ČOLESKI DEKOMPOZICIJA (METODA KVADRATNIH KORENA)

Čoleski metoda se koristi za za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina sa simetričnom matricom sistema.

Simetričnu matricu možemo da predstavimo kao proizvod dve međusobno transponovane matrice, tj. $A = T * T'$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ & & & \\ 0 & 0 & & t_{nn} \end{bmatrix}, T' = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & & 0 \\ t_{21} & t_{22} & & 0 \\ & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Formule za dobijanje matrice T, odnosno T' su sledeće:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, j > 1;$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, 1 < i \le n$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, i < j$$

$$t_{ij} = 0, i > j$$

Polazni sistem jednačina ima rešenje ako je $t_{ii} \neq 0$

Zatim rešavamo sistem $T' \overline{y} = \overline{b}$

Rešenje je:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}, i > 1$$

Zatim rešavamo sistem:

$$T \overline{x} = \overline{y}$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ki} x_k}{t_{ii}}$$

METODA PROSTE ITERACIJE

Rešavamo sistem Ax = b. Postupak rešavanja sistema Iterativnim metodama se suštinski razlikuje od ostalih algoritama. Ideja je da se formira rekurentni niz koji će konvergirati ka tačnom rešenju. Odnosno:

proizvoljno uzimamo početni vektor $\overline{x}^{(0)}$ koji predstavlja približno rešenje ili aproksimaciju sistema a zatim, koristeći rekurentnu formulu, $\overline{x}^{(k+1)} = F_k(\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(1)}, ..., \overline{x}^{(k)}), k = 0,1,2,...$

gde je F_k funkcija koji zavisi od matrice A
i od vektora b polaznog sistema dobijamo niz približnih rešenja $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, ..., \overline{x}^{(k)}, ...$

METODA PROSTE ITERACIJE ili **METODA ITERACIJE** je najjednostavniji oblik iterativne metode.

Početni sistem zapisujemo u ekvivalentnom obliku $\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}$
gde su

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{bmatrix}, \overline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ c_n \end{bmatrix}, \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

Neka je, na primer, određeno početno rešenje, početna iteracija: $\overline{x}^{(0)} = (\overline{x_1}^{(0)}, \overline{x_2}^{(0)}, ..., \overline{x_n}^{(0)})^T$

Koristeči rekurentnu formulu: $\overline{x}^{(k+1)} = B\overline{x}^{(k)} + \overline{c}, k = 0,1,2,...$
dobićemo niz rešenja $\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(1)}, ..., \overline{x}^{(k)}, \overline{x}^{(k+1)}, ...$

koji konvergira ka rešenju $\overline{x}^{*}$

Da bi odredili kriterijum konvergencije potrebno je da važi bar jedan od uslova konvergencije. Metoda proste iteracije, kao i Gaus-Zajdelova metoda konvergiraju ako važi sledeće:.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} < |a_{jj}|, \forall j \qquad \text{ili} \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} < |a_{ii}|, \forall i$$

Zadatak br1. Rešiti sistem:
$$\begin{aligned} 1.02x_1 \quad -0.05x_2 \quad -0.10x_3 &= 0.795 \\ -0.11x_1 \quad +1.03x_2 \quad -0.05x_3 &= 0.849 \\ -0.11x_1 \quad -0.12x_2 \quad +1.04x_3 &= 1.398 \end{aligned}$$

Prvo proverimo da li je sistem dijagonalno dominantan (da li će naša metoda konvergirati), odnosno da li su elementi na glavnoj dijagonali po apsolutnoj vrednosti veći od sume apsolutnih vrednosti elemenata van dijagonale, a nalaze se u istoj koloni/vrsti..

Ovde su ti uslovi ispunjeni tako da možemo da napravimo neku rekurentnu formulu.

$$x_1 = \frac{1}{1.02}\left[0.05x_2 + 0.10x_3 + 0.795\right]$$
$$x_2 = \frac{1}{1.03}\left[0.11x_1 + 0.05x_3 + 0.849\right]$$
$$x_3 = \frac{1}{1.04}\left[0.11x_1 + 0.12x_2 + 1.398\right]$$

Potrebno je da izaberemo početni vektor.

Početni vektor se proizvoljno bira i u zavisnosti od njegovog izbora možemo brže (manji broj iteracija) ili sporije doći do traženog rešenja.

