

LOKALIZACIJA REŠENJA

Rešavamo problem $f(x)=0$ gde je f data funkcija. Funkcija f je, naravno, definisana na nekom konačnom ili beskonačnom Intervalu $D = \{x \mid a < x < b\}$.

Skup D nazivamo oblast dopustivih vrednosti posmatrane funkcije.

Rešenje x^* iz skupa D je ona vrednost x^* za koju je $f(x^*)=0$.

Lokalizacija rešenja je postupak nalaženja što uže oblasti $[a,b]$ na kojoj je funkcija f definisana i u kojoj se nalazi x^* .

Proces nalaženja rešenja jednačine $f(x)=0$ je sledeći:

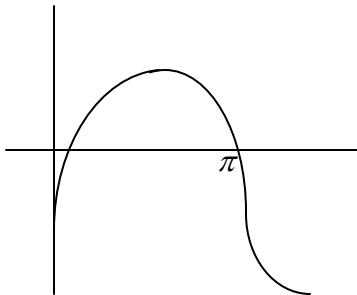
Odredimo znakove funkcije $f(x)$ na krajevima oblasti dopustivih vrednosti, kao i u nizu tačaka $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ iz skupa D :

$f(a), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k), \dots, f(b)$ a zatim proveravamo za koje vr. važi: $f(a_k) f(a_{k+1}) < 0$

Niz tačaka $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ se bira na osnovu osobina funkcije (monotonost, konveksnost...)

Ukoliko se pokaže da je za neko $k, k+1$ ovo ispunjeno, onda brojeve a_k, a_{k+1} uzimamo za krajeve intervala i smatramo da se naše rešenje x^* nalazi negde u tom intervalu.

Primer: Lokalizovati rešenje zadatka $y = 2 \sin(x) - 0.5$



Iz grafika vidimo da se traženo x^* nalazi negde između $0, \frac{\pi}{2}$ ali to je jako gruba ocena..
Zato ćemo oblast na kojoj posmatramo funkciju f pokušati da smanjimo koliko god možemo.

METODA POLOVLJENJA ODSEČKA

Zadatak: Rešiti jednačinu $f(x)=0$.

Neka je lokalizovano rešenje x^* iz intervala (a,b) .

Posmatramo sledeća dva podintervala: $I \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$
 $II \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$

Ukoliko je $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, a najčešće to nije slučaj, traženo rešenje je $x^* = \frac{a+b}{2}$

U suprotnom (češći slučaj) je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ ili $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. U takvim situacijama posmatramo intervale I i II i na tako definisanim intervalima ponavljamo postupak.

Dakle, polovimo interval I i proveravamo da li je polovina intervala traženo rešenje. Ukoliko jeste, rešenje je nađeno, u suprotnom ponavljamo postupak sada na tim manjim intervalima:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{a+b}{2}, x^* = a_1$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0; f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \Rightarrow a_2 = \frac{3a+b}{4}, f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{ponavljamo postupak}$$

$$III \left(a, \frac{3a+b}{4}\right)$$

$$IV \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}\right)$$

$$V \left(\frac{a+3b}{4}, b\right)$$

$$VI \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0; f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b) < 0 \Rightarrow b_2 = \frac{a+3b}{4}, f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{ponavljamo postupak}$$

Ponavljanjem ovog postupka sužavamo interval na kome tražimo nulu funkcije. U nekom trenutku leva i desna granica intervala će se poklopiti a to će biti traženo rešenje x^* .

Obradićemo ovaj problem na konkretnom zadatku:

Zadatak br1: Naći nulu funkcije $f(x) = 2 \sin(x) - 0.5$ na intervalu: $0, \frac{\pi}{2}$

Prvo, proveravamo vrednosti funkcije u krajevima intervala:

$$f(0) = -0.5$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.5$$

Kako nismo dobili traženo rešenje u krajevima intervala, polovimo taj interval i ponovimo postupak na novim intervalima

$$f(0) = -0.5, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.5 \Rightarrow \begin{array}{l} f(0)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow a_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.9142 \Rightarrow \begin{array}{l} f(0)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{\pi}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.2654 \Rightarrow \begin{array}{l} f(0)f\left(\frac{\pi}{8}\right) < 0 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow a_3 = \frac{\pi}{16}$$

