SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Rešavamo sistem jednačina oblika Ax=b gde su:

A – matrica dimenzije nxn

b,x – vektori dimenzije n

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & & a_{2,n} \\ & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistem možemo rešiti koristeći metode za rešavanje sistema linearnih jednačina.
Na vežbama ćemo učiti sledeće metode:

Gausova metoda sa izborom glavnog elementa

LU dekompozicija

Čoleski dekompozicija

Metoda proste iteracije

Zajdelova metoda

GAUSOVA METODA SA IZBOROM GLAVNOG ELEMENTA

Gausova metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina može se koristiti na dva načina:

- bez izbora glavnog elementa
- sa izborom glavnog elementa

Glavni element nazivamo PIVOT. Za pivot se uzima element koji je najveći po apsolutnoj vrednosti u matrici A.
Ovom metodom se polazni sistem Ax=b svodi na njemu ekvivalentan sistem sa gornje trougaonom matricom,
Odnosno na sistem Ux=c gde su:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,1} & & u_{2,n} \\ & & & \\ 0 & 0 & & u_{n,n} \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

Uglavnom se koristi metoda sa izborom glavnog elementa. Usled loše uslovljenosti matrice Gausova metoda bez izbora glavnog elementa može da da netačne rezultate.

Transformacije se sastoje u dodavanju izabrane jednačine tekućeg sistema pomnožene odgovarajućim koeficijentima ostalim jednačinama radi anulranja koeficijenata uz jednu promenljivu. Ovim transformacijama se dobijeni sistem direktno rešava:

$$x_n = \frac{c_n}{u_{n,n}}$$

$$x_k = \frac{1}{u_{k,k}}(c_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{k,j} x_j), k = n-1, ..., 1$$

Zadatak br1. Rešiti sistem Gausovom metodom sa izborom glavnog elementa i rešiti Gauosvom metodom bez Izbora glavnog elementa.

$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$$
$$2x_1 + 0.6667x_2 + 0.3333x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Prvo ćemo zadatak rešiti Gausovom metodom sa izborom glavnog elementa.
Za pivot uzimamo prvi element u prvoj koloni, obzirom da je on najveći po apsolutnoj vrednosti..

$l_2 = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$ $l_3 = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}$

$l_1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}$

l(I)	a(I,1)	a(I,2)	a(I,3)	b(i)
*	6.0000	2.0000	2.0000	-2.0000
0.3333	2.0000	0.6667	0.3333	1.0000
0.1667	1.0000	2.0000	-1.0000	0.0000
0.0001		0.0001	-0.3334	1.6667
*		1.6667	-1.3333	0.3333
*			-0.3333	1.6666
			1.0000	-5.0006
		1.0000		-3.8005
	1.0000			2.6004

* Označava glavnu jednačinu

$$a_{2,2} = -l_2 a_{1,2} + a_{2,2}$$
$$a_{3,2} = -l_3 a_{1,2} + a_{3,2}$$
$$a_{2,3} = -l_2 a_{1,3} + a_{2,3}$$
$$a_{3,3} = -l_3 a_{1,3} + a_{3,3}$$

$$a_{3,3} = -l_1 a_{1,3} + a_{3,3}$$

$$-3.8005 = \frac{0.3333 - (-1.3333) * (-5.0006)}{1.6667}$$
$$2.6004 = \frac{-2 - 2 * (-5.0006) - 2 * (-3.8005)}{6}$$

Rešenje zadatka je:

$$x_1 = 2.6004$$
$$x_2 = -3.8005$$
$$x_3 = -5.0006$$

Sada rešavamo zadatak Gausovom metodom bez izbora glavnog elementa. Markiraćemo uvek prvi element u prvoj koloni..

l(I)	a(I,1)	a(I,2)	a(I,3)	b(i)
	6.0000	2.0000	2.0000	-2.0000
0.3333	2.0000	0.6667	0.3333	1.0000
0.1667	1.0000	2.0000	-1.0000	0.0000
*	1.0000	0.3333	0.3333	0.3333
	0.0000	0.0001	-0.3333	1.6667
16667.0000	0.0000	1.6667	-1.3333	0.3333
*		1.0000	-3333.0000	16667.0000
			5555.0000	-2779.0000
*			1.0000	-0.5002

Dobili smo da je:

$$x_1 = -0.1111$$
$$x_2 = -0.1667$$
$$x_3 = -0.5002$$

Međutim, nismo dobili tačan rezultat usled loše uslovljenosti matrice (oduzimamo bliske vrednosti kod a(2,2)..)

