ЗАДАЦИ ИЗ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА Б – В, Л и Н смер

Седми двочас

асистенти: Марија Микић и Душан Дробњак

1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

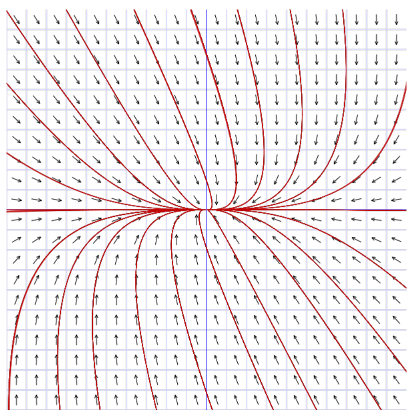
г) $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; д) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; ђ) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Скица решења.

а) Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = -1$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_2 = -3$ је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Стога је опште решење система

$$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

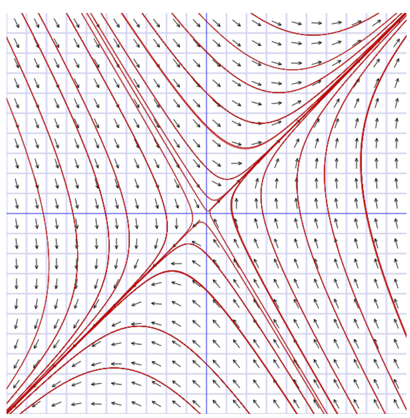
Еквилибријум система $X^* = (0,0)$ је стабилан чвор. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



б) Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = -6$ и $\lambda_2 = 2$. Сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = -6$ је $\gamma_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, а сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\lambda_2 = 2$ је $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Стога је опште решење система

$$X(t) = c_1 e^{-6t} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

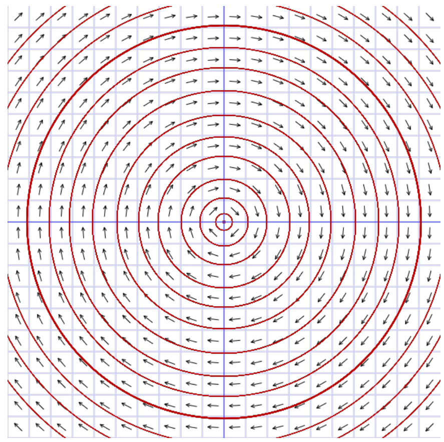
Еквилибријум система $X^* = (0,0)$ је седло. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



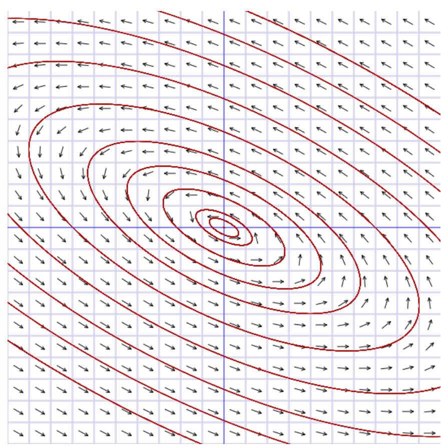
в) Сопствене вредности матрице A су конјуговано комплексне $\lambda_{1,2} = \pm i$. Опште решење система је

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

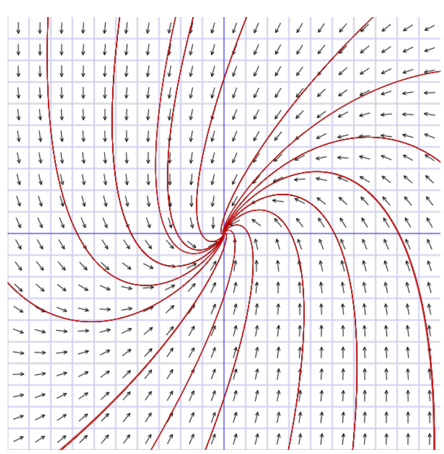
Еквилибријум система $X^* = (0, 0)$ је центар. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



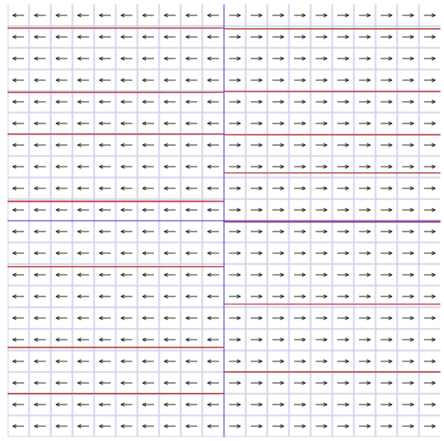
г) Сопствене вредности матрице A су конјуговано комплексне $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}i$. Еквилибријум система $X^* = (0, 0)$ је центар, а фазне трајекторије су елипсе. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



д) Сопствене вредности матрице A су конјуговано комплексне $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Еквилибријум система $X^* = (0, 0)$ је стабилан фокус, а фазне трајекторије су спирале. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



ђ) Сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 0$. Еквилибријуми система су $X^* = (0, s)$, $s \in \mathbb{R}$, неизоловани чворови, а фазне трајекторије су полуправе. Одговарајући фазни портрет је приказан на слици испод.



2. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и нека је $a \neq \pm b$. Свести диференцијалну једначину $y'' + 2ay' + b^2 y = 0$ на систем диференцијалних једначина. У зависности од параметара a и b испитати тип еквилибријума и скицирати фазне портрете.

Скица решења.

Дата диференцијална једначина се може свести на систем (*коју смену уводимо?)

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -b^2 x_1 - 2a x_2.$$

Матрица система је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix}$. Сопствене вредности матрице A су $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, када је $a^2 > b^2$, односно $\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$, када је $a^2 < b^2$. У зависности од вредности параметара разликујемо тип еквилибријума.

1) ако је $a^2 - b^2 > 0$, $b = 0$ и $a \neq 0$, онда су еквилибријуми $X^* = (s, 0), s \in \mathbb{R}$ неизоловани чворови;

2) ако је $a^2 - b^2 > 0$, $b \neq 0$ и $a > 0$, онда је еквилибријум $X^* = (0, 0)$ стабилан чвор;

3) ако је $a^2 - b^2 > 0$, $b \neq 0$ и $a < 0$, онда је еквилибријум $X^* = (0, 0)$ нестабилан чвор;

4) ако је $a^2 - b^2 < 0$ и $a = 0$ онда је еквилибријум $X^* = (0, 0)$ центар;

5) ако је $a^2 - b^2 < 0$ и $a > 0$ онда је еквилибријум $X^* = (0, 0)$ стабилан фокус;

6) ако је $a^2 - b^2 < 0$ и $a < 0$ онда је еквилибријум $X^* = (0, 0)$ нестабилан фокус;

Фазне портрете скицирати за домаћи.