MATEMATIČKI FAKULTET

VEŽBE IZ METODA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA

MARIJA IVANOVIĆ

2019.

Gradijentne metode

Zadatak 1

Metodom najstrmijeg spusta rešiti sledeći problem

$$\min f(X)\,,\quad f(X) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 12x_1 - 8x_2,\quad X = [x_1, x_2]^T \in R^2$$

Rešenje:

Odredimo iterativni niz $\{X^{(n)}\}$ za minimizaciju funkcije $f(X)$ metodom najstrmijeg spusta korišćenjem sledećeg algoritma:

- Prvo se odredi gradijent funkcije

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + 12 \\ -2x_1 + 2x_2 - 8 \end{pmatrix}$$

- Postavi korak k na početnu vrednost, $k = 0$, i bira početna tačka iteracije. Neka je, na primer, $X^{(0)} = [0{,}0]^T$.
- Zatim se računaju vrednosti funkcije f i gradijenta u toj tački

$$f\left(X^{(0)}\right) = 0,\ \ \nabla f\left(X^{(0)}\right) = [12, -8]^T$$

- Naredna tačka iterativnog niza određuje se po foprmuli

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f\left(X^{(0)}\right)$$

gde je $\alpha_0 \geq 0$ rešenje problema

$$\min_{\alpha \geq 0} g_0(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(X^{(0)} - \alpha \nabla f\left(X^{(0)}\right)\right) \ = \min_{\alpha \geq 0} f(-12\alpha, 8\alpha)$$
$$= \min_{\alpha \geq 0}(288\alpha^2 + 64\alpha^2 + 192\alpha^2 - 144\alpha - 64\alpha + 544\alpha^2 - 208\alpha)$$
$$= \min_{\alpha \geq 0}(544\alpha^2 - 208\alpha)$$
$$g(\alpha) = 544\alpha^2 - 208\,\alpha$$
$$g'(\alpha) = 1088\alpha - 208 = 0 \ \rightarrow \qquad \alpha = \frac{208}{1088} = \frac{13}{68}$$

pa je

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \frac{13}{68}\nabla f\left(X^{(0)}\right) = \left[-\frac{39}{17}, \frac{26}{17}\right]^T = [-2.29, 1.83]^T$$

- Nakon što je dobijena vrednost naredne tačke iterativnog niza, vrednost parametra k se uvećava za 1 a iterativni postupak ponavlja,

$k = 1$.

-

Zadatak 1

Posmatrajmo problem minimizacije kvadratne funkcije $f\colon R^2 \rightarrow R$ oblika $f(X) = \frac{1}{2}X^TQX - b^TX$ gde je Q realna, simetrična, pozitivno definitna matrica reda 2 i $b \in R^2$ vektor. Napisati eksplicitnu formulu za konstrukciju iterativnog niza $\left\{\mathrm{X}^{(\mathrm{k})}\right\}$. Da li je moguće uraditi isto za slučaj $n = 3$?

Rešenje:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x$$
$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)$$
$$f(x^{k+1}) = f(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k))$$
$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2) + q_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 - b_1 \\ q_{12}x_1 + q_{22}x_2 - b_2 \end{pmatrix}$$
$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1 \\ -q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left(q_{11}\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right)^2 + q_{22}\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right)^2\right) \\ & + q_{12}\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right)\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right) \\ & - b_1\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right) - b_2\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

tražimo minimum funkcije $g(\alpha)$ tako što računamo izvod funkcije po α:

$$g'(\alpha) = 0$$

Odavde dobijamo da je

$$\begin{aligned} g(\alpha_k) = {} & \frac{1}{2}q_{11} \, x_1^{(k)^2} - \alpha_k q_{11}^2 x_1^{(k)^2} + \frac{1}{2}\alpha_k^2 q_{11}^3 x_1^{(k)^2} + \frac{1}{2}q_{11}q_{12}^2 x_2^{(k)^2} + \frac{1}{2}q_{11}\alpha_k^2 b_1^2 - q_{11}q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} \\ & + \alpha_k q_{11}^2 q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1 q_{11}x_1^{(k)} - a_k^2 b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} - \alpha_k b_1 q_{11}q_{12}x_2^{(k)} + \\ & + \frac{1}{2}q_{22}x_2^{(k)^2} - \alpha_k q_{22}^2 \, x_2^{(k)^2} + \frac{1}{2}\alpha_k^2 q_{22}^3 x_2^{(k)^2} + \frac{1}{2}q_{22}q_{12}^2 x_1^{(k)^2} + \frac{1}{2}\alpha_k^2 b_2^2 q_{22} - q_{12}q_{22}x_1^{(k)}x_2^{(k)} \\ & + \alpha_k q_{12}q_{22}^2 x_1^{(k)}x_2^{(k)} - \alpha_k b_2 q_{12}q_{22}x_1^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{22}x_2^{(k)} - \alpha_k^2 b\text{-}_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)} \\ & - q_{12}^2 x_1^{(k)^2} - {q_{12}}^2 x_2^{(k)^2} + \alpha_k q_{11}q_{12}^2 x_1^{(k)^2} + \alpha_k q_{12}^2 q_{22}x_2^{(k)^2} + q_{12}^3 x_1^{(k)}x_2^{(k)} - \alpha_k b_1 {q_{12}}^2 x_1^{(k)} - \alpha_k b_2 {q_{12}}^2 x_2^{(k)} + \\ & q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} - \alpha_k q_{11}q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} - \alpha_k q_{12}q_{22}x_1^{(k)}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1 q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{12}x_1^{(k)} + \alpha_k^2 q_{11}q_{12}q_{22}x_1^{(k)}x_2^{(k)} \\ & - \alpha_k^2 b_1 q_{12}q_{22}x_2^{(k)} - \alpha_k^2 b_2 q_{11}q_{12}x_1^{(k)} + {\alpha_k}^2 b_1 b_2 q_{12} - b_1 x_1^{(k)} + \alpha_k b_1 q_{11}x_1^{(k)} + b_1 q_{12}x_2^{(k)} \\ & - \alpha_k b_1^2 + b_2 q_{12}x_1^{(k)} - b_2 x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{22}x_2^{(k)} - \alpha_k b_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(\alpha_k) = {} & -q_{11}^2 x_1^{(k)^2} + \alpha_k \, q_{11}^3 x_1^{(k)^2} + q_{11}\alpha_k \, b_1^2 + q_{11}^2 q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} + b_1 q_{11}x_1^{(k)} - 2\alpha_k \, b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} \\ & - b_1 q_{11}q_{12}x_2^{(k)} + \\ & - q_{22}^2 \, x_2^{(k)^2} + \alpha_k \, q_{22}^3 x_2^{(k)^2} + \alpha_k \, b_2^2 q_{22} + q_{12}q_{22}^2 x_1^{(k)}x_2^{(k)} - b_2 q_{12}q_{22}x_1^{(k)} + b_2 q_{22}x_2^{(k)} - 2\alpha_k b\text{-}_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)} \\ & + q_{11}q_{12}^2 x_1^{(k)^2} + q_{12}^2 q_{22}x_2^{(k)^2} - b_1 {q_{12}}^2 x_1^{(k)} - b_2 {q_{12}}^2 x_2^{(k)} - q_{11}q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} - q_{12}q_{22}x_1^{(k)}x_2^{(k)} + b_1 q_{12}x_2^{(k)} \\ & + b_2 q_{12}x_1^{(k)} + 2\alpha_k \, q_{11}q_{12}q_{22}x_1^{(k)}x_2^{(k)} - 2\alpha_k \, b_1 q_{12}q_{22}x_2^{(k)} - 2\alpha_k \, b_2 q_{11}q_{12}x_1^{(k)} \\ & + 2\alpha_k \quad b_1 b_2 q_{12} + b_1 q_{11}x_1^{(k)} - b_1^2 + b_2 q_{22}x_2^{(k)} - b_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Konačno,

$$\alpha_k = \frac{\left(q_{11}^2 {x_1^{(k)}}^2 + q_{22}^2 \, {x_2^{(k)}}^2\right) - (q_{11}^2 - q_{11} + q_{22}^2 - q_{22}) q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} \ldots}{q_{11}^3 {x_1^{(k)}}^2 + q_{22}^3 {x_2^{(k)}}^2 + q_{11} b_1^2 + q_{22} b_2^2 - 2(b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} + b\text{-}_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)}) + \cdots}$$

$$+ \frac{\ldots - (2b_1 q_{11} - b_2 q_{12} q_{22} - b_1 {q_{12}}^2 + b_2 q_{12})\, x_1^{(k)} - \left(2b_2 q_{22} - b_1 q_{11} q_{12} - b_2 {q_{12}}^2 + b_1 q_{12}\right) x_2^{(k)} + (b_1^2 + b_2^2)}{\ldots + 2q_{12}(b_1 b_2 + q_{11} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - b_2 q_{11} x_1^{(k)} - b_1 q_{22} x_2^{(k)})}$$

Analogno bi se rešavao slučaj za $n = 3$ samo što bi račun bio znatno obimniji.
Međutim, opisani način rešavanja nije previše praktičan. Formula za α_k treba da se izvede korišćenjem matrice Q i vektora f_k. Pogledati knjigu iz Nelinearnog programiranja, strana 45.

$$\alpha_k = \frac{f_k^T f_k}{f_k^T Q f_k}$$

Zadatak 2

Koristeći rezultat zadatka 1, metodom najbržeg spusta minimizovati funkciju $f: R^2 \to R$ definisanu sa

a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

b) $f(x) = \frac{1}{5} x_1^2 + x_2^2$

Rešenje

a) Odredimo matricu Q

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = 0$$

Dobijamo da je $\alpha_k = \frac{4x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)}}{8x_1^{(k)} + 8x_2^{(k)}} = .. = \frac{1}{2}$

Primeniti algoritam metode najbržeg spusta ako se zna da je $\alpha_k = \frac{1}{2}$.

b) Odredimo matricu Q

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = 0$$

Dobijamo da je $\alpha_k = \frac{\frac{4}{25} x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)}}{\frac{8}{125} x_1^{(k)} + 8x_2^{(k)}} = .. = \frac{5}{2} \frac{x_1^{(k)} + 25x_2^{(k)}}{x_1^{(k)} + 125x_2^{(k)}}$

Primeniti algoritam metode najbržeg spusta ako se zna da je $\alpha_k = \frac{5}{2} \frac{x_1^{(k)} + 25x_2^{(k)}}{x_1^{(k)} + 125x_2^{(k)}}$.

Zadatak 3

Metodom najbržeg spusta minimizovati funkciju $f: R^2 \to R$ definisanu sa

$$f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2 - 3x_1$$

Počevši od tačke $X^0 = (2,2)^T$. Koristiti kriterijum zaustavljanja po izboru.

Rešenje:

Odredimo prvo gradijent funkcije:

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 - 3 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Postavimo korak ka na k=0 i primenimo algoritam metode:

$$\nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 21\alpha_0 \\ 2 - 16\alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$f(X^1) = 4(2 - 21\alpha_0)^2 + 2(2 - 16\alpha_0)^2 + 4(2 - 21\alpha_0)(2 - 16\alpha_0) - 3(2 - 21\alpha_0) = ..$$
$$= 3620\alpha_0^2 - 760\alpha_0 + 40$$
$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)\right) = \min_{\alpha \geq 0} 3620\alpha_0^2 - 760\alpha_0 + 40$$

$$g'(\alpha) = 7240\alpha_0 - 760 = 0 \quad \ldots.\alpha_0 = 0.1050$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.1050 \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2050 \\ 0.3200 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 - 3 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.36 \\ 0.46 \end{pmatrix}, \left|\left|\nabla f(X^1)\right|\right| = 3.39 \ldots$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} -0.205 - \alpha 3.36 \\ 0.32 - \alpha 0.46 \end{pmatrix},$$
$$g'(\alpha) = -49249 \frac{\alpha}{625} - \frac{28753}{2500} = 0 \quad \ldots \ \alpha_1 = 0.1460$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0.0937 \\ 0.25286 \end{pmatrix}, \ \nabla f(X^2) = \begin{pmatrix} -1.23896 \\ 1.38624 \end{pmatrix}, \left|\left|\nabla f(X^2)\right|\right| = 1.8592 \ldots$$

... zadatak se može isprogramirati :D

Zadatak 4

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \gamma x_2^2 + \gamma^2 x_3^2) - x_1 - x_2 - x_3$$

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ \gamma x_2 - 1 \\ \gamma^2 x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Problem se rešava isto kao i 3.zadatak.

Napisati novi program (ili proširiti program iz 3.zadaka) i posmatrati rešenja za različite parametre γ.

