RAČUNANJE SA PRIBLIŽNIM VREDNOSTIMA BROJEVA

PRIBLIŽNI BROJ I GREŠKA

- tačna vrednost nekog broja X
- približna vrednost nekog broja X*
- apsolutna greška $\Delta = |X - X^*|$
- granica apsolutne greške A_{X^*} (gornja granica) $\Delta \leq A_{X^*}$
- relativna greška $\delta = \dfrac{|X - X^*|}{|X^*|}$
- granica relativne greške $\delta \leq R_{X^*}$

- vrednosti $100 \cdot R_{X^*}$ nazivamo PROCENTUALNA GREŠKA

  $1000 \cdot R_{X^*}$ nazivamo PROMILNA GREŠKA

Pravilo koje važi:

$$X^* - A_{X^*} \leq X \leq X^* + A_{X^*}$$

PRIMER 1: Kolika je vrednost zaokruživanja broja π na 3 decimale?

$\pi = 3.141592654....$

$\pi^* = 3.142$

napomena: 1.15~1.2 // Ak je cifra ispred 5

1.25~1.2 // Ak je neparno => zaokružujemo na Ak+1

// Ak je parno => ostaje Ak

Kako nam nije poznat ceo broj π ne možemo tačno da odredimo apsolutnu grešku, zato ćemo tražiti približnu apsolutnu grešku:

$$\Delta \approx |3.141592654 - 3.142| = 0.0004073 \leq 5 \cdot 10^{-4} = A_{\pi^*}$$

$A_{\pi^*} = 5 \cdot 10^{-4}$ granica apsolutne greške.

Relativna greška: $\delta = \dfrac{0.0004073}{3.142} < 0.00013 = R_{\pi^*}$

$R_{\pi^*} = 1.3 \cdot 10^{-4}$ granica relativne greške.

PRIMER 2: Kolika je vrednost zaokruživanja broja ***e*** na 3 decimale?

$$e = 2.7182818$$
$$e^* = 2.718$$

Ponovo tražimo približnu apsolutnu grešku:

$$\Delta \approx |\, 2.7182818 - 2.178 \,| = 0.0002818 \leq 3 \cdot 10^{-4} = A_{e^*} \qquad A_{e^*} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta = \frac{0.0002818}{2.718} < 0.0001037 = R_{e^*} \qquad R_{e^*} = 10^{-4}$$

PRIMER 3: Kolika je vrednost zaokruživanja broja 1.23456 na 2 decimale? (domaći)

ZNAČAJNE I SIGURNE CIFRE

Svaki broj može da se zapiše kao:

$$X = \alpha_1 10^n + \alpha_2 10^{n-1} + \ldots + \alpha_k 10^{n-k+1} + \ldots + \alpha_m 10^{n-m+1}$$

ZNAČAJNE CIFRE nekog broja su sve njegove cifre počevši od prve ne nula cifre (gledano s'leva).

PRIMER:

$$X = 0.006402100 = 6.402100 \cdot 10^{-3}$$

značajne cifre

- Nula je značajna cifra ako se nalazi između dve nenlula cifre
- Nula je značajna cifra ako čuva decimalno mesto: 1.2630

Značajna cifra je SIGURNA CIFRA ako za granicu apsolutne greške važi:

$$A_{X^*} \leq w \cdot 10^{n-k+1}, 0 < w \leq 1$$

- Ako se za w može uzeti 0.5 onda se za cifru α_k kaže da je sigurna užem smislu
- Ako se za w može uzeti 1 onda se za cifru α_k kaže da je sigurna u širem smislu.

PRIMER 4: Koristimo podatke iz prvog primera.

$\pi = 3.141592654....$

$\pi^* = 3.142$

$A_{\pi^*} = 5 \cdot 10^{-4}$

Da li je 2 (treća cifra prilikom zaokruživanja) sigurna u užem ili širem smislu?

$A_{\pi^*} = 5 \cdot 10^{-4} < 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$ 2 je sigurna cifra u užem smislu, pa su i cifre ispred nje sigurne u užem smislu.

