NUMERIČKO DIFERENCIRANJE KORIŠĆENJEM TEJLEROVOG RAZVOJA

PRIMER 1: Neka je $f \in C^2[a,b]$ dokazati da je $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{2} f''(\xi)h, \qquad \xi \in [x_0, x_0+h]$

Rešenje (primer 1): razvijemo f-ju u Tejorov red

PRIMER 2: Neka je $f \in C^3[a,b]$ dokazati da je $f'(x_0 + \frac{h}{2}) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{24} f'''(\xi)h^2, \qquad \xi \in [x_0, x_0+h]$

Rešenje (primer 2):

Razvijemo funkciju u Tejlorov red u okolini neke tačke (npr u okolini tačke $x_0 + h$)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi) \qquad \xi \in [x_0, x_0+h]$$

Uvodimo oznake $\bar{x} = x_0 + \frac{h}{2} \qquad \Rightarrow x_0 = \bar{x} - \frac{h}{2}$

$$\Rightarrow x_1 = \bar{x} + \frac{h}{2}$$

Primenimo razvoj u okolini tačke $\bar{x}$:

$$f(x_0) = f(\bar{x}) - \frac{h}{2} f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8} f''(\bar{x}) - \frac{h^3}{48} f'''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in [x_0, x_0+h]$$

$$f(x_1) = f(\bar{x}) + \frac{h}{2} f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8} f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48} f'''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in [x_0, x_0+h]$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} = \frac{hf'(\bar{x}) + \frac{h^3}{48}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{48}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$$

Kako je $f \in C^3[a,b]$ na osnovu Vajerštrasove teoreme imamo da $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \quad f'''(\xi) = \frac{1}{2}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$

Odnosno,

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{24} f'''(\xi), \xi \in (x_0, x_1)$$

ZADATAK: Neka se vrednosti funkcije mogu izračunati sa tačnošću ε. Naći optimalan korak za numeričko diferenciranje po formuli:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0+\frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

Rešenje:

1. Koristimo formulu iz prvog primera (formula se dokazuje tako što se funkcija razvije u okolini tačke x_0+h zaključno sa drugim izvodom)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}f''(\xi)h, \qquad \xi \in [x_0, x_0+h]$$

Greška aproksimacije treba da sadrži grešku zaokruživanja i grešku metode:

$$R_M \le \frac{M_2 h}{2}$$

$$R_Z \le \frac{\varepsilon+\varepsilon}{h}$$

R_M greška metode

R_Z greška zaokruživanja

R ukupna greška $\qquad R = R_M + R_Z = \dfrac{M_2 h}{2} + \dfrac{2\varepsilon}{h}$

Želimo da minimiziramo funkciju ukupne greške, zato tražimo nulu njenog izvoda po h:

$$R'_h = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4\varepsilon}{M_2}}$$

$$R'_h = 0$$

ovo je optimalan korak za prvu formulu.

2. Koristimo formulu iz drugog primera. Opet imamo grešku zaokruživanja i grešku metode.

$$f'(x_0+\frac{h}{2})=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{1}{24}f'''(\xi)h^2, \qquad \xi\in[x_0,x_0+h]$$

$$R_M\le\frac{\max|f'''(\xi)|h^2}{24}\le\frac{M_3h^2}{24}$$

$$R_Z\le\frac{\varepsilon+\varepsilon}{h}$$

Ukupna greška je sada: $R=R_M+R_Z=\frac{M_3h^2}{24}+\frac{2\varepsilon}{h}$

Želimo da minimiziramo funkciju ukupne greške, zato tražimo nulu njenog izvoda po h:

$$R'_h=\frac{2M_3h}{24}-\frac{2\varepsilon}{h^2} \Rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{24\varepsilon}{M_3}}$$ ovo je optimalan korak za drugu formulu.

$$R'_h=0$$

Da li je za ovako izabrano h greška minimalna? JESTE, $R''_h=\frac{M_3}{12}+\frac{4\varepsilon}{h^3}\ge 0$

3. domaći.

ZADATAK 2: Odrediti optimalni korak *h* numeričkog diferenciranja po formuli:

$$f'(x_o + 3h/4) = \frac{y_1 - y_0}{h}, y_i = f(x_i)$$

DEC 2009.

Rešenje: Razvijamo funkcije $f(x_0)$ i $f(x_0 + h)$:

$$\bar{x} = x_o + 3h/4 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= \bar{x} - 3h/4 \\ x_1 &= \bar{x} + h/4 \end{aligned}$$

$$f(x_0) = f(\bar{x}) - \frac{3h}{4} f'(\bar{x}) + \frac{9h^2 f(\xi_1)''}{32},$$

$$f(x_1) = f(\bar{x}) + \frac{h}{4} f'(\bar{x}) + \frac{h^2 f(\xi_2)''}{32},$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(\bar{x}) + \frac{h}{4} f'(\bar{x}) + \frac{h^2 f(\xi_2)''}{32} - \left(f(\bar{x}) - \frac{3h}{4} f'(\bar{x}) + \frac{9h^2 f(\xi_1)''}{32} \right)}{h}$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{hf'(\bar{x}) - \frac{h^2}{32}\left(f''(\xi_2) - 9 f''(\xi_1) \right)}{h}$$

$$R = R_Z + R_M = \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{10hM_2}{32}$$

$$R'_h = -\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{5M_2}{16} = 0 \rightarrow h = \sqrt{\frac{32\varepsilon}{5M_2}}$$

Zadaci za vežbu:

1. Odrediti ekstremnu vrednost funkcije zadate tablično:

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Y	0.2846	0.3578	0.3834	0.3795	0.3536	0.3098	0.2510

2. Pretpostavimo da se vrednosti funkcije mogu računati sa tačnošću 0.00001. Odrediti optimalni korak za numeričko diferenciranje date funkcije na intervalu [0, 10] po formuli

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$