Zadatak 12

Metodom najbržeg spusta rešiti problem minimizacije:

$f: R^2 \to R$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

a) $X^{(0)} = (2,1)$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} 2x_1^{(k)} \\ 4x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - 2\alpha_k x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} - 4\alpha_k x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(1 - 2\alpha_k) \\ x_2^{(k)}(1 - 4\alpha_k) \end{pmatrix}$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = {x_1^{(k)}}^2 (1 - 2\alpha_k)^2 + 2x_2^{(k)}(1 - 4\alpha_k)^2$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} x_1^{(k)^2}(1-2\alpha)^2 + 2x_2^{(k)}(1-4\alpha)^2 = \cdots$$
$$= \min_{\alpha \geq 0} 4(1-2\alpha)^2 + 2 * 1(1-4\alpha)^2 =$$
$$= \min_{\alpha \geq 0} 6 - 32\alpha + 40\,\alpha^2$$
$$g'(\alpha) = 48\alpha - 24 = 0$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{3}$$
$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ 1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$g(\alpha_1) = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{9}(4(1-2\alpha)^2 + 2 * 1(1-4\alpha)^2) = \cdots \to \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$
$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ -1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g(\alpha_2) = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{81}(4(1-2\alpha)^2 + 2 * 1(1-4\alpha)^2) = \cdots \to \alpha_2 = \frac{1}{3}$$
$$X^{(3)} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ 1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\to X^{(k)} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

b) $\alpha_k = -\frac{1}{3}$
$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^{(k)}}{3} \\ \frac{-x_2^{(k)}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ -x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$
$$f\left(X^{(k+1)}\right) = x_1^{(k)^2}\frac{1}{9} + 2x_2^{(k)}\frac{1}{9} = \frac{1}{9}\left(x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right) = \frac{f\left(X^{(k)}\right)}{9}$$

c) α_k je konstantna za početno $X^{(0)} = (2,1)$

Očekivana brzina konvergencije je
$$\left|f\left(X^{(k)}\right) - f(X^*)\right| = ?$$
$$X^* = \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{3^k}\begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lim_{k\to\infty}\left|f\left(X^{(k)}\right) - f(X^*)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9}f\left(X^{(k-1)}\right) - 0\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9}f\left(X^{(k-1)}\right)\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9^k}f\left(X^{(0)}\right)\right| \lim_{k\to\infty}\frac{1}{9^k}\left|2^2 - 2 * 1^2\right| = 0$$

Red konvergencije:
$$\|x^{k+1} - x^*\| = O(\|x^k - x^*\|^p)$$

$$\|x^{k+1}-x^*\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\(-1)^k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\(-1)^k\end{pmatrix}\right\|$$

$\frac{|x^{(k+1)}|}{|x^{(k)}|^2} =\ldots= 3^{k-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = +\infty$ red divergira!

Zadatak 13

Metodom najbržeg spusta rešiti problem minimizacije:

$f: R^2 \to R$

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$

$X \ = [x_1, x_2]^T$

a) $X^{(0)} = (1,4)^T$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\end{pmatrix} - \alpha_k \nabla f\left(x^{(k)}\right) = \begin{pmatrix}x_1^{(k)} - 8\alpha_k x_1^{(k)}\\x_2^{(k)} - 2\alpha_k x_2^{(k)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{(k)}(1-8\alpha_k)\\x_2^{(k)}(1-2\alpha_k)\end{pmatrix}$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = 4{x_1^{(k)}}^2(1-8\alpha_k)^2 + x_2^{(k)}(1-2\alpha_k)^2$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha\geq 0} {x_1^{(k)}}^2 4(1-8\alpha)^2 + x_2^{(k)}(1-2\alpha)^2 = \cdots$$
$$= \min_{\alpha\geq 0} 4(1-8\alpha)^2 + 16(1-2\alpha)^2 =$$
$$= \min_{\alpha\geq 0} 6 - 32\alpha + 40\,\alpha^2$$

$g'(\alpha) = 640\alpha - 128 = 0$

$$\alpha_0 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix}\left(1-\frac{8}{5}\right)\\4\left(1-\frac{2}{5}\right)\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_1) = \min_{\alpha\geq 0}\frac{1}{25}\left(4(1-8\alpha)^2 * 9 + (1-2\alpha)^2 * 144\right) = \cdots \to \alpha_1 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(2)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\left(1-8\frac{1}{5}\right)\\12\left(1-2\frac{1}{5}\right)\end{pmatrix} = \cdots = \left(\frac{3}{5}\right)^2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_2) = \min_{\alpha\geq 0}\frac{1}{81}\left(4(1-2\alpha)^2 + 2*1(1-4\alpha)^2\right) = \cdots \to \alpha_2 = \frac{1}{3}$$

$\ldots . \to \ \alpha_k = \frac{1}{5} \quad \to \quad X^{(k)} = \left(\frac{3}{5}\right)^k \begin{pmatrix}(-1)^k\\4\end{pmatrix}$

b) $X^* = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k\begin{pmatrix}(-1)^k\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

c) Očekivana brzina konvergencije je

$$\{f\left(X^{(k)}\right) - f(X^*)\} = \cdots = \{f\left(X^{(k)}\right)\}?$$

$$Q = \begin{vmatrix}4 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$\det(Q-\lambda I) = \begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 \ldots \quad \lambda_{min} = 1, \lambda_{max} = 4$$
$$G\left(X^{(k+1)}\right) \leq \frac{4-1}{4} G\left(X^{(k)}\right) = \frac{3}{4} G\left(X^{(k)}\right)$$
$r = 3/4$ radijus konvergencije.

Zadatak 14

Data je funkcija $f: R^2 \to R$ definisana sa
$$f(X) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4x_1x_2 + 5x_1 + 6x_2 + 7, X = [x_1, x_2]^T$$
Neka je niz $\{X^{(k)}\}$ dobijen metodom konstantnog spusta pri minimizaciji funkcije f oblika
$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)})$$
Odrediti najveću vrednost α za koju je metoda globalno konvergentna.

Rešenje

Za proizvoljno izabranu početnu tačku $X^{(0)}$ algoritam generiše niz tačaka koji konvergira ka tački koja zadovoljava NUPR! $\nabla f(X^*) = 0$.
$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Niz $\left\{X^{(k)}\right\}$ konstruisan metodom sa konstantnim α konvergira ka X^* za svako početno $X^{(0)}$ akko
$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max} \quad (Q)}$$
Dakle,
$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(6-\lambda)^2 - 4 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \lambda = 4, \quad \lambda = 8$$
Obzirom da tražimo λ_{max} sledi da je $\lambda = 8$, odnosno $0 < \alpha < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Zadatak 15

Data je funkcija $f: R^2 \to R$ definisana sa
$$f(X) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1+a)x_1x_2 - x_1 - x_2 + b, X = [x_1, x_2]^T$$
gde su a i b parametri.

a) zapisati funkciju f u obliku kvadratne forme.
b) odrediti najveće vrednosti parametra a i b za koje postoji jednistvena tačka globalnog minimuma posmatrane funkcije f.
c) naći tačku globalnog minimuma X^* u funkciji od a i b.

Rešenje

a)

$$f(X) = \frac{1}{2}X^T\begin{bmatrix} 3 & 1+a \\ 1+a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T X + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Analogno prethodnom zadatku, globalni minimum se dobija za

$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1+a \\ 1+a & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - (1+a)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 - a$$

$$\lambda_2 = 4 + a$$

Dakle, za $a \in (-\infty, -1)$ sledi da je $\lambda_{max} = \lambda_1$,

$$0 < \alpha < \frac{2}{2-a} \quad \rightarrow \quad a_{max} = -1$$

za $a \in (-1, +\infty)$ $\lambda_{max} = \lambda_2$

$$0 < \alpha < \frac{2}{4+a}$$

Odnosno, za $a = -1$ segment za α je najveći ($\alpha \in (0, \frac{2}{3})$).

c) za domaći.

Zadatak 16

Data je funkcija $f: R^2 \rightarrow R$ definisana sa

$$f(X) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1+a)x_1x_2 - x_1 - x_2 + b, X = [x_1, x_2]^T$$

gde su a i b parametri.

Neka je niz $\{X^{(k)}\}$ dobijen gradijentnom metodom sa konstantnim korakom $\alpha = 2/5$. Odrediti najveće vrednosti parametara tako da algoritam konvergira ka jedinstvenom globalnom minimumu funkcije f za proizvoljni izbor početne tačke.

Rešenje

$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1+a \\ 1+a & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - (1+a)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 - a$$

$$\lambda_2 = 4 + a$$

Kako je $\alpha = 2/5$ sledi

$$\lambda_{max} = \begin{cases} 4+a & a > 0 \\ 4+a & -1 \leq a \leq 0 \\ 2-a & a < -1 \end{cases} \rightarrow \quad 0 < \alpha < A = \begin{cases} \frac{2}{4+a} & -1 \leq a \\ \frac{2}{2-a} & a < -1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{4+a}, a \geq -1$$

$$4 + a > 5$$

$$a > 1$$
$$\frac{2}{5} < \frac{2}{2-a}, a < -1$$
$$2 - a < 5, a < -1$$
$$a > -3, a < -1 \quad \rightarrow a \in (-3, -1)$$

Zadatak 17

Posmatramo problem minimizacije $f: R \rightarrow R$ definisana sa $f(X) = \frac{1}{2}(X-c)^2$ gde je c realni parametar. Primenimo gradijentnu metodu kojom se konstruiše iterativni niz $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k f'(X^{(k)})$ gde je f' izvod funkcije f, a α_k korak koji zadovoljava uslov $0 < \alpha_k < 1$.

a) Napisati formulu koja povezuje $f\left(X^{(k+a)}\right), f\left(X^{(k)}\right)$ i α_k.
b) dokazati da je algoritam globalno converegentan za porizviljan izbor početnog vektora akko $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$.

Rešenje

a)

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k f'\left(X^{(k)}\right)$$
$$\nabla f(X) = X - c$$
$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k\left(X^{(k)} - c\right)$$
$$= X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c$$
$$f\left(X^{(k+1)}\right) = f\left(X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c\right) = \frac{1}{2}\left(X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c - c\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2\left(X^{(k)} - c\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2 f\left(X^{(k)}\right).$$

b) Koristimo teoremu 3.1 i lemu 3.3.

Njutnova metoda

Neki primeri iz knjige Nelinearno programiranje.

Zadatak 1:

Konstruisati Njutnov iterativni niz za minimizaciju funkcije $f\colon R \to R$,

$$f(x) = x^4 - 1$$
$$X^{(0)} = 4$$

Rešenje:

Iterativni postupak Njutnove metode je sledećeg oblika:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{\nabla f\left(X^{(k)}\right)}{\nabla^2 f(X^{(k)})}$$

Kako za izvode posmatrane funkcije važe sledeće relacije $\nabla f_k = 4X^{(k)^3}, \nabla^2 f_k = 12X^{(k)^2}$ sledi da je iterativni postupak sledećeg oblika:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{1}{3}X^{(k)} = \frac{2}{3}X^{(k)}$$

Polazeći od početne tačke $X^{(0)}$ dobija se sledeći iterativni niz:

$$X^{(0)} = 4, X^{(1)} = \frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}, X^{(2)} = \frac{4}{9}4 = \frac{19}{9}, \ldots, X^{(k)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} X^{(0)}$$

Dokažimo da niz konvergira ka globalnom minimumu

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k 4 = 0 = x^*$$

globalni minimum f-je $f(x) = -1$.

Može da se odredi stopa konvergencije

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\|}{\left\| x^{(k)} - x^* \right\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left\| \left(\frac{2}{3}\right)^{(k+1)} X^{(0)} - 0 \right\|}{\left\| \left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} X^{(0)} - 0 \right\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left\| \left(\frac{2}{3}\right)^{(k+1)} 4 \right\|}{\left\| \left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} 4 \right\|^p} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} 2}{3} 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^{(kp)} 4^p} = \frac{2}{3} \qquad \text{za } p = 1$$

dakle, $\{x_k\}$ konvergira.

Zadatak 2:

Njutnovom metodom minimizovati funkciju $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $f\colon R \to R$.

Da li granična vrednost Njutnovog iterativnog niza predstavlja globalni minimum?

Rešenje:

Globalni minimum funkcije $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ je 0. Pokažimo da niz $\{X^{(k)}\}$ konstruisan Njutnovom metodom konvergira ka tom minimumu:

$$\nabla f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$
$$F(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\nabla f(x_k)}{F(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{\frac{4}{3}\left(x^{(k)}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{9}\left(x^{(k)}\right)^{-\frac{2}{3}}} = x^{(k)} - 3x^{(k)} = -2x^{(k)} = (-2)^k x^{(0)}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty} (-2)^k x^{(0)} \quad -> \quad x* \quad$ je lokalni minimum.

Diskutovaćemo konvergeciju u zavisnosti od izbora početne tačke

$$x^0 = 1 \quad \to \quad x^{(1)} = -2,\quad x^{(2)} = 4,\quad x^{(3)} = 8, \ldots.$$

$$x^0 = \frac{1}{2} \quad \to \quad x^{(1)} = -1,\quad x^{(2)} = 2,\quad x^{(3)} = -4, \ldots.$$

$$x^0 = \frac{1}{4} \quad \to \quad x^{(1)} = -\frac{1}{2},\quad x^{(2)} = 1,\quad x^{(3)} = -2, \ldots.$$

Zadatak 3:

Pokazati da je tačka (1,1) globalni minimum funkcije $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

Rešenje:

Da li je $X(1,1)$ je globalni minimum?

