ČEBIŠEVLJEVI POLINOMI

Rešavamo integral: $\int_{-1}^{1} p(x) f(x) dx$

Interval [-1,1]

Težinska funkcija: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Za rešavanje ovog problema koristimo Čebiševljeve polinome.
Čebiševljeve polinome možemo definisati na 3 načina:

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos x), n = 0,1,2,3...$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2x\cos(n * \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x)$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1,2,3,...$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right], n = 0,1,2,...$$

Zadatak br1. Izvesti Gausovu kvadratnu formulu i oceniti grešku R.

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}) + R$$

Prvo primetimo da su granice integrala [0,1] umesto [-1,1]. Uvodimo smenu: $x = \frac{1+t}{2}$

Rešavamo integral:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(\frac{1+t}{2})}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Pod integralom imamo težinsku funkciju: $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Potrebno je odrediti čvorove Gausove kvadratne formule.
Čvorove ćemo odrediti kao nule Čebiševljevih polinoma obzirom da su Čebiševljevi polinomi na intervalu [-1,1] ortogonalni u odnosu na ovako zadatu težinsku funkciju.

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos x) = 0$$

$$n * \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - k\pi \Rightarrow \arccos(x) = \frac{\pi(1-2k)}{2n} \Rightarrow x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

Ovim postupkom se dobija Čebiševljeva kvadraturna formula oblika:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n})$$

Ovu formulu koristimo bez dokaza!!

Zadatak rešavamo primenjujući poslednju formulu. Dobićemo da je:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} f\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)\left(1-\frac{1+t}{2}\right)}}dt = \int_{-1}^1 \frac{f\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}dt$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_{-1}^1 \frac{f\left(\frac{1+t}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1+t_k}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{\cos^2(2k+1)\pi}{4n}\right)$$

Ostalo je da ocenimo grešku. Koristimo Gausovu ocenu greške.:

$$|R| \le \frac{1}{(2n)!}\max_{[a,b]}\left|f^{(2n)}(\xi)\right|\int_a^b \frac{w_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{M_{2n}}{(2n)!}2^{2-2n}\frac{\pi}{2}$$

$$w_n(t) = 2^{1-n}T_n(t)$$

$$(T_n, T_n) = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(n*\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}$$

$$(T_i, T_j) = 0, i \ne j$$

Zadatak br2. Približno rešiti integral Gausovom kvadraturnom formulom za n=3. Oceniti grešku.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Za čvorove uzimamo nule Čebiševljevog polinoma (zato što su oni ortogonalni u odnosu na zadatu težinsku funkciju).

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x = 0$$
$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{4}}, t_2 = 0, t_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3}(\cos(\cos(\frac{\pi}{6})) + \cos(\cos(\frac{3\pi}{6})) + \cos(\cos(\frac{5\pi}{6}))) + R$$

korišćenjem formule izvedene u prethodnom zadatku.

$$= \frac{\pi}{3}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 0 + \cos(-\frac{\sqrt{3}}{2})) + R$$

korišćenjem čvorova dobijenih u ovom zadatku

$$= \frac{\pi}{3}(0.6479 + 1 + 0.6479) + R = 2.4073 + R$$

$$|R| \le \frac{M_6}{6!} 2^{-4} \frac{\pi}{2} = 1.36 * 10^{-4}$$
$$M_6 = \max_{[-1,1]} |\cos^{(6)}(x)| = 1$$