Od sada ćemo uvek tražiti pivot.

Zadatak br2. Rešiti sistem Gausovom metodom sa izborom glavnog elementa

$$0.50x_1 + 1.1x_2 + 3.1x_3 = 6.0$$
$$2.0x_1 + 4.5x_2 + 0.36x_3 = 0.020$$
$$5.0x_1 + 0.96x_2 + 6.5x_3 = 0.96$$

Za pivot uzimamo poslednji element u poslednjoj koloni, obzirom da je on najveći..

* Označava glavnu jednačinu

$l_1 = \frac{a_{1,3}}{a_{3,3}}$ $l_2 = \frac{a_{2,3}}{a_{3,3}}$

$l_1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}$

l(I)	a(I,1)	a(I,2)	a(I,3)	b(i)
0.4769	0.5000	1.1000	3.1000	6.0000
0.0554	2.0000	4.5000	0.3600	0.0200
*	5.0000	0.9600	6.5000	0.9600
0.1444	-1.8846	0.6422		5.5422
*	1.7231	4.4468		-0.0332
*	-2.1334			5.5469
	1.0000			-2.6000
		1.0000		1.0000
			1.0000	2.0000

$$a_{1,1} = -l_1 a_{3,1} + a_{1,1}$$
$$a_{1,2} = -l_1 a_{3,2} + a_{1,2}$$
$$a_{2,1} = -l_2 a_{3,2} + a_{2,1}$$
$$a_{2,2} = -l_2 a_{2,3} + a_{2,2}$$
$$a_{3,3} = -l_1 a_{1,3} + a_{3,3}$$

$$a_{1,1} = -l_1 a_{2,1} + a_{1,1}$$

Rešenje zadatka je:

$$x_1 = -2.6004$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 2$$

Zadatak br3. Rešiti sistem Gausovom metodom sa izborom glavnog elementa

$$\begin{aligned}
1.1161x_1 + 0.1254x_2 + 0.1397x_3 + 0.1490x_4 &= 1.5471 \\
0.1582x_1 + 1.1675x_2 + 0.1768x_3 + 0.1871x_4 &= 1.6471 \\
0.1968x_1 + 0.2071x_2 + 1.2168x_3 + 0.2271x_4 &= 1.7471 \\
0.2368x_1 + 0.2471x_2 + 0.2568x_3 + 1.2671x_4 &= 1.8471
\end{aligned}$$

Biramo element a(4,4) za pivot i rešavamo zadatak

l(I)	a(I,1)	a(I,2)	a(I,3)	a(I,4)	b(i)
0.1176	1.1161	0.1254	0.1397	0.1490	1.5471
0.1477	0.1582	1.1675	0.1768	0.1871	1.6471
0.1792	0.1968	0.2071	1.2168	0.2271	1.7471
*	0.2368	0.2471	0.2568	1.2671	1.8471
0.0935	1.0883	0.0963	0.1095		1.3299
0.1186	0.1232	1.1310	0.1389		1.3744
*	0.1544	0.1628	1.1708		1.4160
0.0730	1.0738	0.0811			1.1975
*	0.1049	1.1117			1.2064
*	1.0662				1.1094

$$l_1 = \frac{a_{1,4}}{a_{4,4}} \quad l_2 = \frac{a_{2,4}}{a_{4,4}} \quad l_3 = \frac{a_{3,4}}{a_{4,4}}$$