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 200(x_2 - x_1^2)(-2x_1) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{\nabla f\left(X^{(k)}\right)}{\nabla^2 f(X^{(k)})}$$

Umesto da odredimo vrednost koeficijenta $\frac{\nabla f\left(X^{(k)}\right)}{\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)}$ koristićemo smenu d_k pri čemu se ovaj koeficijent dobija kao rešenje sledećeg sistema:

$$F\left(x^{(k)}\right)d_k = -f_k \quad <=>$$

$$\begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix}$$

$$(1200x_1^2 - 400x_2 + 2)d_1 - 400x_1d_2 = -400x_1^3 + 400x_1x_2 - 2x_1 + 2$$
$$-400x_1d_1 + 200d_2 = -200x_1^2 + 200x_2$$

Rešavanjem sistema se dalje dobija da je

$$d_1 = \frac{-2(x_1 - 1)}{40x_1^2 - 400x_2 + 2}$$

$$d_2 = -4\frac{x_1 - 1}{40x_1^2 - 400x_2 + 2}x_1$$

Sada se iterativni niz dobija na sledeći način:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + d_k$$

Sada možemo da konstruišemo Njutnov iterativni niz počevši od tačke $x^{(0)}$

Neka je , na primer $x^{(0)} = (0,0) \to \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \to$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1, d_2 = 0$$

$$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 400 \\ -200 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1202 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1202 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ -200 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 0, d_2 = -1$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1602 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

,

$$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} -800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1602 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -800 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 0, d_2 = 2$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 0, d_2 = 0$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^*$$

Isti problem mogli smo da rešimo korišćenjem gradijentne metode konstantnim korakom:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f\left(x^{(k)}\right)$$

$$\alpha_k = 0.05$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -1.4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -6.4948 \\ 14.22 \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = (0,0)^T$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.05\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.05\begin{pmatrix} -1.4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.1 \end{pmatrix} - 0.05\begin{pmatrix} -6.4948 \\ 14.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 217.811 \\ -171.1456 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \cdots = \begin{pmatrix} -10.395 \\ 7.94667 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Zadatak 4:

Konstruisati Njutnov iterativni niz za minimizaciju funkcije i izračunati prve tri iteracije.

$$f: R^2 \to R, f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$

Rešenje:

$X^{(0)} = (0,1)^T$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 4x_1^3 + 4x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 12x_1 + 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

.... $x^{(1)} = (0,0)^T, x^{(2)} = (0,0), \ldots, x^* = (0,0)$

Zadatak 7:

Konstruisati Njutnov iterativni niz $\{x^{(k)}\}$ za minimizaciju funkije f

$$f: R \to R \quad f(x) = (x - x_0)^4 \qquad x_0 = const \in R$$

$\nabla f(x) = 4(x - x_0)^3$

$\nabla^2 f(x) = 12(x - x_0)^2$

Rešenje:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{4\left(x^{(k)} - x_0\right)}{12(x^{(k)} - x_0)}$$

$$= x^{(k)} - \frac{1}{3}\left(x^{(k)} - x_0\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{(k)} + \frac{1}{3}x_0$$

$$x^{(k+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{(k-1)} + \frac{1}{3}x_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^{(k-1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}x^{(k-2)} + \frac{1}{3}x_0\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 x^{(k-2)} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)x_0 + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0 = \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} x_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)x_0 + \cdots + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0$$

Pokazaćemo da niz konvergira ka x_0:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{(k+1)} x^{(0)} + \frac{1}{3}x^{(0)}\sum_{i=0}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right) = \frac{1}{3}x^{(0)}\sum_{i=0}\hat{}\infty\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}x^{(0)}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = x^{(0)}$$

Metoda konjugovanih pravaca

Zadatak 1

Posmatrajmo funkciju $f: R^2 \to R$ definisanu sa

$$f(X) = \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2, \quad X = [x_1, x_2]^T$$

a) Zapisati funkciju u obliku $f(X) = \frac{1}{2}X^TQX - b^TX$, Q. je simetrična i pozitivno definitna matrica.

b) Konstruisati sistem do dva Q-konjugovana pravca d_0 i d_1.

c) Primeniti metodu konjugovanih pravaca za minimizaciju funkcije f počevši od tačke $X^{(0)} = [0,0]^T$.

d) Uporediti dobijeni rezultat sa rešenjem jednačine $QX = b$

Rešenje:

a) $f(X) = \frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - [b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2) - b_1x_2 - b_2x_2$

Formiramo sistem

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}q_{11} \qquad -b_1 = -3$$
$$2 = q_{12} \qquad -b_2 = -1$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}q_{22}$$

Rešavanjem sistema dobija se da je $Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Dva pravca d_0 i d_1 su Q-konjugovana ukoliko važi sledeće:

$$d_i^TQd_j = 0, \qquad i \neq j$$
$$d_i^TQd_i \neq 0$$

Prvi pravac biramo proizvoljno, na primer:

$$d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pravac $d_1 = [d_{11} \quad d_{12}]^T$ mora da ispunjava navedene uslove, dakle:

$$[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} = [5 \quad 2]\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} = 0$$
$$5d_{11} + 2d_{12} = 0$$
$$[d_{11} \quad d_{12}]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} = [5d_{11} + 2d_{12} \quad 2d_{11} + d_{12}]\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} \neq 0$$
$$5d_{11}^2 + 4d_{11}d_{12} + d_{12}^2 \neq 0$$

Neka je iz prve jednačine $d_{12} = -\frac{5}{2}d_{11}$

Zamenom u drugu jednačinu dobija se da je $d_{11} \neq 0$ i da se može izabrati proizvoljno.

Na primer, ako se uzme da je $d_{11} = 2$, sledi da je $d_{12} = -5$, tj. $d_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

c) Metodom Q-konjugovanih pravaca za minimizaciju kvadratne funkcije f konstruiše se iterativni niz $\{X^{(k)}\}$ koristeći skup Q-konjugovanih pravaca. Sa obzirom da je skup dva Q-konjugovana pravca za minimizaciju zadate funkcije poznat, počevši od početne tačke $X^{(0)}$, iterativni niz se formira na sledeći način:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k$$
$$\alpha_k = -\frac{f_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

Da bi odredili parameter α_k potrebno je da se odrede vrednosti prvog izvoda funkcije, dakle

$$f_k = f'\left(X^{(k)}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 + 2x_2 - 3 \\ 2x_1 + x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$f_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\alpha_0 = -\frac{\begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = -\frac{-3}{\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{3}{5}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponavljanjem postupka za $X^{(2)}$ dobiće se sledeće vrednosti:

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \alpha_1 = \frac{1}{5} \qquad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Iterativni niz konstruisan metodom Q-konjugovanih pravaca $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ i proizvoljnom tačkom $X^{(0)}$ konvergira ka jedinstvenoj tački minimuma u n koraka.

Pozivajući se na navedenu teoremu, tačka $X^{(2)}$ je ujedno i tačka minimuma, tj. $X^* = X^{(2)}$.

d) Rešenje sistema $QX = b$ je

$$5x_1 + 2x_2 = 3$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 = 1, x_2 = -1 \qquad => \qquad X^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2

Metodama Q-konjugovanih gradijenata i konjugovanih pravaca odrediti minimum funkcije $f(X) = \frac{1}{2}X^TQX + X^Tb$, $X = [x_1, x_2, x_3]^T$ definisane sa

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Uzeti da je $X^{(0)} = [1,1,1]^T$, $d_0 = -\nabla f(X^{(0)})$, $d_1 = [a, b, 0]^T$, $a, b, \in Z$.

Rešenje

Metoda Q-konjugovanih gradijenata:

Odredimo prva tri Q-konjugovana gradijenta:

$$\nabla f(X) = Q^TX + b^T$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Iz uslova $d_0 = -\nabla f(X^{(0)})$ dobija se da je $d_0 = -[5 \quad 5 \quad 5]^T$.

Uzimajući da je $d_1 = [a, b, 0]^T$ i iz uslova Q-konjugovanosti ($d_1^TQd_0 = 0$) dobija se da je $4a + 5b + 6c = 0$.

Neka su $c = 0$ i $b = -4$ dobija se da je $d_1 = [5, -4, 0]^T$.

Dalje se za $d_2 = [a, b, c]^T$ iz uslova $d_2^TQd_0 = 0$ i $d_2^TQd_1 = 0$ dobija da je $d_2 = \left[-11,49, -\frac{407}{12}\right]^T$.

Sada, koristeći metodu Q-konjugovanih gradijenata možemo da odredimo minimum funkcije u tri koraka:

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k d_k$$

$$\alpha_k = -\frac{f_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

Sa obzirom da je $d_0 = -\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \nabla f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

Dobija se da je $\alpha_1 = \frac{1}{5}$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalje se dobija da je $d_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla f(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

RAČUNATI NA ČASU NAREDNE TAČKE !!!!

Metoda konjugovanih pravaca:

$$k = 0$$

$\nabla f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ukoliko je $\nabla f(X^{(0)}) = 0$ proces se prekida (što nije slučaj kod našeg zadatka)

$$d_0 = -\nabla f(X^{(0)})$$

Računamo $\alpha_1 = -\frac{f_0^T d_0}{d_0^T Q d_0} = \frac{1}{5}$

Određujemo narednu tačku iterativnog niza:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Određujemo vektor d_1 kao linearnu kombinaciju vektora f_1 i d_0

$$d_1 = -f_1 + \beta_0 d_0$$

$$\beta_0 = \frac{f_1^T Q d_0}{d_0^T Q d_0}$$

Odredimo vrednost vektora $f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dobija se da je $\beta_0 = \frac{2}{75}$, tj. Da je $d_1 = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2}{75} * (-5) \\ 0 + \frac{2}{75} * (-5) \\ -1 + \frac{2}{75} * (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{27}{25} \\ -\frac{2}{25} \\ -\frac{27}{25} \end{bmatrix}$

Računamo $\alpha_2 = -\frac{f_1^T d_1}{d_1^T Q d_1} = 0$

Dakle sve naredne tačke iterativnog niza su oblika

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3

Posmatrajmo funkciju $f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X - b^T X$ gde je Q realna, simetrična i pozitivno definitna metrica reda n i $b \in R^n$ dati vector. Neka je $\{d_0, d_1, \dots\} \in R^n$ zadati skup vektora I $X^{(0)}$ zadata tačka. Definišimo iterativni algoritam na sledeći način:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k, \quad k = 0,1,2, \dots.$$

Gde je $\alpha_k \in R$ veliČina koraka u pravcu vektora d_k. Pretpostavimo da važi

$$f_{k+1}^T d_k = 0$$

za svako k=0,1,...,n-1 i svako i=0,1,2,...,k, gde je $f_{k+1} = \nabla f\left(X^{(k)}\right)$.

Ukoliko je $f_k^T d_k = 0$ za $k = 0,1, \dots, n-1$ tada su vektori $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ Q-konjugovani. Dokazati.

Rešenje:

Videti teoriju.

Zadatak 4

a) Matrica Q je realna simetrična, reda n. Koristimo osobinu da za svaku matricu Q reda n postoji skup sopstvenih vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ za koje važi $v_i^T v_j = 0, \forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j$. Neka je $d_i = v_i \ i = 1,2,\dots,n$. Pokazaćemo da su vektori d_i Q-ortogonalni:
Vektori su Q ortogonalni ukoliko važi $d_i^T Q d_j = 0,\ i \neq j$:

$$d_i^T Q d_j = v_i^T Q v_j = \left(\text{kako je } v_j \text{ sopstveni vektor, važi } Qv_j = \lambda_j v_j\right)$$
$$= v_i^T \lambda_j v_j = \lambda_j v_i^T v_j = 0$$

dakle, postoji skup Q ortogonalnih vektora koji predstavljaju sopstvene vektore matrice Q.

b) Koristimo uslov Q konjugovanosti i ortogonalnosti vektora, dobijamo sledeće

$$d_i^T Q d_j = 0 \ \text{ i } d_i^T d_j = 0$$

Vektor d_j je sopstveni vektor matrice Q ukoliko važi $Qd_j = \lambda_j d_j$ (na času).

Rešenje:

a) Za svaku realnu simetričnu matricu reda n postoji skup sopstvenih vektora $\{v_1, \dots, v_n\}$ za koji važi $v_i^T v_j = 0$ za svako $i, j \in \{1, .., n\}, i \neq j$.

Neka je v_i sopstveni vektor za koji važi $v_i^T v_j = 0, i \neq j$

$$0 = v_i^T v_j = \quad (\text{pomnožimo sa leve strane sa } \lambda\,)$$
$$= \lambda v_i^T v_j$$
$$= v_i^T \lambda v_j \quad (Qv_j = \lambda v_j)$$
$$= v_i^T Q v_j \quad (i \neq j)$$

Dakle, v_i i v_j su Q-konjugovani.

b) Neka su vektori $d_1, \dots, d_n$ Q-konjugovani

$$d_i^T Q d_j = 0, i \neq j$$
$$d_i^T Q d_i \neq 0$$

i međusobno ortogonalni:

$$d_i^T d_j = 0$$

Da li je $Qd_i = \lambda d_i$?

Polazeći od pretpostavke da je $0 = d_i^T Q d_j$ i da je $d_i^T d_j = 0$ dobija se izraz

$$d_i^T Q d_j = d_i^T d_j = \lambda d_i^T d_j$$

Množeći poslednji izraz sa leve strane sa d_i dobija se da je

$$d_i d_i^T Q d_j = \lambda d_i d_i^T d_j$$

odakle se, deljenjem sa $||d_i|| > 0$ lako može zaključiti da je

$$Qd_j = \lambda d_j$$

tj. da je d_j sopstveni vector.

