GAUSOVE KVADRATURNE FORMULE

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

Kod Njutn Kotesovih formula smo imali poznate čvorove
i tražili smo da formula bude tačna za polinome n-og stepena.

Kod Gausovih formula imamo nepoznate A_i, x_i

Tražićemo da formula će biti tačna za polinome 2n-1 stepena.
Sistem je nelinearan po t pa se zato rešava preko ortogonalnih polinoma. x_i su nule polinoma.

Uvodimo skalarni proizvod: $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad f,g \in C[-1,1]$

Interesuju nas polinomi koji zadovoljavaju uslov: $(p_i, p_j) = \int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx = 0, i \neq j$

Dokazano je da postoje i oni se nazivaju **LEŽANDROVI POLINOMI**

Koristimo formulu (koja se naziva **Rodrigova formula**): $$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(x^2-1)^n]$$

Važi:

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x$$
$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$
$$p_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t)$$

...

$p_n(t)$ na (-1,1) ima n različitih realnih nula

Rešavanjem odgovarajućeg polinoma, dobijamo x_i
nule polinoma (čvorove interpolacije).

Ležandrovi polinomi su međusobno ortogonalni !

Zadatak br1. Izvesti Gausovu kvadraturnu formulu za n=3 za rešavanje integrala:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

Za rešavanje ovog zadatka potrebna su nam 3 čvora, dakle uzećemo Ležadnrov polinom trećeg stepena (za n=3) i naći nule tog polinoma.

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(x^2-1)^n]$$

Dobijamo da je:

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}t(5x^2 - 3) = 0$$

$$x_2 = 0, x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Dakle, Gausova kvadraturna formula je oblika:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(-\sqrt{\frac{3}{5}},) + A_2 f(0) + A_3 f(\sqrt{\frac{3}{5}},)$$

Ostalo je da odredimo nepoznate koeficijente

Koeficijente Ai biramo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.
Broj nepoznatih koeficijenata određuje stepen funkcije za koju će formula biti tačna.
U zadatku imamo 3 čvora, dakle formula mora da bude tačna za polinome stepena 0,1 i 2.
Uzećemo da je funkcija $f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=x^2$
i za tako izabrano f(x) odrediti nepoznate koeficijente.

$$f(x)=1: \int_{-1}^{1} 1dx = x\,|_{-1}^{1} = 2 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$f(x)=x: \int_{-1}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{1} = 0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}A_3$$

$$f(x)=x^2: \int_{-1}^{1} x^2dt = \frac{x^3}{3}\,|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = \frac{3}{5}A_1 + \frac{3}{5}A_3$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$A_1=\frac{5}{9}, A_2=\frac{8}{9}, A_3=\frac{5}{9}$$

Konačno, tražena formula je oblika:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}},)$$

Zadatak br2. Izvesti Gausovu kvadraturnu formulu za n=3. $I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}dx$

Prvo što je potrebno da primetimo jesu granice integrala. Uvodimo smenu kako bi granice pomerili na [-1,1]. Afinom trasnformacijom dobijamo da je:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

Koristićemo čvorove koje smo dobili u prvom zadatku.

$$t_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.5000$$

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow x_1 = 0.11270$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow x_3 = 0.88730$$

Konačno, Gausova kvadraturna formula biće oblika (koristimo rezultate prethodnog zadatka):

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}dx = \frac{1}{2*9}(5f(0.1127) + 8f(0.5000) + 5f(0.8873)) \approx 1.39873$$

Zadatak br3. Izvesti Gausovu kvadraturnu formulu oblika:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

Problem: Pod integralom imamo proizvod dve funkcije.

Uvodimo novi skalarni proizvod: $(f(x), g(x)) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)g(x)dx$ e^{-x} - težinska funkcija

$$(p_i, p_j) = \int_0^\infty e^{-x} p_i(x)p_j(x)dx = 0, i \neq j$$

Tražimo nule polinoma 2og stepena zato što imamo 2 čvora $p_2(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2$

Za određivanje polinoma koristimo **postupak Gram Šmitove ortogonalizacije**:

$$p_k(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x^k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i(x)$$

$$p_0(x) = x^0 = 1$$

$$p_1(x) = x^1 - \sum_{i=0}^{0} \frac{(x^1, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i(x) = x - 1$$

$$p_2(x) = x^2 - \sum_{i=0}^{1} \frac{(x^2, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i(x) = x^2 - \left(\frac{(x^2, p_0)}{(p_0, p_0)} p_0(x) + \frac{(x^2, p_1)}{(p_1, p_1)} p_1(x) \right)$$

$$(1,1) = \int_0^\infty e^{-x} *1*1dx = 1$$

$$(x,1) = \int_0^\infty e^{-x} x*1dx = 1$$

$$(x^2,1) = \int_0^\infty e^{-x} x^2 *1dx = 2$$

$$I_k = (x^k, 1) = \int_0^\infty e^{-x} x^k * 1 dx = kI_{k-1} = k!$$

$$(x^2, x-1) = \int_0^\infty e^{-x} x^2 (x-1) dx = \int_0^\infty e^{-x} x^3 dx - \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx$$

$$(x^2, x-1) = 3I_2 - 2I_1 = 3*2 - 2*1 = 4$$

$$(x-1, x-1) = \int_0^\infty e^{-x} (x-1)^2 dx = \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx - 2\int_0^\infty e^{-x} x dx + \int_0^\infty e^{-x} dx$$

$$(x-1, x-1) = 2I_1 - 2I_0 + 1 = 1$$

$$p_2(x) = x^2 - \left(\frac{(x^2,1)}{(1,1)} 1 + \frac{(x^2, x-1)}{(x-1, x-1)} (x-1) \right)$$

$$p_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

Tražimo nule polinoma kako bi dobili čvorove.

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Za tako izabrane čvorove odredimo nepoznate koeficijente tako da formula bude tačna za polinome Što većeg stepena.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} 1 dx = 1 = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} x dx = 1 = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$A_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, A_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Greška Gausove kvadraturne formule:

$$|R| \leq \frac{1}{(2n)!} \max_{[a,b]} |f^{(2n)}(\xi)| \int_a^b p(x) p_i^{\,2}(x) dx$$

p(x) je težinska funkcija

Što se tiče tačnosti Gausove kvadraturne formule, znatno je veća od tačnosti Trapezne i Simpsonove kv. formule. Na primer kada bi imali da odredimo kvadraturnu formulu za rešavanje integrala :

$$\int_{-1}^{1} e^{-x} dx$$

Ako posmatramo na 3 čvora, dobićemo da je greška:
Kod Trapezne formule 0.193
Kod Simpsonove formule 0.0117
Kod Gausove formule 0.0007.

Ali Gausova kvadraturna formula nije povoljna za veliki broj čvorova.
Kada imamo veliki broj čvorova koristimo Simpsonovu kvadraturnu formulu.