$$l_1 = \frac{a_{1,3}}{a_{3,3}} \quad l_2 = \frac{a_{2,3}}{a_{3,3}}$$

$$l_1 = \frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}$$

1				1.0406
	1			0.9870
		1		0.9351
			1	0.8813

I sada računamo vrednosti x

$$x_1 = \frac{1.1094}{1.0662} = 1.0406$$

$$x_2 = \frac{1}{1.1117}(1.2064 - 0.1049x_1) = 0.9870$$

$$x_3 = \frac{1}{1.1708}(1.4160 - 0.1544x_1 - 0.1628x_2) = 0.9351$$

$$x_4 = \frac{1}{1.2671}(1.8471 - 0.2368x_1 - 0.2471x_2 - 0.2568x_3) = 0.8813$$

Možemo da izračunamo determinantu matrice kao proizvod pivotnih elemenata, samo je potrebno da odredimo predznak, zato što smo menjali kolone i vrste.

$$\det A = 1.0662 * 0.1117 * 0.1708 * 1.2671 = 1.75831$$

NAPOMENA: Kada se rešavaju matrice, OBAVEZNO proveriti da li je matrica uslovljena, to jest:

$$cond(A) = \| A \| * \| A^{-1} \|$$

Ukoliko je cond(A)>10 sistem je loše uslovljen.
Loša uslovljenost nastaje ako male promene bi-ova dovode do velikih promena rešenja.

Cond(A) se može približno naći ako podelimo najveću i najmanju sopstvenu vrednost matrice.

Na pismenom neće biti loše uslovljenih sistema!!

LU DEKOMPOZICIJA

Modifikacija Gausove metode (Krautov algoritam)
Opet posmatramo sistem **Ax=b**, A-matrica, x,b-kolone.

Svaka matrica se može zapisati kao **A=L*U** gde je
L – donje trougaona matrica
U – gornje trougaona matrica (na dijagonali ima sve jedinice)
L i U se mogu dobiti Gausovom metodom ali to zahteva vreme, zato koristimo Krutov algoritam.

Formule za direktno nalaženje koeficijenata matrice:

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$l_{ij} = aij - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, i \geq j > 1$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} (a_{ij-} \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}), 1 < i < j$$

Kako je Ax=b i A =LU dobijamo da je LUx=B.
Uvodimo smenu Ux=Y pa rešavamo sistem Ly=b.
Zadatak se svodi na rešavanje 2 sistema sa trougaonim matricama, a rešavanje polaznog sistema se svodi na rešavanje Ux=y(gde se vektor kolona y ponaša kao vektor kolona b)

Zadatak br4. Rešiti sistem

$$3x_1 + x_2 - 1x_3 + 2x_4 = 6$$
$$-5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12$$
$$2x_1 + 1x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3$$

Rešavamo sistem na sledeći način: prva kolona se samo prepiše a onda računamo prvu vrstu tako što sve elemente podelimo sa A(1,1) . Ostale vrednosti u matrici dobijamo koristeći formulu.

$$l(1,1) = a(1,1),$$
$$l(2,1) = a(2,1),$$
$$l(3,1) = a(3,1),$$
$$l(4,1) = a(4,1),$$

$$u(1,2) = \frac{a(1,2)}{a(1,1)}$$
$$l(2,2) = a(2,2) - l(2,1) * u(1,2)$$
$$l(3,2) = a(3,2) - l(3,1) * u(1,2)$$
$$l(4,2) = a(4,2) - l(4,1) * u(1,2)$$

$$u(1,3) = \frac{a(1,3)}{a(1,1)}$$
$$u(2,3) = \frac{1}{l(2,2)}(a(2,3) - l(2,1)u(1,3))$$
$$l(3,3) = a(3,3) - l(3,1)u(1,3) - l(3,2)u(2,3)$$
$$l(4,3) = a(4,3) - l(4,1)u(1,3) - l(4,2)u(2,3)$$

A(I,1)	A(I,2)	A(I,3)	A(I,4)	b(i)
3	1	-1	2	6
-5	1	3	-4	-12
2	0	1	-1	1
1	-5	3	-3	3

$$u(1,4) = \frac{a(1,4)}{a(1,1)}$$
$$u(2,4) = \frac{1}{l(2,2)}(a(2,4) - l(2,1)u(1,4))$$
$$u(3,4) = \frac{1}{l(3,3)}(a(3,4) - l(3,1)u(1,4) - l(3,2)u(2,4))$$