Zadatak 5

Posmatrajmo funkciju $f(X) = \frac{1}{2}X^TQX - b^TX$ gde je Q simetrična, pozitivno definitna matrica reda n i $b \in R^n$ vektor. Neka je $\{d_0, d_1, \dots.\} \in R^n$ zadati skup vektora i $X^{(0)}$ zadata tačka. Definišimo iterativni algoritam na sledeći način:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k, \qquad k = 0,1,2 \dots$$

gde je α_k minimum funkcije

$$g(\alpha) = f\left(X^{(k)} + \alpha d_k\right), \qquad \alpha \in R.$$

Neka je $f_k = \nabla f(X^{(k)})$. Odrediti formulu oblika

$$d_{k+1} = \gamma_k f_{k+1} + d_k$$

tako da su vektori d_k i d_{k+1} uzajamno Q-konjugovani za svako $k = 0,1,2,\dots$

Da li su vektori $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ konstruisani na ovaj način takođe Q-konjugovani?

Rešenje:

Potrebno je odrediti koeficijente γ_k tako da su vektori d_k i d_{k+1} uzajamno Q-konjugovani.

Množenjem izraza $d_{k+1} = \gamma_k f_{k+1} + d_k$ izrazom d_k^TQ sa leve strane, dobija se izraz:

$$d_k^TQ\, d_{k+1} = \gamma_k d_k^TQf_{k+1} + d_k^TQd_k$$

Iz uslova da su d_k i d_{k+1} uzajamno Q-konjugovani sledi da je

$$d_k^TQ\, d_{k+1} = 0$$

Lako se pokazuje da je $\gamma_k = -\frac{d_k^TQd_k}{d_k^TQf_{k+1}}$. Tražena formula je sledećeg oblika:

$$d_{k+1} = -\frac{d_k^TQd_k}{d_k^TQf_{k+1}} f_{k+1} + d_k.$$

Polazeći od pretpostavke da su svaka dva uzastopna vektora Q konjugavana, metodom matematičke indukcije pokazaćemo da su vektori d_i i d_j , $i \neq j$ i $i \neq j+1$ konstruisani na opisani način takođe Q-konjugovani.

Da bi dokazali tvrđenje, pokazaćemo da važe neke pomoćne relacije.

Za početak , pokažimo da važi $f_{k+1}^TQd_i = 0$. Primetimo prvo da je

$$\begin{aligned} f_{k+1} = \nabla f\left(X^{(k+1)}\right) = QX^{(k+1)} - b = Q\left(X^{(k)} + \alpha_k d_k\right) - b \\ = Q\left(X^{(k)} + \alpha_k d_k\right) - b \\ = QX^{(k)} - b + \alpha_k Qd_k \\ = f_k + \alpha_k Qd_k, \end{aligned}$$

tj. za $k < n$ važi $Qd_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{\alpha_k}$.

Pokažimo zatim da su vektori d_1 i d_0 uzajamno Q-konjugovani:

$$d_1^TQd_0 = \left(-\frac{d_0^TQd_0}{d_0^TQf_1} f_1 + d_0\right)^T Qd_0 = d_0^TQd_0 - f_1^TQd_0 \frac{d_0^TQd_0}{f_1^TQd_0} = d_0^TQd_1 - d_0^TQd_1 = 0$$

Pretpostavimo da je vektor d_k, Q-konjugovan sa vektorima d_i, $i = 0,1, \dots, k$.

Da bi pokazali da je i vektor d_{k+1} Q-konjugovan sa vektorima d_i za svako $i = 0,1, .., k$ potrebno je da pokažemo da je $f_{k+1}^T d_i = 0$ za svako $0 \le k \le n-1$ i $0 \le i \le k$.

Budući da je $f_k = QX^{(k)} - b$ za svako k važi

$$Q\left(X^{(k+1)} - X^{(k)}\right) = QX^{(k+1)} - b + b - QX^{(k)} = f_{k+1} - f_k$$

Ili ekvivalentno

$$f_{k+1} = f_k + Q\left(X^{(k+1)} - X^{(k)}\right) = f_k + \alpha_k Q d_k.$$

Za $k = 0$ dobija se da je

$$f_1^T d_0 = f_0^T\, d_0 + \alpha_0 d_0^T Q d_0 = f_0^T\, d_0 - f_0^T\, d_0 = 0 \quad \text{jer je } \alpha_k = -\frac{f_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}$$

Pretpostavimo da relacija važi za $k-1$, tj. da je $f_k^T d_i = 0$ za svako $0 \le i \le k-1$.

Pokažimo da tvrđenje važi za $k+1$, tj. da je $f_{k+1}^T d_i = 0$ za svako $0 \le i \le k$.

Polazeći od jednakosti $f_{k+1} = f_k + \alpha_k Q d_k$ i sa ranijom pretpostavkom da je $d_k^T Q d_i = 0$ dobija se da je

$$f_{k+1}^T d_i = f_k^T d_i + \alpha_k d_k^T Q d_i = 0$$

Lako se može pokazati da je $f_{k+1}^T d_k = 0$:

$$\begin{aligned}
f_{k+1}^T d_k &= \left(QX^{(k+1)} - b\right)^T d_k \\
&= \left(Q(X^{(k)} + \alpha_k d_k) - b\right)^T d_k \\
&= \left(X^{(k)}\right)^T Q d_k + \alpha_k d_k^T Q d_k - b^T d_k \\
&= \left(\left(X^{(k)}\right)^T Q - b^T\right) d_k - \frac{f_k^T d_k}{d_k^T Q d_k}\, d_k^T Q d_k = f_k^T d_k - f_k^T d_k = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, prema principu matematičke indukcije sledi da je $f_{k+1}^T d_i = 0$ za svako $0 \le k \le n-1$ i $0 \le i \le k$.

Ostalo je još da se pokaže da je $f_{k+1}^T f_i = 0, \quad i = 0,1, \dots, k, \quad k < n-1.$

Sa obzirom da je $d_i = \gamma_{i-1} f_i + d_{i-1}$ množenjem ove jednakosti sa f_{k+1}^T sa desne strane dobija se

$$f_{k+1}^T d_i = \gamma_{i-1} f_{k+1}^T f_i + f_{k+1}^T d_{i-1}$$

Budući da je $f_{k+1}^T d_i = 0$ i da je $f_{k+1}^T d_{i-1} = 0$ lako se može zaključiti da je $f_{k+1}^T f_i = 0$ za svako $i = 0,1, \dots, k$ što smo i želeli da pokažemo.

Uočimo da važi:

$$d_{k+1}^T Q d_i = (\gamma_k f_{k+1} + d_k)^T Q d_i$$

Za $i = k$ dobija se da je

$$\begin{aligned} d_{k+1}^T Q d_k &= (\gamma_k f_{k+1} + d_k)^T Q d_k \\ &= \left(-\frac{d_k^T Q d_k}{d_k^T Q f_{k+1}} f_{k+1} + d_k \right)^T Q d_k \\ &= d_k^T Q d_k - f_{k+1}^T Q d_k \frac{d_k^T Q d_k}{f_{k+1}^T Q d_k} = 0 \end{aligned}$$

Za $i < k$ se dobija da je

$$\begin{aligned} d_{k+1}^T Q d_i &= (\gamma_k f_{k+1} + d_k)^T Q d_i \\ &= d_k^T Q d_i + \gamma_k f_{k+1}^T Q d_i \qquad (d_k^T Q d_i = 0 \text{ na osnovu pretpostavke }) \\ &= \gamma_k f_{k+1}^T Q d_i. \end{aligned}$$

Izraz $d_{k+1}^T Q d_i$ je jednak nuli ukoliko je $\gamma_k = 0$ ili $f_{k+1}^T Q d_i = 0$.

Slučaj $\gamma_k = 0$ otpada jer bi tada bilo $d_{k+1} = d_k$ što nije moguće zbog Q-konjugovanosti.

Zamenimo $Q d_k$ u gornji izraz, dobija se da je

$$f_{k+1}^T Q d_i = f_{k+1}^T \frac{f_{i+1} - f_i}{\alpha_i} = \frac{f_{k+1}^T f_{i+1} - f_{k+1}^T f_i}{\alpha_i}$$

Dakle, kako je $f_{k+1}^T f_i = 0$ za svako i, može se zaključiti i da je $f_{k+1}^T f_{i+1} = 0$, što dalje povlači da je $f_{k+1}^T Q d_i = 0$, odnosno da je $d_{k+1}^T Q d_i = 0$.

Vektori konstruisani na opisani način su Q-konjugovani.

Zadatak 6

Metodom konjugovanih gradijenata odrediti minimum funkcije $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 5x_1$, $f: R^2 \rightarrow R$, $X = [x_1, x_2]^T \in R^2$, ako je $X^{(0)} = [0,0]^T$.

Rešenje:

Funkcija se ekvivalentno može zapisati kao $f(x) = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2) - 5x_1$, odnosno ima oblik kvadratne forme za

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, c = 0.$$

Na osnovu teoreme sledi da se do rešenja dolazi u najviše dva koraka. Kako je gradijent funkcije

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - 5 \\ -x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

a imajući u vidu da je $\left|\left|\nabla f\left(x^{(0)}\right)\right|\right| = \sqrt{25} \neq 0$ jasno je da $x^{(0)}$ nije rešenje posmatranog problema. Određujemo vrednost prve aproksimacije

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 d_0$$

gde je $d_0 = \nabla f\left(x^{(0)}\right) = [-5{,}0]^T$. Dobija se da je

$$\alpha_0 = \frac{\left|\left|\nabla f\left(x^{(0)}\right)\right|\right|^2}{d_0^T Q d_0} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

Dakle, $x^{(1)} = [0{,}0]^T - \frac{1}{3}[-5{,}0]^T = \left[\frac{5}{3}, 0\right]^T$.

Ponovo na osnovu vrednosti norme izvoda funkcije $\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \left[0, -\frac{5}{3}\right]^T$ zaključujemo da $x^{(1)}$ nije rešenje problema jer $\left|\left|\nabla f\left(x^{(1)}\right)\right|\right| \neq 0$. Određujemo vrednost naredne iteracije:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha_1 d_1$$

gde je $d_1 = \nabla f\left(x^{(1)}\right) - \beta_0 d_0$, gde je $\beta_0 = \frac{\nabla f\left(x^1\right)^T Q d_0}{d_0^T Q d_0} = -\frac{1}{9}$, tj. $\alpha_1 = \frac{3}{14}$, $d_1 = \left[-\frac{5}{9}, -\frac{5}{3}\right]^T$ a $x^{(2)} = \left[\frac{25}{14}, \frac{5}{14}\right]^T$.
Kako je $\left|\left|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right|\right| = 0$ jasno je da je $x^{(2)}$ traženo rešenje.

Priprema za kolokvijum

1. Posmatramo funkciju $f(X) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$

a) Koristeći Njutnovu i metodu najstrmijeg spusta minimizovati funkciju f. Za početnu tačku uzeti $X^{(0)} = [-2,4]^T$.

b) Da li iterativni niz konvergira ka globalnom ili lokalnom minimumu?

c) Uporediti brzine konvergencija metoda

Rešenje:

Njutnovom metodom formira se iterativni niz na sledeći način:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{\nabla f(X^{(k)})}{\nabla^2 f(X^{(k)})}$$

Ili ekvivalentno

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + d_k, \text{gde je } d_k = -\frac{\nabla f\left(X^{(k)}\right)}{\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)}.$$

Odredimo prvi i drugi izvod funkcije f

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - 2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz relacije $\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right) d_k = -\nabla f\left(X^{(k)}\right)$ lako se dobija da za $d_k = [d_1^k, d_2^k]^T$ važi

$$d_1^k = -x_1^{(k)} + 1,$$

$$d_2^k = 1 - x_2^{(k)}$$

Odnosno da bi se iterativni niz koji odgovara Njutnovoj metodi mogao zapisati kao

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + d_k$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} -x_1^{(k)} + 1 \\ 1 - x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

Dobija se sledeći iterativni niz:

$$X^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iz uslova $\nabla f(X^*) = 0$ se dobija da je stacionarna tačka $X^* = [1,1]^T$.

Metodom najbržeg spusta iterativni niz se je sledećeg oblika:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k d_k$$

gde je $d_k = \nabla f\left(X^{(k)}\right)$, a korak spusta α_k određen kao minimum funkcije $g(\alpha) = \min\limits_{\alpha \geq 0} f\left(X^{(k+1)}\right)$.

prvo izračunamo vrednost $d_0 = \nabla f\left(X^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 3 * (-2) - 4 - 2 \\ 4 - (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix}$ dobija se da je

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\min_{\alpha \geq 0} f\left(\begin{bmatrix} -2 + 12\alpha \\ 4 - 6\alpha \end{bmatrix}\right) =$$

$$\min_{\alpha \geq 0} \frac{3}{2}(-2 + 12\alpha)^2 + \frac{1}{2}(4 - 6\alpha)^2 - (-2 + 12\alpha)(4 - 6\alpha) - 2(-2 + 12\alpha) =$$

$$\min_{\alpha \geq 0} 6(-1 + 6\alpha)^2 + 2(2 - 3\alpha)^2 - 4(-1 + 6\alpha)(2 - 3\alpha) - 4(-1 + 6\alpha) .$$

Iz uslova $g'(\alpha) = 0$ dobija se da je

$$g(\alpha) = 306\alpha^2 - 180\alpha + 26$$
$$612\alpha - 180 = 0$$
$$\alpha_0 = \frac{180}{612} = \frac{5}{17}$$
$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{5}{17}\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix}$$

Određujemo sledeću vrednost iterativnog niza:

$$d_1 = \nabla f\left(X^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 3 * \left(\frac{26}{17}\right) - \frac{38}{17} - 2 \\ \frac{38}{17} - \frac{26}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{17} \\ \frac{12}{17} \end{bmatrix}$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(\begin{bmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \frac{6}{17} \\ \frac{12}{17} \end{bmatrix}\right) = \cdots$$

... isprogramirati u MATLABU na času

b) Niz dobijen Njutnovom metodom konvergira ka lokalnom minimum u dva koraka.

c) Red konvergencije Njutnove metode je 2, dok metodom najstrmijeg spusta niz znatno sporije konvergira ka lokalnom minimumu.