PRIMER 5: Tačna vrednost nekog broja je X=99.98. Približna vrednost ovog broja je X*=100.00 (iza decimalnog zareza imamo dve nule, proverićemo koja je od njih sigurna u užem a koja u širem smislu)

$\Delta = |99.98 - 100| = 0.02$ apsolutna greška

$A_{X^*} = 0.02$

$A_{x^*} < 0.5 \cdot 10^{-2}$ druga nula nije sigurna u užem smislu

$A_{x^*} < 1 \cdot 10^{-2}$ druga nula nije sigurna u širem smislu

$A_{x^*} < 0.5 \cdot 10^{-1}$ prva nula je sigurna u užem smislu.

Ako je cifra sigurna u užem smislu, onda je sigurna i u širem smislu.

Važi nejednakost: $\frac{w}{(\alpha_1+1)\cdot 10^k} \le R_{X^*} \le \frac{w}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}}$ K – broj sigurnih cifara

GREŠKA PRIBLIŽNE VREDNOSTI FUNKCIJE:

$$|\Delta f| = |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)|$$

$$|\Delta f| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \right| A_{X_i^*} = A_{f^*}$$

$$R_{f^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left| x_i^* \frac{\partial f}{\partial x_i^*} \right| R_{x_i^*}}{|f^*|}$$

PRIMER: Neka je S funkcija koja zavisi od $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Npr: $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

$S^* = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*$

Neka je S*=0.8956+1.735+436.5+125.8+12.34+0.0456
Uočimo onaj broj koji ima najmanje decimala (postoje 2 takva broja) i njih ne menjamo, dok ostale brojeve zaokružujemo na 1 decimalu više. Dobijamo:

S*=0.90 + 1.74 + 436.5 + 125.8 + 12.34 + 0.04 = 577.33 = 577.3

Poslednja trojka se odbacuje obzirom da nam je to nesigurna cifra (dobili smo je sabiranjem zaokruženih brojeva)

Tačnost sabirka (tačnost sabiraka + greška pri zaokruživanju sabiraka + greška pri zaokruživanju zbira)

$$A_{S^*} = 0.5\cdot 10^{-4} + 0.5\cdot 10^{-3} + 0.5\cdot 10^{-1} + 0.5\cdot 10^{-1} + 0.5\cdot 10^{-2} + 0.5\cdot 10^{-4} +$$
$$+ 0.0044 + 0.005 + 0.0044 +$$
$$+ 0.03$$
$$= 0.1494 < 0.15$$

Tačna vrednost funkcije je: $S = 577.3 \pm 0.15$

GREŠKA ZBIRA:

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ tada je relativna greška njihovog zbira

$$Rs^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{Ax_i^*}{|x_1^* + \ldots + x_n^*|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{|x_1^* + \ldots + x_n^*|} Rx_i^*$$

<u>VAŽI NEJEDNAKOST:</u> $\min_i Rx_i^* \le Rs^* \le \max_i Rx_i^*$

GREŠKA RAZLIKE:

Neka su dva broja $x_1, x_2 > 0$ Njihova razlika je $D = x_1 - x_2$

$D^* = x_1^* - x_2^*$

Relativna greška za razliku je $R_{D^*} = \dfrac{x_1^*}{|x_1^* - x_2^*|} R_{x_1^*} + \dfrac{x_2^*}{|x_1^* - x_2^*|} R_{x_2^*}$

Granica relativne greške: R_{D^*}
Važi: $R_{D^*} > R_{x_i^*}, \forall i$

Ako su brojevi koje oduzimamo jako bliski, onda se javlja velika greška u računu.

PRIMER: $x_1 = \sqrt{3.01}, x_2 = \sqrt{3}$

1) Ako problem rešavamo sa 3 sigurne cifre dobićemo da je: 1.73 - 1.73 = 0 !!!!
2) Sa 4 sigurne cifre problem ima sledeći oblik: 1.735 - 1.732 = 0.003
   Ovo je tačniji rezultat ALI brojevi su zadati sa 4 sigurne cifre a rešenje ima samo 1 sigurnu cifru! Želimo da dobijemo rešenje koje ima isti broj sigurnih cifara kao i brojevi sa kojima radimo.