3	1	0.33333	-0.33333		0.66667		2.00000
-5		2.66667	1	0.50000	-0.25000		-0.75000
2		-0.66667	2.00000	1	-1.25000		-1.75000
1		-5.33333	6.00000		-2.50000	1	3.00000

Dobili smo trodijagonalni sistem, sada rešavamo Ly=b, odnosno Ux=y.
Dobićemo da je:

$$3y_1 = 6$$
$$-5y_1 + 2.6667y_2 = -12$$
$$2y_1 - 0.66667y_2 + 2y_3 = 1$$
$$y_1 - 5.3333y_2 + 6y_3 - 2.5y_4 = 3$$

Odnosno:

$$y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{1}{2.6667}(-12 + 5y_1) = -0.75$$
$$y_3 = \frac{1}{2}(1 - 2y_1 + 0.6667y_2) = -1.75$$
$$y_4 = \frac{1}{2.5}(3 - y_1 + 5.3333y_2 - 6y_3) = 3.00$$

Rešavamo drugi sistem: Ux=y

$$x_1 + 0.3333x_2 - 0.3333x_3 + 0.6667x_4 = 2$$
$$x_2 + 0.5x_3 - 0.25x_4 = -0.75$$
$$x_3 - 1.25x_4 = -1.75$$
$$x_4 = 3.00$$

Odnosno:

$$x_4 = 3.00$$
$$x_3 = -1.75 + 1.25x_4 = 2.00$$
$$x_2 = -0.75 + 0.25x_4 - 0.5x_3 = -1.00$$
$$x_1 = 2 - 0.6667x_4 + 0.3333x_3 - 0.3333x_2 = 1.00$$

IZRAČUNAVANJE DETERMINANTE

Gausova metoda može da se koristi za izračunavanje determinante.
Kao primer uzimamo Gausovu metodu sa izborom glavnog elementa.

Primer: Izračunati determinantu D

$$D = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{bmatrix}, a_{1,1} \neq 0$$

Ako izvučemo element $a_{1,1}$ iz prve vrste dobijamo

$$D = a_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & b_{1,2} & b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{bmatrix}, b_{1,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{1,1}}; j \geq 2$$

Sada pomnožimo prvu vrstu redom sa $a_{2,1}, a_{3,1}, ..., a_{n,1}$ i oduzmemo od ostalih, dobićemo novu matricu:

$$D = a_{1,1} \begin{bmatrix} 1 & b_{1,2} & b_{1,n} \\ 0 & a^{(2)}{}_{2,2} & a^{(2)}{}_{2,n} \\ & & \\ 0 & a^{(2)}{}_{n,2} & a^{(2)}{}_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ovu matricu možemo da razvijemo po prvoj koloni, dobićemo determinantu reda n-1:

$$D = a_{1,1} \begin{bmatrix} a^{(2)}{}_{2,2} & a^{(2)}{}_{2,n} \\ & \\ a^{(2)}{}_{n,2} & a^{(2)}{}_{n,n} \end{bmatrix}$$

Ako je $a^{(2)}{}_{2,2} \neq 0$ ponavljamo postupak

Konačno, determinanta matrice jednaka je proizvodu vodećih elemenata:

$$D = a_{1,1} * a^{(1)}{}_{2,2} * a^{(2)}{}_{3,3} * ... * a^{(n-1)}{}_{n,n}$$

ISTOVREMENO REŠAVANJE VIŠE SISTEMA ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Primer: Rešavamo istovremeno dva sistema jednačina zadata na sledeći način:

$$Ax = b_1$$
$$Ax = b_2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & & a_{2,n} \\ \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} b^{(1)}{}_1 \\ b^{(1)}{}_2 \\ \\ b^{(1)}{}_n \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} b^{(2)}{}_1 \\ b^{(2)}{}_2 \\ \\ b^{(2)}{}_n \end{bmatrix}$$

Zadatak se svodi na paralelno rešavanje dva sistema..
Rešavaćemo ih tablično radi bolje preglednosti.