2. Metodom najstrmijeg spusta odrediti minimum funkcije

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$$

Za početnu tačku iterativnog niza uzeti $[x_0, y_0]^T = [2,1]^T$. Prekinuti sa iteracijama kada norma gradijenta bude manja od 10^{-2}.

Rešenje:

$$d_0 = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(X^{(0)} - \alpha d_0\right) = \quad \min_{\alpha \geq 0} f\begin{pmatrix} 2-6\alpha \\ 1-6\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\min_{\alpha \geq 0}((2-2\alpha)^2 + (1-6\alpha)^2 - 2(2-2\alpha) + 4(1-6\alpha) + 1)$$

$$\min_{\alpha \geq 0}(40\alpha^2 - 40\alpha + 6)$$

Iz relacije $g'(\alpha) = 0$ se dobija da je $80\alpha - 40 = 0$, odnosno $\alpha_0 = \frac{1}{2}$. Zamenom u $X^{(1)}$ sledi da je

$$[x_1, y_1]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T$$

Ponovimo postupak:

$$d_1 = \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Možemo da prekinemo postupak sa obzirom da je $\left|\left|d_2\right|\right| = 0 < 10^{-2}$.

Funkcije korišćene u MATLABu

```
f = @(x) x(1).^2 + x(2).^2 - 2*x(1) + 4*x(2) + 1;
x0 = [2,1];
grad = @(x,y) [2*x+2; 2*y+4];
x1 = @(x0,a)  x0'-a*grad(x0(1),x0(2))

g = @(a) f(x1(x0,a))
alpha = fzero(g,0.01)
x0 = x0 - alpha*grad(x0(1),x0(2))'
gradijent = grad(x0(1),x0(2));
brit = 1;
while brit<5
    x1 = @(x0,a)  x0'-a*grad(x0(1),x0(2))
    g = @(a) f(x1(x0,a))
    alpha = fzero(g,0.01)
    x0 = x0 - alpha*grad(x0(1),x0(2))'
    gradijent = grad(x0(1),x0(2))
    brit = brit+1;
end
```

ili

```
x = [-2 0];
y = [-2 -1];
g = conv(x,x) + conv(y,y) - 2*[0 x] + 4*[0 y] + [0 0 1]
g1 = polyder(g)
alfa = roots(g1)
```

3. Za funkciju $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$ Njutnovom metodom odrediti prve 2 tačke iterativnog niza ako se za početnu tačku bira $[0,0]^T$. Da li iterativni niz konvergira ka tački minimuma. Diskutovati ponašanje metode za drugačiji izbor početnih vrednosti.

Rešenje

Gradijent funkcije f je

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Iz relacije $\nabla^2 f\left(x^{(k)}\right) d_k = -\nabla f(x^{(k)})$ se za $d_k = [d_{1k}, d_{2k}]^T$ dobija

$$d_1^k = -\frac{x(x^2-1)}{3x^2-1}$$

$$d_2^k = -\frac{2x^3}{3x^2-1} - y$$

Stacionarne tačke koje odgovaraju zadatoj funkciji su $X^* = [1,1]^T, X^* = [0,0]^T$ i $X^* = [-1,-1]^T$.

Iterativni niz dobijen Njutnovom metodom bio bi sledećeg oblika

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{X^{(k)}(X^{(k)^2} - 1)}{3X^{(k)^2} - 1}$$

$$Y^{(k+1)} = -\frac{2X^{(k)^3}}{3X^{(k)^2} - 1}$$

4. Data je funkcija $f\,:\,R^2 \;\rightarrow\; R$ defnisana sa $f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$ gde su $Q\in R^{m+n}, b\in R^n, c\in R$.
Neka su pravci p_k određeni sa

$$p_k = \nabla f(x^k) - \beta_{k-1}p_{k-1},$$

$$\beta_{k-1} = \frac{p_{k-1}^T Q \nabla f(x^k)}{p_{k-1}^T Q p_{k-1}}$$

i neka je $p_0=\nabla f(x^0), p_{k-1}\neq 0$. Pokazati da tada važi:

1. Pravci p_k su konjugovani u odnosu na matricu Q, dok su vektori $Qp_1, Qp_2, \dots, Qp_k$ linearno nezavisni.
2. x^* pripada linearnoj mnogostrukosti
$$G_{n-k} = \{x \in R^{\,n}\, \big| (x - x^t)^T Q p_{i-1} = 0, i = 1, \dots, k\}$$
3. Metoda konjugovanih gradijenata daje minimum kvadratne forme u najviše n koraka.

Rešenje:

a) 1) Pokažimo da tvrdjenje važi indukcijom.
Pokažimo prvo da za $k=1$ važi $p_1^TQp_0 = p_0^TQp_1 = 0$.
Zbog simetričnosti matrice sledi da je $p_1^TQp_0 = p_0^TQp_1$ dok je iz definicije koraka β_0

$$\begin{aligned} p_1^TQp_0 &= (\nabla f(x^1) - \beta_0 p_0)Qp_0 = \\ &= \Big(\nabla f(x^1) - \frac{p_0^TQ\nabla f(x^1)}{p_0^TQp_0}p_0\Big)Qp_0 = \\ &= \frac{\Big(\nabla f(x^1)p_0^TQp_0 - p_0^TQ\nabla f(x^1)p_0\Big)Qp_0}{p_0^TQp_0} \\ &= \frac{\Big(\nabla f(x^1)(p_0^TQp_0 - p_0^TQp_0)\Big)Qp_0}{p_0^TQp_0} = 0. \end{aligned}$$

Dalje, pretpostavimo da Qp_0 i Qp_1 nisu linearno nezavisni vektori. Dakle, neka postoje konstante a_1 i a_2 takve da je $a_1Qp_0 + a_2Qp_1 = 0$ i neka je bar jedna od konstanti $a_i, i = 1, 2$ razilčita od nule (npr. $a_1 \neq 0$). Skalarnim množenjem sa p_1 sa leve strane dobija se da je $a_1p_1Qp_0 + a_2p_1Qp_1 = 0$ odakle sledi da je $a_2 = 0$. Medjutim, mnozhenjem sa p_0 dobija se da je $a_1 = 0$ što je kontradiktorno pretpostavci da je $a_1 \neq 0$. Dakle, vektori su linearno nezavisni. Analogno se pokazuje za k.

2) Prvo, obzirom da je x^* minimum funkcije sledi da je $\nabla f(x^*) = Qx^* - b = 0$ ($x^* = Q^{-1}b$). Dalje sledi $(x^*-x_k)^TQp_{k-1} = (Q^{-1}b - x^k)^TQp_{k-1} = (b - Qx^k)^TQ^{-1}Qp_{k-1} = -(\nabla f(x^k)^T p_{k-1}) = 0, k = 1, \dots, n$. Dakle, $x^* \in G_{n-k}$.

3) Ako je za neko k $\nabla f(x^{k-1}) = 0$ sledi da je $x^* = x^{k-1}$. Medjutim, ako je $\nabla f(x^{k-1}) \neq 0$ primenom metode konjugovanih gradijenata nastavlja se iterativni niz. Kako je $x^* \in G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset R^n$ dobija se da je G_0 dimenzije nula, odnosno da je $G_0 = \{x^*\}$. Ukoliko se pre n-tog koraka ne dodje do reshenja, sledi da je $\nabla f(x^n) = 0$ odnosno da je $x^n = x^*$. Dakle, u najvishe n koraka metodom konjugovanih gradijenata se dolazi do reshenja datog problema minimizacije.

$$f(X) = \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{2}x_3^3 - x_1 + x_2 + x_3$$

Zadatak 2.

a) Metodom najbržeg spusta sa tačnošću $\varepsilon = 0.5$ odrediti približno rešenje problema minimizacije funkcije f. Za početnu tačku uzeti $X^{(0)} = (1,1,1)^T$.

b) Konstruisati Njutnov iterativni niz $\{X^{(k)}\}$ za minimizaciju funkcije f. Počevši od tačke $X^{(0)} = (1,1,1)^T$ odrediti prve tri iteracije $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$.

c) Odrediti red konvergencije niza dobijenog u delu pod b).

Zadatak 3. Neka je $\{X^{(k)}\}$ iterativni niz dobijen metodom najbržeg spusta pri minimizaciji proizvoljne nelinearne funkcije $f : R^n \to R$.

a) Pokazati da su vektori $X^{(k+1)} - X^{(k)}$ i $X^{(k+2)} - X^{(k+1)}$ ortogonalni za svako k.

a) Pokazati da iterativni niz $\{X^{(k)}\}$ ima svojstvo spusta pri prelazu sa tačke $X^{(k)}$ na $X^{(k+1)}$ ako je $\nabla f(X^{(k)}) \neq 0$.

Zadatak 2 Iterativni nizovi za obe metode konvergiraju ka tački A_1.

a) Metodom najbržeg spusta iterativni niz je oblika

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k \nabla f(X^{(k)}).$$

Prva iteracija se lako dobija:
$X^{(1)} = X^{(1)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(1)})$,
$\nabla f(X^{(0)}) = (-1/2, 0, -1/2)^T \quad \rightarrow \quad X^{(1)} = (1 - \frac{1}{2}\alpha_0, 1, 1 - \frac{1}{2}\alpha_0)$.

$$\min_{\alpha \geq 0} g_0(\alpha) = \min_{\{\alpha \geq 0} \frac{1}{6}(1 - 1/2\alpha)^3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(1 - 1/2\alpha)^3 - (1 - 1/2\alpha) + 1 + (1 - 1/2\alpha)\}$$

$$\min_{\alpha \geq 0} g_0(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} \{-\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}\alpha)^3 + \frac{2}{3}\}$$

$g(\alpha)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(1 - \frac{1}{2}\alpha)^2 = 0 \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}$

$$X^{(1)} = (\tfrac{3}{4}, 1, \tfrac{3}{4})^T = (0.75, 1, 0.75)^T,$$

Za ovako dobijenu vrednost iterativnog niza va zi $\|\nabla f(X^{(1)})\| = \|(-\frac{23}{32}, 0, \frac{5}{32})\| = 0.541016.$
Slično:
$X^{(2)} = X^{(1)} - \alpha_1 \nabla f(X^{(1)}),$
$\nabla f(X^{(1)}) = (-\frac{23}{32}, 0, \frac{5}{32})^T \quad \rightarrow \quad X^{(2)} = (\frac{3}{4} + \frac{23}{32}\alpha_1, 1, \frac{3}{4} - \frac{5}{32}\alpha_1).$

$$\min_{\alpha \geq 1} g_1(\alpha) = \min_{\{\alpha \geq 0} \tfrac{1}{6}(\tfrac{3}{4} + \tfrac{23}{32}\alpha)^3 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{32}\alpha)^3 - (\tfrac{3}{4} + \tfrac{23}{32}\alpha) + 1 + (\tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{32}\alpha)\}$$

$g(\alpha)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{23}{64}(\frac{3}{4} + \frac{23}{32}\alpha)^2 + \frac{10}{96}(\frac{3}{4} - \frac{5}{32})^2 - \frac{23}{32} - \frac{5}{32}\alpha = 0 \quad \alpha_1 = 1.083460 \quad (\alpha_1 = -3.012490)$

$$X^{(2)} = (1.528737, 1, 0.580709)^T,$$

Za ovako dobijenu vrednost iterativnog niza važi

$$\|\nabla f(X^{(1)})\| = \|(0.168518, 0, 0.494165)\| = 0.522109 > \varepsilon.$$

Određujemo treću iteraciju:
$X^{(3)} = X^{(2)} - \alpha_2 \nabla f(X^{(2)}),$
$\nabla f(X^{(2)}) = (-0.168518, 0, 0.494165)^T.$
...
$g(\alpha)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = -0.564557 \quad (\alpha_1 = -2.70325)$

$$X^{(3)} = (1.623875, 1, 0.859693)^T.$$

Za ovako dobijenu vrednost iterativnog niza važi

$$\|\nabla f(X^{(3)})\| = \|(0.318485, 0, -0.108609)\| = 0.336495 < \varepsilon.$$

Metodom najbržeg spusta, sa tačnošću ε, minimum funkcije f je tačka $X^* = (1.623875, 1, 0.859693)^T$.

b) Primenom Njutnove metode iterativni niz se formira na sledec1i nachin:

$$X^{k+1} = X^{(k)} + d_k$$

gde se d_k odredjuje iz relacije $F(X^{(k)})d_k = -f_k$. Rešavanjem sistema dobija se da iterativna formula:
$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{x_1^{(k)}}$
$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(k)} + \frac{1}{2x_2^{(k)}}$
$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}x_3^{(k)} + \frac{1}{3x_3^{(k)}}$
Prve tri iteracije su:
$X^{(1)} = (\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6})^T = (1.5, 1, 0.833333)^T,$
$X^{(2)} = (\frac{17}{12}, 1, \frac{49}{60})^T = (1.416667, 1, 0.816667)^T,$
$X^{(3)} = (\frac{577}{408}, 1, \frac{4801}{5808})^T = (1.414216, 1, 0.822662)^T,$

Uslovna optimizacija – uslovi tipa jednakosti

Primeri iz 8.5 poglavlja
Zadaci iz poglavlja 8.8

1. Data je funkcija $f: R^3 \rightarrow R$, definisana sa $f(X) = x_1^2 + x_1^2 x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2^4 + 8x_2$.
   Posmatrajmo problem
   $$\min f(X)$$
   pri uslovu
   $$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$
   a) Ispitati koje od navedenih tačaka su stacionarne:
   $$A = [0,0,2]^T, B = [0,0,3]^T, C = [1,0,1]^T]$$
   b) Za svaku od stacionarnih tačaka određenih pod a) ispitati da li je u pitanju tačka lokalnog minimuma, lokalnog maksimuma ili sedlasta tačka.

