2;
Q = 6;
y2 = [P Q];
for t = 1:10000
    dP = (r*(1-P/K)-(s*Q)/(a+P))*P*h;
    dQ = (-u+(v*P)/(a+P))*Q*h;
    P = P+dP;
    Q = Q+dQ;
    y2 = [y2; P Q];
end
plot(y1(:,1),y1(:,2),y2(:,1),y2(:,2));
title('Predator i plen');
xlabel('Broj jedinki plena');
ylabel('Broj jedinki predatora');
```

Problem 3:

Pretpostavimo da postoji neka bakterija koja se hrani samo šećerom. Ukoliko ostane bez šećera, bakterija umire. Bakterija prilikom razmnožavanja, takođe koristi šećer. Proceniti koliko je šećera potrebno da bi bakterija mogla da se razmnožava a da ne ostane bez hrane.

Rešenje:

Pretpostavimo da je S_{max} gornja granica količine šećera.

$S(t)$– količina šećera u trenutku t.

$B(t)$ – broj bakterija u trenutku t.

A – količina šećera koju bakterija pojede u proseku.

$$S(t) = S_{max} - AB(t), \quad \mathrm{A}, S_{max} > 0, \quad A, S_{max} = const$$

Ukoliko nema šećera, bakterije se dalje neće razmnožavati niti preživeti. Broj beba bakterija je npr. proporcionalan broju roditelja (ako ih ima):

$B'(t) = \beta B(t) S(t), \;\; \beta = const$ (neki parameter, npr ½ ako su za razmnožavanje potrebne 2 bakterije)

$$\begin{aligned} B'(t) &= \beta B(t)\big(S_{max} - AB(t)\big) = \\ &= \beta B(t) S_{max} - \beta A B(t)^2 = \\ &= kB(t)\big(\alpha - B(t)\big), \qquad k = \frac{S_{max}}{A}, \alpha = \beta S_{max} \end{aligned}$$

Rešiti problem za

k = 0.5

$\alpha = 1.5$

$B(0) = 0.01$; 1 ; 2.5 i slično