A				b1	b2
l(1,1)	1	u(1,2)	u(1,3)		
l(2,1)	l(2,2)	1	u(2,3)		
l(3,1)	l(3,2)	l(3,3)	1		

Ovaj problem se najčešće koristi kod traženja inverzne matrice.

Zadatak br5. Naći inverznu matricu

$$A=\begin{bmatrix} 24.21 & 2.42 & 3.85 \\ 2.31 & 31.49 & 1.52 \\ 3.49 & 4.85 & 28.72 \end{bmatrix}$$

Problem nalaženja inverzne matrice može se svesti na rešavanje n sistema linearnih i algebarskih jednačina sa istom matricom sistema, matricom A.
Dakle, rešavamo sistem od 3 jednačine sa 3 nepoznate.Sistem rešavamo Krautovom metodom (LU dekompozicija).

$$A * A^{-1} = E$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax_1 = e_1 \qquad Ux_1 = y_1$$
$$Ax_2 = e_2 \qquad Ux_2 = y_2$$
$$Ax_3 = e_3 \qquad Ux_3 = y_3$$

$$A = LU$$

24.21		2.42		3.85		1	0	0
2.31		31.49		1.52		0	1	0
3.49		4.85		28.72		0	0	1
24.21	1	0.09996		0.15903		0.04131	0	0
2.31		31.25909	1	0.03687		-0.00305	0.03199	0
3.49		4.50114		27.99903	1	-0.00466	-0.05514	0.03572

Inverznu matricu dobijamo na sledeći način: Transformisana matrica E predstavlja kolone vektora y_1, y_2, y_3
Prvo nađemo te vektore, pa onda vektore x.

I vektor

$$24.21y_1 = 1$$
$$2.31y_1 + 31.25909y_2 = 0$$
$$3.49y_1 + 4.50114y_2 + 27.99903y_3 = 0$$

$$y_1 = 0.04131$$
$$y_2 = \frac{1}{31.25909}(0 - 2.31y_1) = -0.0031$$
$$y_3 = \frac{1}{27.99903}(0 - 3.49y_1 - 4.50114y_2) = -0.0047$$

$$x_3 = -0.00466$$
$$x_2 = 0.00305 - 0.03687x_3 = -0.00288$$
$$x_1 = 0.04131 - 0.15903x_3 - 0.1x_2 = 0.04233$$

II vektor

$$24.21y_1 = 0$$
$$2.31y_1 + 31.25909y_2 = 1$$
$$3.49y_1 + 4.50114y_2 + 27.99903y_3 = 0$$

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = \frac{1}{31.25909}(1 - 2.31y_1) = 0.0320$$
$$y_3 = \frac{1}{27.99903}(0 - 3.49y_1 - 4.50114y_2) = -0.0051$$

$$x_3 = -0.00514$$
$$x_2 = 0.03199 - 0.03687x_3 = 0.03218$$
$$x_1 = 0 - 0.15903x_3 - 0.1x_2 = -0.00240$$

III vektor

$$24.21y_1 = 0$$
$$2.31y_1 + 31.25909y_2 = 0$$
$$3.49y_1 + 4.50114y_2 + 27.99903y_3 = 1$$

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = \frac{1}{31.25909}(0 - 2.31y_1) = 0$$
$$y_3 = \frac{1}{27.99903}(1 - 3.49y_1 - 4.50114y_2) = 0.0357$$

$$x_3 = 0.03572$$
$$x_2 = 0 - 0.03687x_3 = -0.00132$$
$$x_1 = 0 - 0.15903x_3 - 0.1x_2 = -0.00555$$

Konačno, tražena inverzna matrica je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04233 & -0.00240 & -0.00555 \\ -0.00288 & 0.03218 & -0.00132 \\ -0.00466 & -0.00514 & 0.03572 \end{bmatrix}$$

Primetićemo da su vektori transformisane matrice E naš vektor y (potrebno je samo da se reši sistem Ux=y)