Rešenje:

Formiraćemo Lagranževu funkciju za zadati problem:
$$L(X,\lambda) = x_1^2 + x_1^2 x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2^4 + 8x_2 + \lambda(2x_1 + x_2 - x_3 - 3)$$
Stacionrne tačke se traže u nulama partcijalnih izvoda funkcije L
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(X,\lambda) = 2x_1 + 2x_1x_3^2 + 2x_2 + 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(X,\lambda) = 2x_1 + 4x_2^3 + 8 + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(X,\lambda) = 2x_1^2 x_3 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X,\lambda) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0$$

Kako da ni jedna od navedenih tačaka ne zadovoljava zadati sistem ne mogu da budu stacionarne tačke.

2. Odrediti minimume (maksimume) zadatih funkcija pri navedenim uslovima:

a) $f(X) = 3x_1^3 + 2x_2^3$ pri uslovu $x_1^2 + x_2^2 = 4$
b) $f(X) = x_2$, pri uslovu $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2 = 0$
c) $f(X) = x_1x_2^3$ pri uslovu $2x_1 + 3x_2 = 4$
d) $f(X) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2$ pri uslvu $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Rešenje:

a)

Formiraćemo Lagranževu funkciju za zadati problem:
$$L(X,\lambda) = 3x_1^3 + 2x_2^3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$$
Stacionarne tačke se traže u nulama parcijalnih izvoda funkcije L
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(X,\lambda) = 9x_1^2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(X,\lambda) = 6x_2^2 + 2\lambda x_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$
Rešavanjem sistema dobijaju se sledeće stacionarne tačke:
$$A = [0,2], \qquad \lambda = -6$$
$$B = [0,-2], \qquad \lambda = 6$$
$$C = [-2,0], \qquad \lambda = -9$$
$$D = [2,0], \qquad \lambda = 9$$
$$E = \left[-\frac{4\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right], \qquad \lambda = \pm\frac{18\sqrt{13}}{13}$$
$$F = \left[\frac{4\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}\right], \qquad \lambda = \pm\frac{18\sqrt{13}}{13}$$
Odredimo matricu drugog izvoda
$$\nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} 18x_1 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 12x_2 + 2\lambda \end{bmatrix}$$
$$Dh(X) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$
Tangetni prostor je sledećeg oblika:
$$T(X^*) = \{y \in R^n \mid Dh(X^*)y = 0\}$$
$$= \{y \in R^n | 2x_1y_1 + 2x_2y_2 = 0\}$$
$$= \{y \in R^n | x_1y_1 + x_2y_2 = 0\}$$

$$y^T H_L(x^*,\lambda^*)y \geq 0$$
Proveravamo uslove za svaku tačku posebno
A:
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -12y_1^2 \leq 0$$
$$0y_1 + 2y_2 = 0 \rightarrow \quad y_2 = 0$$
Dakle, tačka A ne zadovoljava NUDR!
B:
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 12y_1^2 \geq 0$$
$$0y_1 + 2y_2 = 0 \rightarrow \quad y_2 = 0$$
Dakle, tačka B zadovoljava i NUDR i DUDR!
C:
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} [\ldots] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ldots$$
....
Dakle, tačka C....
D:
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} [\quad] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ldots..$$
....
Dakle, tačka D ....

3. Odrediti vrednosti parametara a i b pri kojima tačka $[0,0]^T$ predstavlja ekstremum funkcije

$$f(X) = (a+2)x_1 - 2x_2$$

Pri uslovu

$$a(x_1 + e^{x_1}) + b(x_2 + e^{x_2}) = 1$$

Rešenje:

Formiraćemo Lagranževu funkciju za zadati problem:

$$L(X,\lambda) = (a+2)x_1 - 2x_2 + \lambda(a(x_1 + e^{x_1}) + b(x_2 + e^{x_2}) - 1)$$

Stacionarne tačke se traže u nulama partcijalnih izvoda funkcije L

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(X,\lambda) = a + 2 \ + \lambda a(1 + e^{x_1}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(X,\lambda) = -2 + \lambda b(1 + e^{x_2}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X,\lambda) = a(x_1 + e^{x_1}) + b(x_2 + e^{x_2}) - 1 = 0$$

Rešavanjem sistema tako da stacionarna tačka bude tačka $O = [0,0]^T$ dobija se da je

$$a = -\frac{2}{1+2\lambda}, \qquad b = \frac{1}{\lambda}$$

Ako uzmemo da je $\lambda = -1$ dobiće se da je $a = 2, b = -1$

U slučaju da je $\lambda = \frac{1}{2}$ dobiće se da je $a = -1, b = 2$

4. Problem nalaženja najkraćeg rastojanja od tačke r do skupa $\{X | a^T X = b\} \subseteq R^n$ može biti zapisan na sledeći način:

$$\min f(X) = \frac{1}{2}(X-r)^T(X-r)$$

Pri uslovu $a^T X = b$. Pokazati da je rešenje oblika

$$X^* = r + \frac{b - a^T r}{a^T a} a$$

Rešenje:

Formiraćemo Lagranževu funkciju za zadati problem:

$$L(X,\lambda) = \frac{1}{2}(X-r)^T(X-r) + \lambda(a^T X - b)$$

Stacionrne tačke se traže u nulama partcijalnih izvoda funkcije L

$$\frac{\partial L}{\partial x}(X,\lambda) = X - r + \lambda a^T = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X,\lambda) = a^T X - b = 0$$

Rešavanjem sistema iz prve jednačine se dobija:

$$X = r - \lambda a$$

zamenimo u drugu jednačinu:

$$a^T(r - \lambda a) - b = 0$$
$$a^T r - \lambda a^T a - b = 0$$
$$a^T r - b = \lambda a^T a$$

$$\lambda = \frac{a^T r - b}{a^T a}$$

Zamenom parametra λ u prvu jednačinu dobjia se traženo rešenje.

5. Odrediti maksimume zadatih funkcija pri navedenim uslovima:

$$f(X) = x_1x_2x_3, \text{ pri uslovu } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1, a_1, a_2, a_3 > 0$$

Rešenje:

Formiraćemo Lagranževu funkciju za zadati problem:

$$L(X, \lambda) = x_1x_2x_3 + \lambda\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - 1\right)$$

Stacionrne tačke se traže u nulama partcijalnih izvoda funkcije L

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(X, \lambda) = x_2x_3 + \frac{\lambda}{a_1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(X, \lambda) = x_1x_3 + \frac{\lambda}{a_2} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3}(X, \lambda) = x_1x_2 + \frac{\lambda}{a_3} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(X, \lambda) = \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - 1 = 0$$

Rešavanjem sistema tako da stacionarna tačka bude tačka $O = [0,0]^T$ dobija se da je

$$\frac{x_2}{a_2} = \frac{x_1}{a_1}, \frac{x_3}{a_3} = \frac{x_2}{a_2}$$

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{1}{3} \quad \text{odnosno } x_i = \frac{1}{3}a_i, i = 1,2,3.$$

Dakle, $A = \left[\frac{1}{3}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{3}a_3\right]$.

Hesijan matrice je sledeći:

$H = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$, minori matrice su $0 \geq 0, -\frac{2}{9}a_3^2 \leq 0,\ \frac{2}{27}a_1a_2a_3 \geq 0$

Tangetni proctor

$$T(X) = \{y \in R^n | Dh(X^*)y = 0\}$$
$$Dh(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}$$
$$T(X) \ = \left\{y \in R^n | \quad \frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} + \frac{y_3}{a_3} = 0\right\}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_2} \\ \frac{1}{a_3} & 0 & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 2\left(\frac{1}{a_3}y_1y_2 + \frac{1}{a_2}y_1y_3 + \frac{1}{a_1}y_2y_3\right)$$

6. Posmatrajmo problem

$$\min_{X \in S} f(X)$$

gde su $f, h: R^2 \to R$ i $S = \{X \in R^n | h(X) = 0\}$ dopustivi skup. Neka je $\nabla f(X) = [x_1, x_1 + 4]^T$. Pretpostavimo da je X^* optimalno rešenje problema i $\nabla h(X^*) = [1,4]^T$. Odrediti $\nabla f(X^*)$.

Rešenje:
Imajući u vidu da su

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 4 \end{bmatrix}, \nabla h(X^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

možemo da formiramo Lagranževu funkciju:

$$L(x, \lambda) = f(X) + \lambda h(X)$$

Izjednačavanjem vrednosti parcijalnih izvoda sa nulom, dobija sistem

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \nabla f(X) + \lambda \nabla h(X) = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda \\ x_1 + 4 + 4\lambda \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + 4 + 4\lambda = 0 \end{matrix}$$

čije je rešenje $x_1 = -\lambda$, $3\lambda + 4 = 0$, odnosno

$$\lambda = -\frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}$$

$$\nabla f(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

7. Posmatrajmo problem minimizacije funkcije $f: R^2 \to R$

$$\min_{X \in S} f(X)$$

gde je $f(X) = \left||X - X_0|\right|^2, X_0 = \left[1, \sqrt{3}\right]^T$, $||\cdot||$ norma u R^2 i dopustivi skup $S = \{X \in R^n | \left||X|\right|^2 = 9\}$.

a) Odrediti sve tačke koje zadovoljavaju Lagranžove uslove za dati problem
b) Koristeći uslove drugog reda, odrediti koje od tačaka pod a) predstavljaju lokalne minimume.

Rešenje:
Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(X, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + \left(x_2 - \sqrt{3}\right)^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 9)$$

Stacionarne tačke tražimo u nulama partcijalnih izvoda:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) = 2(x_1 - 1) + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = 2\left(x_2 - \sqrt{3}\right) + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$$

Rešenje sistema je

$$x_1 = \frac{1}{1 + \lambda}, \lambda \neq -1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{1 + \lambda}, \lambda \neq -1$$

Odnosno

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{3}{(1+\lambda)^2} = \frac{4}{(1+\lambda)^2} = 9 \quad \rightarrow \quad (1+\lambda)^2 = \frac{4}{9}$$

1) $\lambda = -\frac{1}{3}$

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $\lambda = -\frac{5}{3}$

$B\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Tangetni prostor:

$$T(X) = \left\{ y \in R^n \middle| \; Dh(X^*) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y \in R^n \middle| \; \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \{ y \in R^n | \; x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \}$$

$$T(A) = \left\{ y \in R^n \middle| \; \frac{3}{2} y_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} y_2 = 0 \right\} = \left\{ y \in R^n \middle| \; \begin{bmatrix} -\sqrt{3}a \\ a \end{bmatrix} \right\}$$
$$T(B) = \left\{ y \in R^n \middle| \; -\frac{3}{2} y_1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} y_2 = 0 \right\} = \left\{ y \in R^n \middle| \; \begin{bmatrix} -\sqrt{3}a \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_L(X^*, \lambda^*) = \begin{bmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{bmatrix}$$

Neophodni uslovi II reda su

$$\forall y \in T(X^*), \quad y^T H_L(X^*, \lambda^*) y \geq 0$$

Proveravamo ih za svaku tačku posebno

A:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3}a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}a \\ a \end{bmatrix} = 4a^2 + \frac{4}{3} a^2 \geq 0$$

B:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3a} & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}a \\ a \end{bmatrix} = \cdots.$$

Tačka A je lokalni minimumi.

Tačka B ....

8. Za domaći.

9. Odrediti sva rešenja problema

$$\max X^T AX$$

Pri uslovu $||X||^2 = 1$, gde je $||\cdot||$ norma u R^2 a matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Rešavamo problem

$$\min -X^T AX$$

Pri uslovu $||X||^2 - 1 + 0, X \geq 0$.

$$L(X,\lambda) = -X^T AX + \lambda\left(||X||^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -2X^T A + 2\lambda||X|| = 0 \quad \rightarrow \quad AX = \lambda||X||$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = ||X||^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad ||X|| = 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} 3x_1 + 4x_2 = \lambda \\ 3x_2 = \lambda \end{matrix}$$

Dalje se dobija da je

$$\left(-\tfrac{1}{9}\lambda\right)^2 + \tfrac{\lambda^2}{9} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = \tfrac{10}{81}, \quad \lambda = \pm\tfrac{\sqrt{10}}{9}$$

$$x_1 = \mp\frac{\sqrt{10}}{81}, \quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{10}}{27}.$$

10. Posmatrajmo problem

$$\max(ax_1 + bx_2)$$

Pri uslovu $x_1^2 + x_2^2 = 2$, gde su $x_1, x_2, a, b \in R$.

Rešenje:

Problem rešavati korišćenjem sfernih koordinata.