TRIK: Racionalisanje!

$$\sqrt{3.01} - \sqrt{3} = \frac{3.01 - 3}{\sqrt{3.01} + \sqrt{3}} = \frac{0.01}{1.73 + 1.73} = 0.00289$$

GREŠKA PROIZVODA:

Neka su dati brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Njihov proizvod je $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$

Približna vrednost proizvoda $P = x_1 * \cdot x_2 * \cdot \ldots \cdot x_n *$

Ovde posmatramo samo relativnu grešku: $R_{P*} = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i^*}$

PRIMER: Naći proizvod P=3.452 * 8.9 * 9.0582 * 0.0012

Prvo primetimo da nemaju svi brojevi isti broj decimala.
Uočimo onaj broj koji ima najmanje decimala i ostale zaokružimo na 1 decimalu više.

P*=3.45 * 8.9 * 9.06 * 0.0012 = 0.33382476 ~ 0.33

Konačno rešenje zaokružujemo na onoliko značajnih cifara koliko ima “najgrublji” činilac, tj. na 2 značajne cifre: P*=0.33

GREŠKA KOLIČNIKA:

Neka su dati brojevi x_1, x_2

Njihov količnik je:

$$Q = \frac{x_1}{x_2}, x_2 > 0$$

$$Q* = \frac{x_1 *}{x_2 *}, x_2 * > 0 \qquad R_{Q*} = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i^*}$$

PRIMER: Naći površinu valjka i granicu relativne greške ako je

- r – poluprečnik osnove
- h – visina valjka

$$r = 3.7 \pm 0.05$$

$$h = 8.2 \pm 0.03$$

$$\pi = 3.142$$

Površina valjka:

$$P = r^2\pi h + 2r\pi h = 2r\pi(r + h)$$

$$P* = 2 \cdot 3.7 \cdot 3.142 \cdot (3.7 + 8.2) = 276.6842$$

Relativna greška:

$$R_{P*} = R_{r*} + R_{\pi*} + R_{(r+h)*} = \frac{0.05}{3.7} + \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3.142} + \frac{0.05 + 0.03}{3.7 + 8.2} = 0.02$$

$$R_{(r+h)*} = \frac{A_{r*} + A_{h*}}{r * + h *} = \frac{0.05 + 0.03}{3.7 + 8.2}$$

INVERZNI PROBLEM GREŠKE:

Ako imamo dat neki broj m, a želimo da odredimo sa kojom tačnošću je potrebno da zadamo ulazne veličine, tako da je granica apsolutne greške bude manja od m koristimo sledeću formulu:

$$A_{f^*} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| A_{x_i^*} \leq m$$

PRINCIP JEDNAKIH UTICAJA:
(svih n sabiraka su jednaki)

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1 *} \right| A_{x_1 *} = \ldots = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n *} \right| A_{x_n *}$$

n – broj promenljivih

$$A_{x_i *} \leq \frac{m}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i *} \right|}$$

PRIMER: Sa kojom tačnošću je potrebno zadati brojeve x_1, x_2, x_3 tako da apsolutna greška funkcije bude manja od 0.0005 ?

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$$

$$x_1 = 3.2835$$

$$x_2 = 0.93221$$

$$x_3 = 1.13214$$

Koristimo princip jednakih uticaja. Granice apslolutune vrednosti za svaki broj su sledeće:

$$Ax_1{*} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \left|\frac{1}{x_3}\right|} = 0.19 \cdot 10^{-3}$$

$$Ax_2{*} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \left|\frac{2x_2}{x_3}\right|} = 0.10 \cdot 10^{-3}$$

$$Ax_3{*} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \left|\frac{x_1 + x_2^{2}}{x_3^{2}}\right|} = 0.51 \cdot 10^{-4}$$