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = -0.1098 \Rightarrow \begin{array}{l} f(0)f\left(\frac{\pi}{16}\right) > 0 \\ f\left(\frac{\pi}{16}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow a_4 = \frac{3\pi}{32}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{32}\right) = 0.0806 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{16}\right)f\left(\frac{3\pi}{32}\right) < 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{32}\right)f\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{32}\right) \Rightarrow a_5 = \frac{5\pi}{64}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{64}\right) = -0.0140 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{16}\right)f\left(\frac{5\pi}{64}\right) > 0 \\ f\left(\frac{5\pi}{64}\right)f\left(\frac{3\pi}{32}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{5\pi}{64}, \frac{3\pi}{32}\right) \Rightarrow a_6 = \frac{11\pi}{128}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{128}\right) = 0.0334 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{5\pi}{64}\right)f\left(\frac{11\pi}{128}\right) < 0 \\ f\left(\frac{11\pi}{128}\right)f\left(\frac{3\pi}{32}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{5\pi}{64}, \frac{11\pi}{128}\right) \Rightarrow a_7 = \frac{21\pi}{256}$$

$$f\left(\frac{21\pi}{256}\right) = 0.0097 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{5\pi}{64}\right)f\left(\frac{21\pi}{256}\right) < 0 \\ f\left(\frac{21\pi}{256}\right)f\left(\frac{11\pi}{128}\right) > 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{5\pi}{64}, \frac{21\pi}{256}\right) \Rightarrow a_8 = \frac{41\pi}{512}$$

$$f\left(\frac{41\pi}{512}\right) = -0.0021 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{5\pi}{64}\right)f\left(\frac{41\pi}{512}\right) > 0 \\ f\left(\frac{41\pi}{512}\right)f\left(\frac{21\pi}{256}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{21\pi}{256}, \frac{41\pi}{512}\right) \Rightarrow a_9 = \frac{83\pi}{1024}$$

$$f\left(\frac{83\pi}{1024}\right) = 0.0038 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{21\pi}{256}\right)f\left(\frac{83\pi}{1024}\right) > 0 \\ f\left(\frac{83\pi}{1024}\right)f\left(\frac{41\pi}{512}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{83\pi}{1024}, \frac{41\pi}{512}\right) \Rightarrow a_9 = \frac{165\pi}{2048}$$

$$f\left(\frac{165\pi}{2048}\right) = 0.0008 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{83\pi}{1024}\right)f\left(\frac{165\pi}{2048}\right) > 0 \\ f\left(\frac{165\pi}{2048}\right)f\left(\frac{41\pi}{512}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{165\pi}{2048}, \frac{41\pi}{512}\right) \Rightarrow a_{10} = \frac{329\pi}{4096}$$

$$f\left(\frac{329\pi}{4096}\right) = 0.0026 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{165\pi}{2048}\right)f\left(\frac{329\pi}{4096}\right) > 0 \\ f\left(\frac{329\pi}{4096}\right)f\left(\frac{41\pi}{512}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{329\pi}{4096}, \frac{41\pi}{512}\right) \Rightarrow a_{11} = \frac{657\pi}{8192}$$

$$f\left(\frac{657\pi}{8192}\right) = -0.0014 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{329\pi}{4096}\right)f\left(\frac{657\pi}{8192}\right) < 0 \\ f\left(\frac{657\pi}{8192}\right)f\left(\frac{41\pi}{512}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{657\pi}{8192}, \frac{329\pi}{4096}\right) \Rightarrow a_{12} = \frac{1315\pi}{16384}$$

$$f\left(\frac{1315\pi}{16384}\right) = -0.0010 \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{657\pi}{8192}\right)f\left(\frac{1315\pi}{16384}\right) > 0 \\ f\left(\frac{1315\pi}{16384}\right)f\left(\frac{329\pi}{4096}\right) < 0 \end{array} \Rightarrow x^* \in \left(\frac{1315\pi}{16384}, \frac{329\pi}{4096}\right) \Rightarrow a_{13} = \frac{2631\pi}{32768}$$

$$f\left(\frac{2631\pi}{32768}\right) = 0$$

Dakle, tražena nula funkcije je $x^* = \frac{2631\pi}{32768} = 0.2522$