11. Za vežbu
12. Za vežbu
13. Za vežbu

14. Dat je problem

$$\min f(X)$$

Pri uslovu

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Gde je funkcija $f: R^2 \to R$ zadata sa $f(X) = x_1 x_2 - 2x_1$

a) Koristeći Lagranžovu teoremu pokazati da je rešenje datog problema (ukoliko postoji) jedna od tačaka $[1,1]^T$ i $[-1,1]^T$.
b) Koriste'i neophodne uslove drugog reda, pokazati da tačka $[-1,1]^T$ ne može biti rešenje datog problema
c) Koristeći dovoljne uslove drugog reda, pokazati da je tačka $[1,1]^T$ lokalni minimum datog problema.

Rešenje:
Za domaći.

Uslovna optimizacija – uslovi tipa nejednakosti

Zadaci iz poglavlja 9.7

1. Neka je regularna tačka X^* lokalni minimum funkcije f na skupu

$$S = \{X \in R^n | h(X) = 0, g(X) \leq 0\}.$$

Pokazati da je tada tačka X^* lokalni minimum funkcije f na skupu

$$S_1 = \left\{X \in R^n \middle| \ h(X) = 0, g_j(X) = 0, j \in J(X^*)\right\}$$

Rešenje:

X^* je lokalni minimum funkcije f na skupu S, dakle ispunjeni su neophodni uslovi prvog i drugog reda:

1. $M^* \geq 0$
2. $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T Dg(X^*) = 0$
3. $(M^*)^T g(X^*) = 0$

Na osnovu uslova 1. sledi da je $\mu_i \geq 0$.
Na osnovu uslova 3.

$$\mu_1^* g_1(X^*) + \mu_2^* g_2(X^*) + \cdots \mu_k^* g_k(X^*) = 0$$

Dobija se da je $\mu_j^* = 0$ kada god je $g_j(X^*) < 0$ a preostali KKT množioci su nenegativni (sa tim da mogu biti jednaki nuli). Važi sledeća relacija: $\mu_j^* = 0$ za svako $j \notin J(X^*)$.

Skup S_1 figurišu isključivo uslovi jednakosti. Prema Lagranžovoj teoremi, ako je tačka X^* minimum funkcije f postoje vektori $\lambda^* \in R^m$ i $M^* \in R^k$ takvi da važi

$$Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T Dg(X^*) = 0$$

Pri čemu je $\mu^* = 0$ za svako $j \notin J(X^*)$.
Ostalo je da se pokaže da su $\mu_j^* \geq 0$ za svako $j \in J(X^*)$ što bi direktno povuklo da je $M^* \geq 0$.
Dokaz se izvodi preko kontradikcije.

....

2. Data je funkcija $f: R^2 \to R$, definisana sa $f(X) = x_2 - (x_1 - 2)^2 + 3, X = [x_1, x_2]^T$.

   Posmatrajmo problem

$$\min f(X)$$

   pri uslovu

$$x_2 \geq 1$$

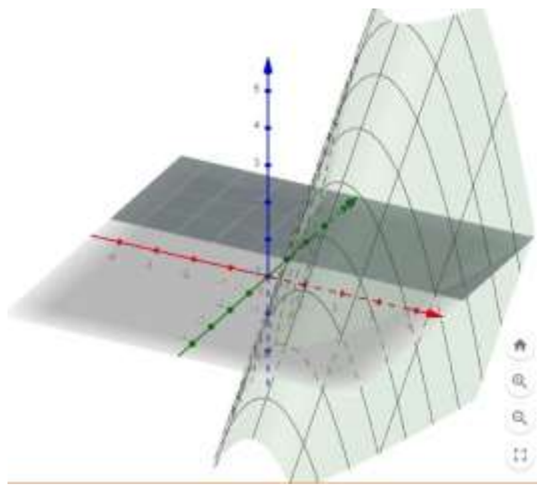
   a) Napisati KKT uslove za dati problem i odrediti sve tačke koje zadovoljavaju KKT uslove. Za svaku od nađenih tačaka proveriti da li je regularna
   b) Među tačkama određenim u delu pod a) odrediti one koje zadovoljavaju neophodne uslove drugog reda.
   c) Ispitati koje od tačaka određenih pod b) zadovoljavaju dovoljne uslove drugog reda.

Rešenje:

a) Primetimo prvo da je ograničenje $x_2 \geq 1$ može zapisai kao $g(x) = x_2 - 1 \geq 0$. Zbog uslova KKT teoreme, oganičenje ćemo zapisati kao $\bar{g}(x) = -g(x) \leq 0$.

   KKT uslovi su sledeći:

   1) $M^* \geq 0$
   2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\,\bar{g}(X^*) = 0$
   3) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0$
   4) $h(X^*) = 0$
   5) $\bar{g}(X^*) \leq 0$



   Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = x_2 - (x_1 - 2)^3 + 3 - \mu(x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -3(x_1 - 2)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -x_2 + 1$$

   Proveravamo uslove KKT teoreme:

   1) $M = [\mu] \geq 0$
   2) $Df(X^*) = \begin{bmatrix} -3(x_1 - 2)^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Dh(X^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D\bar{g}(X^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
   3) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\,\bar{g}(X^*) =$

$$\begin{bmatrix} -3(x_1 - 2)^2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$-3(x_1 - 2)^2 = 0 \quad \to \quad x_1 = 2$$

$$1 - \mu = 0 \quad \to \quad \mu = 1$$

   4) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0 \quad \to \quad \mu(x_2 - 1) = 0 \quad \to \quad x_2 = 1$

   Tačka $X^* = [2,1]^T$ je rešenje zadatog sistema.

   Da li je tačka X^* regurlarna ($h(X^*) = 0,\ g(X^*) = 0$ vektori ∇h_i i ∇g_j su linearno nezavisni) ? Jeste!

b) NUDR uslovi:

Neka je regularna tačka X^* lokalni minimum funkcije f pri uslovima $h(X) = 0, g(X) \leq 0$, gde je $h: R^n \to R^m$, $m \leq n$ i $g: R^n \to R^k$. Pretpostavimo da su funkcije f, g i h dva puta neprekidno diferencijabilne na R^n, odnosno $f, g, h \in C^2(R^n)$. Pod navedenim pretpostavkama, postoje vektori $\lambda^* \in R^m, M^* \in R^k$, takvi da važi:

1) $M^* \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) - (M^*)^T D\,\bar{g}(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0$
4) Za svako $Y \in T(X^*)$ važi

$$Y^T L(X^*, \lambda^*, M^*) Y \geq 0.$$

Odredimo tangentni prostor:

$$T(X^*) = \{y \in R^n | Dh(X^*)^T Y = 0, D\bar{g}(X^*)^T Y = 0, j \in J(X^*)\}$$

$$D\bar{g}(X^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J(X^*) = \{j \middle| g_j(X^*) = 0\} = \{1\}$$

$$T(X^*) = \{Y \in R^n | [0 \quad -1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\} = \{(a, 0) | a \in R^n\}$$

$$L(X^*, \lambda^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} -6(x_1 - 2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^T L(X^*, \lambda^*, M^*) Y = [a \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \geq 0$$

c) DUDR uslovi: stroga nejendankost!

DUDR uslovi nisu ispunjeni.

3. Data je funkcija $f: R^2 \to R$, definisana sa $f(X) = x_2$, $X = [x_1, x_2]^T$.
Posmatrajmo problem

$$\min f(X)$$

pri uslovu

$$x_2 + (x_1 - 1)^2 - 3 \geq 0$$

a) Napisati KKT uslove za dati problem i odrediti sve tačke koje zadovoljavaju KKT uslove.
b) Za svaku od nađenih tačaka odrediti $T(X)$ i $\bar{T}(X)$.
c) Među tačkama određenim u delu pod a) odrediti one koje zadovoljavaju dovoljne uslove drugog reda.

Rešenje:

a) $g(x) = x_2 + (x_1 - 1)^2 - 3.$
KKT uslovi su sledeći:
1) $M^* \geq 0 \;\; \to \;\; \mu \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) - (M^*)^T D\, g(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T g(X^*) = 0$
4) $h(X^*) = 0$
5) $g(X^*) \leq 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = x_2 - \mu(x_2 + (x_1 - 1)^2 - 3)$$

$$Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) - (M^*)^T D\, g(X^*) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$2\mu(x_1 - 1) = 0 \to \;\; x_1 = 1 \text{ ili } \;\mu = 0$$

$$1 - \mu = 0 \to \;\; \mu = 1$$

$$\mu(x_2 + (x_1 - 1)^2 - 3) = 0 \to \;\; \mu = 0 \text{ ili } \; x_2 + (x_1 - 1)^2 - 3 = 0$$

Slučaj $\mu = 0$ nije saglasan sa uslovom $1 - \mu = 0$. Dakle, $x_1 = 1$.
Zamenom vrednosti promenljive x_1 u 3) dobija se da je $x_2 + (1 - 1)^2 - 3 = 0 \to \;\; x_2 = 3$, odnosno $X^* = [1,3]^T, \mu = 1$.

$$J(X^*) = \{j \,|\, g_j(X^*) = 0\} = \{1\}$$

$$T(X^*) = \{Y \in R^n | Dg^T Y = 0\} = \{Y \in R^n | [2(1-1) \quad 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\}$$

$$= \{Y \in R^n | [0 \quad 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\}$$

$$= \{Y \in R^n | y_2 = 0, y_1 = a\}$$

$$= \{(a, 0) | a \in R^n\}$$

$$\bar{T}(X^*) = \{Y \in R^n | Dg_i^T(X^*)Y = 0, Dh^T(X^*)Y = 0, i \in J(X^*)\} =$$

$$\dots$$

$$= \{(a, 0) | a \in R^n\}$$

$$L(X^*, \lambda^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^T L(X^*, \lambda^*, M^*) Y = [a \quad 0] \begin{bmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = -2\mu a^2 < 0$$

Nisu ispunjeni dovoljni uslovi drugog reda.

4. Neka je $X^* = [x_1^*, x_2^*]^T$ rešenje problema

$$\min(x_1^2 + (x_2 + 1)^2)$$

Pri uslovu $x_2 \geq e^{x_1}$

a) Napisati KKT uslove koje mora zadovoljavati tačka X^* kao rešenje datog problema

b) Pokazati da za tačku X^* važi $-2 < x_1^* < 0, x_2^* = e^{x_1^*}$.

Rešenje:

$g(X) = e^{x_1} - x_2 \leq 0$

KKT uslovi su sledeći:

1) $M^* \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; \mu \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\, g(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T g(X^*) = 0$
4) $h(X^*) = 0$
5) $g(X^*) \leq 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + \mu(e^{x_1} - x_2)$$

$$Dg = \begin{bmatrix} e^{x_1} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \mu e^{x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2 - \mu = 0$$

$$\mu(e^{x_1} - x_2) = 0 \rightarrow \quad \mu = 0 \;\text{ ili }\; e^{x_1} - x_2 = 0$$

Slučaj $\mu = 0$ implicira da je $x_2 = -1, x_1 = 0$.

Dakle, kada je $\mu = 0$ dobija se stacionarna tačka $X^* = [0, -1]^T$.

Ukoliko je $\mu \neq 0$, rešenje se dobija na sledeći način:

Zamenom uslova $x_2 = e^{x_1}$ dobija se da je $2e^{x_1} + 2 - \mu = 0$ odnosno $e^{x_1} = \frac{\mu-2}{2}$

$$2x_1 + \mu\left(\frac{\mu-2}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{(2-\mu)\mu}{4}, x_2 = \frac{\mu-2}{2}.$$

Konačno, iz uslova $x_2 = e^{x_1}$ dobija se da je

$$\frac{\mu - 2}{2} = e^{\frac{(2-\mu)\mu}{4}}$$

Rešenje poslednje jednačine je $\mu = 2.9716777 \ldots$

Druga stacionarna tačka je $X^* = [-0.7219 \ldots, 0.4858 \ldots]$

5. Data je funkcija $f: R^2 - R$ definisana sa

$$f(X) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2, X = [x_1, x_2]^T$$

Rešiti problem

$$\min f(X)$$

Pri uslovima

$$2x_1 + x_2 \geq 0$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0$$

Rešenje:

Ograničenja se mogu zapisati kao

$$g_1(X) = -2x_1 - x_2 \leq 0,$$
$$g_2(X) = x_1 - x_2 - 1 \leq 0,$$
$$g_3(X) = -x_1 \leq 0.$$

KKT uslovi su sledeći:

1) $M^* = [\mu_1, \mu_2, \mu_3] \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\, g(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0$
4) $h(X^*) = 0$
5) $g(X^*) \leq 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \mu_1(-2x_1 - x_2) + \mu_2(x_1 - x_2 - 1) + \mu_3(-x_1)$$

i rešavamo sistem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 - 2\mu_1 + \mu_2 - \mu_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \mu_1 - \mu_2$$

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - 1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mu_1(-2x_1 - x_2) + \mu_2(x_1 - x_2 - 1) + \mu_3(-x_1) = 0$$

Rešavamo sistem:

$$x_1 = 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3$$
$$x_2 = \mu_1 + \mu_2$$

Kao jedino rešenje sistema dobija se da je $X^* = [0,0]^T, [\mu_1, \mu_2, \mu_3] = 0$.
Dobijeno rešenje predstavlja strogi lokalni minimum (funkcija je konveksna).