Praksa je da se za slobodni član uzima za početni vektor, odnosno:

$$x_1^{(0)} = \frac{0.795}{1.02} = 0.7794$$
$$x_2^{(0)} = \frac{0.849}{1.03} = 0.8243$$
$$x_3^{(0)} = \frac{1.398}{1.04} = 1.3442$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{1.02}\left[0.05*0.8243 + 0.10*1.3442 + 0.795\right] = 0.9516$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{1.03}\left[0.11*0.7794 + 0.05*1.3442 + 0.849\right] = 0.9728$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{1.04}\left[0.11*0.7794 + 0.12*0.8243 + 1.398\right] = 1.5218$$

Radi lakše preglednosti, sistem rešavamo tablično:

br iteracija	X1	X2	X3
0	0.7794	0.8243	1.3442
1	0.9516	0.9728	1.5218
2	0.9763	0.9998	1.5571
3	0.9811	1.0041	1.5629
4	0.9819	1.0049	1.5639
5	0.9820	1.0050	1.5640
6	0.9820	1.0051	1.5641
7	0.9820	1.0051	1.5641

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{1.02}\left[0.05*0.9728+0.10*1.5218+0.795\right]=0.9763$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{1.03}\left[0.11*0.9516+0.05*1.5218+0.849\right]=0.9998$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{1.04}\left[0.11*0.9516+0.12*0.9728+1.398\right]=1.5571$$

Primetićemo da posle 3. iteracije dobijamo slične rezultate za vektor X
Kako su $x^{(6)} = x^{(7)}$ tu ćemo stati i poslednje rešenje uzeti za traženo rešenje.

Poređenja radi, ponovićemo postupak i rešiti ovaj zadatak sa drugačije izabranim početnim vrednostima:

br	X1	X2	X3
0	0.7950	0.8420	1.3980
1	0.9577	0.9770	1.5255
2	0.9769	1.0006	1.5583
3	0.9812	1.0042	1.5630
4	0.9819	1.0049	1.5639
5	0.9820	1.0050	1.5640
6	0.9820	1.0051	1.5641
7	0.9820	1.0051	1.5641

br	X1	X2	X3
0	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.9265	0.9796	1.5654
2	0.9809	0.9992	1.5553
3	0.9809	1.0045	1.5633
4	0.9819	1.0049	1.5639
5	0.9820	1.0051	1.5640
6	0.9820	1.0051	1.5641
7	0.9820	1.0051	1.5641

br	X1	X2	X3
0	-1.0000	-1.0000	-1.0000
1	0.6324	0.6689	1.1231
2	0.9223	0.9463	1.4883
3	0.9717	0.9950	1.5510
4	0.9802	1.0033	1.5618
5	0.9817	1.0048	1.5637
6	0.9820	1.0050	1.5640
7	0.9820	1.0051	1.5641
8	0.9820	1.0051	1.5641

GAUS-ZAJDELOVA METODA

Gaus-Zajdelova predstavlja modifikaciju Metode proste iteracije.
Naime, postoji samo jedna mala izmena pri korišćenju rekurentne formule.

Dakle, rešavamo sistem: $\overline{x} = B\overline{x} + \overline{c}$

Rekurentna formula je: $\overline{x}_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + c_i$

Početni vektor biramo proizvoljno (kao kod Metode proste iteracije).
Rešićemo zadatak br1 i Gaus-Zajdelovom metodom.

Koristimo isti početni vektor:

$$x_1^{(0)} = \frac{0.795}{1.02} = 0.7794$$

$$x_2^{(0)} = \frac{0.849}{1.03} = 0.8243$$

$$x_3^{(0)} = \frac{1.398}{1.04} = 1.3442$$

Rekurentna formula je sledećeg oblika:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{1.02}\left[0.05x_2^{(k-1)} + 0.10x_3^{(k-1)} + 0.795\right]$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{1.03}\left[0.11x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k-1)} + 0.849\right]$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{1.04}\left[0.11x_1^{(k)} + 0.12x_2^{(k)} + 1.398\right], k = 1, 2, ...$$

br iteracija	X1	X2	X3
0	0.7794	0.8243	1.3442
1	0.9516	0.9912	1.5592
2	0.9809	1.0047	1.5639
3	0.9820	1.0051	1.5641
4	0.9820	1.0051	1.5641

Gaus-Zajdelova metoda brže konvergira od metode proste iteracije !!!

OCENA GREŠKE

Ocena greške za Metodu proste iteracije i Gaus-Zajdelovu metodu je ista:

$$\left\| x^* - x^{(k)} \right\| \le \frac{\left\| B \right\|^k}{1 - \left\| B \right\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$$

Gde je x^* tačno rešenje zadatka.

||B|| predstavlja normu matrice B definisanu na sledeći način: $\left\| B \right\| = \sup_{\left\| x \right\| \le 1} \left\| Bx \right\|$

$$\left\| B \right\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | b_{ij} | \le q_1 < 1$$

$$\left\| B \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} | b_{ij} | \le q_2 < 1$$

Zadatak br2. Rešiti sistem Gaus-Zajdelovom metodom

$$\begin{array}{llll} 8.3x_1 & +7.7x_2 & -0.3x_3 & = 27.10 \quad (1) \\ 6.1x_1 & +2.2x_2 & +1.2x_3 & = 16.55 \quad (2) \\ 3.4x_1 & +4.0x_2 & +5.7x_3 & = 27.35 \quad (3) \end{array}$$

Potebno je da primetimo da sistem nije dijagonalno dominantan. Zato ćemo izvršiti par trasnformacija na sistemu kako bi dobili dijagonalno dominantnu matricu.

Prvu jednačinu ćemo zameniti sa drugom, a zatim od “nove” druge jednačine oduzeti “novu” prvu jednačinu i tako oduzeti od poslednje...

$$(1)' = (2)$$
$$(2)' = (1) - (2)$$
$$(3)' = (3) - (2)'$$

$$\begin{aligned}6.1x_1 &+2.2x_2 &+1.2x_3 &=16.55\\ 2.2x_1 &+5.5x_2 &-1.5x_3 &=10.55\\ 1.2x_1 &-1.5x_2 &+7.2x_3 &=16.80\end{aligned}$$

Ovo je sada dijagonalno-dominantan sistem, i možemo primeniti Iterativne metode.

$$x_1^{(k)}=\frac{1}{6.1}\left[-2.2x_2^{(k-1)}-1.2x_3^{(k-1)}+16.55\right]$$

$$x_2^{(k)}=\frac{1}{5.5}\left[-2.2x_1^{(k)}+1.5x_3^{(k-1)}+10.55\right]$$

$$x_3^{(k)}=\frac{1}{7.2}\left[-1.2x_1^{(k)}+1.5x_2^{(k)}+16.80\right], k=1,2,...$$

Početni vektor biramo proizvoljno, a zatim sistem rešavamo tablično radi bolje preglednosti.

$$x_1^{(0)}=\frac{16.55}{6.1}$$

$$x_2^{(0)}=\frac{10.55}{5.5}$$

$$x_3^{(0)}=\frac{16.80}{7.2}$$

br iteracija	X1	X2	X3
0	2.7131	1.9182	2.3333
1	1.5623	1.9296	2.4750
2	1.5303	1.9810	2.4910
3	1.5086	1.9941	2.4973
4	1.5027	1.9982	2.4992
5	1.5008	1.9995	2.4998
6	1.5002	1.9998	2.4999
7	1.5001	1.9999	2.5000
8	1.5000	2.0000	2.5000
9	1.5000	2.0000	2.5000

Tačno rešenje smo dobili nakon 8 koraka.

Šta određuje brzinu konvergencije?

U koliko iterativnih koraka ćemo dobiti tačno rešenje zavisi od toga koliko su elementi na dijagonali dominantni! Ukoliko su elementi na dijagonali izrazito dominantni, konvergencija će biti brža.

U ovom primeru konvergencija je SPORA!

Zadatak br3. Pripremiti matrično zadat sistem za Gaus-Zajdelovu metodu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

NAPOMENA: Gaus-Zajdelova metoda konvergira i ukoliko je matrica A <u>normalna</u> (još jedan uslov konvergencije).
Matrica A je normalna ako je komutira sa svojom transponovaom matricom

$$A^T A = AA^T$$

$$A^T Ax = A^T b$$

Naša matrica A jeste normalna, $A^T A = AA^T$

$$\begin{bmatrix} 21 & 13 & 16 \\ 13 & 14 & 13 \\ 16 & 13 & 14 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Rešavamo sistem tablično:

br iteracija	X1	X2	X3
0	1.0000	1.0000	1.0000
1	-0.6667	0.7619	1.0544
2	-0.5607	0.6130	1.0716
359	0.9981	1.9977	-1.9957
360	0.9982	1.9977	-1.9958
361	0.9982	1.9977	-1.9958

Ovaj sistem jaaaaako sporo konvergira.
Ovo je primer kada ne treba koristiti Iterativnu metodu.

Zadatak br4. Pripremiti sistem za Gaus-Zajdelovu metodu.

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +x_4 & =3 & (1) \\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & =2 & (2) \\ 5x_1 & -3x_2 & +x_3 & -4x_4 & =1 & (3) \\ 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =-4 & (4) \end{array}$$

Postoji više rešenja, jedno je:

$$\begin{aligned} (1)' &= (4) \\ (2)' &= (1) - (2) \\ (3)' &= (2) \\ (4)' &= 2*(1) - (2) + 2*(3) - (4) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & =-4 \\ x_1 & +5x_2 & +x_3 & & =1 \\ x_1 & -2x_2 & -5x_3 & +x_4 & =2 \\ -3x_1 & & & -9x_4 & =10 \end{array}$$

Rešavamo sistem tablično

br iteracija	X1	X2	X3	x4
0	-0.4000	1.0000	2.0000	-3.3333
1	0.2667	-0.2533	-0.9120	-1.2000
2	-0.2005	0.4225	-0.8491	-1.0443
3	-0.3606	0.4419	-0.8577	-0.9909
4	-0.3760	0.4467	-0.8521	-0.9858
5	-0.3774	0.4459	-0.8510	-0.9853
6	-0.3772	0.4456	-0.8508	-0.9854
7	-0.3771	0.4456	-0.8507	-0.9854
8	-0.3771	0.4456	-0.8507	-0.9854