LINGO:

```
min = 1/2*x1^2+x2^2;
2*x1+x2>=0;
x1-x2<=1;
x1>=0;
```

```
REŠENJE U LINGO PROGRAMU:
Global optimal solution found.
```

```
Objective value:                0.000000

Infeasibilities:                0.000000
Model is convex quadratic
Model Class:                       QP

Variable     Value    Reduced Cost
       X1   0.000000    0.000000
       X2   0.000000    0.000000
```

6. Data je funkcija $f: R^2 - R$ definisana sa

$$f(X) = -x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2, \quad X = [x_1, x_2]^T$$

Rešiti problem

$$\min f(X)$$

Pri uslovima

$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0$$

Rešenje:
Ograničenja se mogu zapisati kao

$$g_1(X) = -2x_1 - x_2 - 2 \leq 0,$$
$$g_2(X) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0,$$
$$g_3(X) = -x_1 \leq 0.$$

KKT uslovi su sledeći:

1) $M^* = [\mu_1, \mu_2, \mu_3] \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\, g(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0$
4) $h(X^*) = 0$
5) $g(X^*) \leq 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = -x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + \mu_1(-2x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(x_1 + x_2 - 4) + \mu_3(-x_1)$$

i rešavamo sistem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 - x_2 - 2\mu_1 + \mu_2 - \mu_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2 - \mu_1 + \mu_2$$

$$[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3] \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 4 \\ -x_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mu_1(-2x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(x_1 + x_2 - 4) + \mu_3(-x_1) = 0$$

Razlikujemo slučajeve:

1) $\mu_1 = 0$ ili
2) $-2x_1 - x_2 - 2 = 0$

1) Ako je $\mu_1 = 0$ onda je

$$\begin{matrix} -2x_1 - x_2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + \mu_2 = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad -x_1 - 3x_2 - \mu_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \mu_3 = -x_1 - 3x_2 \\ \mu_2 = x_1 - 2x_2 \end{matrix}$$

Razlikujemo slučajeve

1.1) $\mu_2 = 0$

1.2) $x_1 + x_2 - 4 = 0$

Rešavamo slučajeve

1.1) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$:

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$$x_1 - 2x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2x_2 \quad \rightarrow \quad \mu_3 = -5x_2$$

Razlikujemo podslučajeve

1.1.1) $\mu_3 = 0$

1.1.2) $-x_1 = 0$

Rešavamo:

1.1.1) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$: dobija se da je $x_2 = 0, x_1 = 0$

Dobija se stacionarna tačka $X^* = [0,0]^T, \mu = [0,0,0]^T$

1.1.2) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, -x_1 = 0$: dobija se da je $x_1 = 0, x_2 = 0, \mu_3 = 0$

Dobija se stacionarna tačka $X^* = [0,0]^T, \mu = [0,0,0]^T$

1.2) $\mu_1 = 0\,, x_1 + x_2 - 4 = 0$

Razlikujemo podslučajeve

1.2.1) $\mu_3 = 0$

1.2.2) $-x_1 = 0$

Rešavamo slučajeve:

1.2.1) $\mu_1 = 0\,, x_1 + x_2 - 4 = 0, \quad \mu_3 = 0$

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$x_1 = -3x_2 \ \rightarrow \ -2x_2 - 4 = 0 \ \rightarrow \ x_2 = -2, \ x_1 = 6, \ \mu_2 = 10$

Dobija se stacionarna tačka $X^* = [6,-2]^T, \mu = [0,10,0]^T$

1.2.2) $\mu_1 = 0, x_1 + x_2 - 4 = 0, \ -x_1 = 0$

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$x_2 = 4 \ \rightarrow \ \mu_3 = -12 < 0$!

Nije dopustivo rešenje.

2) Ako je $-2x_1 - x_2 - 2 = 0$ onda je $x_2 = -2x_1 - 2$

$$\begin{array}{c} -2x_1 + 2x_1 + 2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_1 - 4 + \mu_2 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ -5x_1 - 4 + \mu_2 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mu_3 = \mu_2 + 2 = -2x_1 \\ \mu_2 = \ 5x_1 + 4 \end{array}$$

Razlikujemo slučajeve

2.1) $\mu_2 = 0$

2.2) $x_1 + x_2 - 4 = 0$

Rešavamo slučajeve

2.1) $\mu_3 = -2x_1, \mu_2 = \ 5x_1 + 4, \mu_2 = 0$:

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$$5x_1 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{5}, \ \mu_3 = \frac{8}{5}$$

Ovaj slučaj nije dopustiv: $\mu_3(-x_1) \neq 0$!

2.2) $\mu_3 = -2x_1, \mu_2 = \ 5x_1 + 4, x_1 + x_2 - 4 = 0$

Razlikujemo podslučajeve

2.2.1) $\mu_3 = 0$

2.2.2) $-x_1 = 0$

Rešavamo slučajeve:

2.2.1) $\mu_3 = -2x_1, \ \mu_2 = \ 5x_1 + 4, \quad x_1 + x_2 - 4 = 0, \quad \mu_3 = 0$

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$x_1 = 0 \ \rightarrow \ \mu_2 = 4 \ \rightarrow \ x_2 = 4$

Dobija se stacionarna tačka $X^* = [0,4]^T, \mu = [\mu_1, 4,0]^T$

2.2.2) $\mu_3 = -2x_1, \ \mu_2 = \ 5x_1 + 4, \quad x_1 + x_2 - 4 = 0, \ \ - x_1 = 0$

Zamenimo u izraze za μ_2 i μ_3:

$\mu_3 = 0, \ \mu_2 = 4, \ x_2 = 4$.

Dobija se stacionarna tačka $X^* = [0,4]^T, \mu = [\mu_1, 4,0]^T$

Ostalo je da se odredi koja od navedenih tačaka zadovoljava uslove.

```
LINGO KOD:
min = -X1^2+X2^2-X1*X2;
2*X1-X2>=2;
X1+X2<=4;
x1>=0;
```

LINGO REŠENJE

```
Objective value:          1.000000
               X1         1.000039
               X2         0.7747829E-04
```

7. Data je funkcija $f: R^2 - R$ definisana sa

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2, \quad X = [x_1, x_2]^T$$

Rešiti problem

$$\min f(X)$$

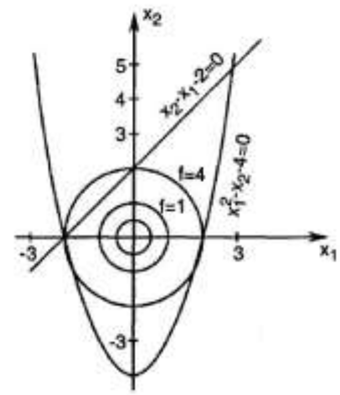
Pri uslovima

$$x_1^2 - x_2 - 4 \leq 0$$
$$x_2 - x_1 - 2 \leq 4$$

Rešenje:

Ograničenja se mogu zapisati kao

$$g_1(X) = x_1^2 - x_2 - 4 \leq 0,$$
$$g_2(X) = x_2 - x_1 - 2 \leq 0,$$



KKT uslovi su sledeći:

1) $M^* = [\mu_1, \mu_2] \geq 0$
2) $Df(X^*) + (\lambda^*)^T Dh(X^*) + (M^*)^T D\, g(X^*) = 0$
3) $(M^*)^T \bar{g}(X^*) = 0$
4) $h(X^*) = 0$
5) $g(X^*) \leq 0$

Formiramo Lagranžovu funkciju

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \mu_1(x_1^2 - x_2 - 4) + \mu_2(x_2 - x_1 - 2)$$

i rešavamo sistem:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_1\mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$[\mu_1 \quad \mu_2]\begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 - 4 \\ x_2 - x_1 - 2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_1(x_1^2 - x_2 - 4) + \mu_2(x_2 - x_1 - 2) = 0$$

Razlikujemo slučajeve:

1) $\mu_1 = 0$

$$2x_1 - \mu_2 = 0, 2x_2 + \mu_2 = 0 \rightarrow \ \mu_2 = 2x_1 = -2x_2$$

Zamenimo u uslov 3) dobiće se $\mu_2\left(-\frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{2}\mu_2 - 2\right) = 0 \rightarrow \ \mu_2(-\mu_2 - 2) = 0 \rightarrow \mu_2 = 0$

Slučaj $\mu_2 = -2$ odbacujemo zbog uslova 1). Jedno rešenje problema je $X^* = [0,0]^T, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$

2) $x_1^2 - x_2 - 4 = 0$

$$x_2 = x_1^2 - 4$$

Zamenom u uslov 3) dobija se da je

$$\mu_2(x_1^2 - x_1 - 6) = 0$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$x_1 = 3, x_1 = -2 \text{ i } \mu_2 = 0$$

Ako je $x_1 = 3$ tada se dobija da su $6 + 6\mu_1 - \mu_2 = 0$, $x_2 = 5$ i $10 - \mu_1 + \mu_2 = 0$.

Rešavanjem sistema dobija se da je $\mu_1 = -\frac{16}{5}, \mu_2 = -\frac{66}{5}$ što je nemoguće zbog uslova 1).

Ako je $x_1 = -2$ tada se dobija da je $-4 - 4\mu_1 - \mu_2 = 0, x_2 = 0, -\mu_1 + \mu_2 = 0$

Rešavanjem sistema dobija se da je $\mu_1 = \mu_2$ i $\mu_1 = -\frac{4}{5}$ što je ponovo nemoguće.

Ako je $\mu_2 = 0$ sledi da je $2x_1(1 + \mu_1) = 0, 2x_2 - \mu_1 = 0$. Rešavanjem poslednjeg sistema dobija se da je $x_1 = 0, x_2 = -4,\ -8 - \mu_1 = 0,$ pdnosno $\mu_1 < 0$ što je ponovo nemoguće.

Dakle, jedina potencijalna stacionarna tačka je $X^* = [0,0]^T$.

8. Data je funkcija $f: R^2 - R$ definisana sa

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2, \quad X = [x_1, x_2]^T$$

Rešiti problem

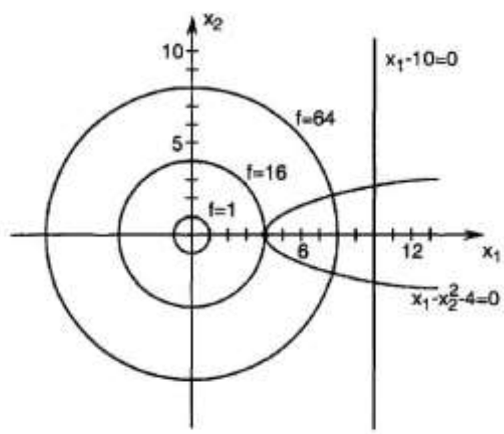
$$\min f(X)$$

Pri uslovima

$$x_1 \ - x_2^2 - 4 \geq 0$$
$$x_2 - 10 \leq 0$$

Rešenje:
Ograničenja se mogu zapisati kao

$$g_1(X) = -x_1 \ + x_2^2 + 4 \leq 0,$$
$$g_2(X) = x_2 - 10 \leq 0,$$



9. Data je funkcija $f: R^2 - R$ definisana sa

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2, \quad X = [x_1, x_2]^T$$

Rešiti problem

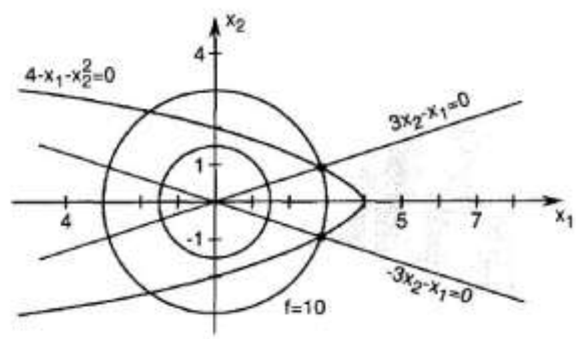
$$\min f(X)$$

Pri uslovima

$$4 - x_1 - x_2^2 \leq 0$$
$$3x_2 - x_1 \leq 0$$
$$-3x_2 - x_1 \leq 0$$

Rešenje:

$$g_1(X) = x_1^2 - x_2 - 4 \leq 0,$$
$$g_2(X) = x_2 - x_1 - 2 \leq 0,$$

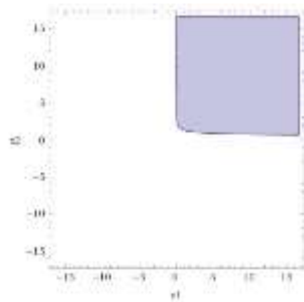


10. Za sledeće funkcije odrediti potencijalne tačke minimuma/maksimuma pri zadatim uslovima. Proveriti da li za nađene tačke važe dovoljni uslovi za minimum/maksimum.

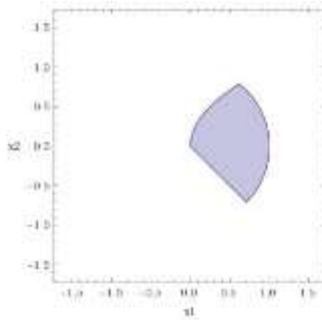
Rešenje:

a) $f(X) = x_1 + x_2$ pri uslovu $\ln(x_1) + 4\ln(x_2) \geq 1$

Na slici je prikazan dopustiv skup.



b) $f(X) = x_2$ pri uslovima $x_1^2 + x_2^2 \leq 1, -x_1 + x_2^2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0$



c) $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2$ pri uslovima $x_1^3 + x_2^3 \leq 1, x_1^2 + x_2^2 \geq 1$

Na slici je prikazan prvi uslov.