Dimenziona analiza

- Ne postoji opšta definicija.
- Svaka pojava može da se opiše dimenziono korektnom jednačinom koja povezuje neke promenljive.
- Koristi se za proveru oblika zavisnosti među fizičkim veličinama

Koristimo oznake:

I način:

Q – fizička veličina
δ(Q) – fizička dimenzija veličine Q

II način:

[Q] – jedinica
v(Q) – numerička vrednost jedinice Q

Korišćenjem osnovnih dimenzija možemo izvesti jedinice za meru nekih drugih večina:

M - masa
L - dužina ➔
T - vreme

Brzina $\frac{L}{T}$
Površina L^2
Snaga $\frac{ML}{T^3}$

Ili, ako su osnovne jedinice

M - masa
v - brzina ➔
T - vreme

Dužina vT
Snaga $\frac{MT}{T^2}$

OSNOVNE OPERACIJE SA FIZIČKIM VELIČINAMA MORAJU DA ZADOVOLJAVAJU SLEDEĆA PRAVILA :

1) Ako je $Q_1 = Q_2$ tada je $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
2) $\delta(Q_1^{a_1} * Q_2^{a_2}) = \delta(Q_1^{a_1}) * \delta(Q_2^{a_2}) \quad a_1, a_2 \in Q$
3) $Q_1 \pm Q_2$ je fizička veličina akko je $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$. Važi $\delta(Q_1 \pm Q_2) = \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
4) $\delta(\xi) = \delta(Q^0) = \delta(Q)^0 = 1,\ \forall\xi \in Q, \forall Q$
5) Veličine u argumentima nepolomijalnih funkcija moraju biti bezdimenzione, npr.

   $e^{wt} = 1$ ako je $\delta(t) = T \quad \rightarrow \quad \delta(w) = \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad e^{T\frac{1}{T}}$ pokrate se veličine.

SVOĐENJE NA BEZDIMENZIONE VELIČINE

PRIMER 1

Koliko ima sekundi u jednom danu (7 dana)?

Rešenje:

1 dan = 24h

1h = 60min $f(dan, sat, min) = \frac{s}{dan}$

1min = 60sec

$$\rightarrow \frac{60\ sec}{1\ min} * \frac{60\ min}{1\ h} * \frac{24h}{1\ dan} = 86400\frac{s}{dan}$$

PRIMER 2

Koliko ima sati u jednoj godini?

Rešenje:

1god = 365 dana $f(dan, sat, godina) = \frac{h}{god}$

1 dan = 24h

$$\rightarrow \frac{24h}{1\ dan} * \frac{365\ dan}{1\ god} = 8760\frac{h}{god}$$

PRIMER 3

Organizuje se žurka za 15 ljudi koji u proseku pojedu po 4 parčeta pice. Koliko pica treba napraviti/naručiti i koliko će nas koštati ta porudžbina ako je dostava besplatna, jedna pica košta 650din I ima 12 parčeta?

1 pizza = 12 parčeta

1 pizza = 650 din

1 čovek = 4 parčeta

1 žurka = 15 ljudi

a) Koliko para treba odvojiti za pizza žurku?

$$\frac{650\ din}{1\ pica} * \frac{1\ pica}{12\ parčeta} * \frac{4\ parčeta}{1\ čovek} * \frac{15\ ljudi}{1\ žurka} = 32250\ din$$

b) Koliko pizza treba naručiti?

$$\frac{1\ pica}{12\ parčeta} * \frac{4\ parčeta}{1\ čovek} * \frac{15\ ljudi}{1\ žurka} = 5\ pica/žurka$$

PRIMER 4

Nakon žurke iz Primera 3 troje je odlučilo da se provoza do Novog Sada i nazad. Koliko para treba svako da odvoji za gorivo i putarine?

BG-NS rastojanje ~ 70km

Potrošnja goriva: 100km ~ 5.5l goriva

Putarina ~ 240din

PRIMER 5

Slobodan pad pod dejstvom zemljine teže

$$f(m, v, g, h) = 0$$

m – masa $\delta(m) = M$

h – visina $\delta(h) = L$

g – ubrzanje $\delta(g) = L/T^2$

v – brzina $\delta(v) = L/T$

• Budući da se masa M ne može poništiti ni sa jednom drugom veličinom, neće se koristiti u funkciji kojom se opisuje slobodan pad ako želimo da konstruišemo korektnu jednačinu

$$\rightarrow f(v, g, h) = 0$$

- Vreme T se pojavljuje na dva mesta, kod brzine i gravitacije (v i g), tako da:

$$\left.\begin{matrix} \delta\left(\frac{v^2}{g}\right) = \frac{\frac{L^2}{T^2}}{\frac{L}{T^2}} = L \\ \delta(h) = L \end{matrix}\right\} \rightarrow \delta\left(\frac{\frac{v^2}{g}}{h}\right) = 1$$

- Izvedena je bezdimenziona veličina, tj. formula zavisnosti fizičkih promenljivih pri slobodnom padu: $\frac{v^2}{gh}$.

Kako je $\frac{v^2}{gh} = const$ sledi da je $v = const\sqrt{gh}$

PRIMER 6

Pretpostavimo da se dva tela, masa m_1 i m_2 , nalaze na rastojanju r i da jedno telo rotira oko drugog. Odrediti period rotacije jednog tela oko drugog (T_R) u funckiju zavisnosti ova dva tela.

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} - \mathit{mase\ tela}\ (M)$$

$$T_R - \mathit{period\ rotacije}\ (T)$$

$$r - \mathit{rastojanje\ između\ dva\ tela}\ (L)$$

$$f(m_1, m_2, T_R, r) = 0$$

Masu može da se eleiminiše deljenjem njihovih veličine, $\frac{m_1}{m_2} = const$. Da li je ovo u redu?

Hajde da uvedemo novu veličinu, gravitacionu konstantu G i nju iskoritisimo za mase tela. Važi:

$$\delta(G) = \frac{L^3}{MT^2}, \quad f_2(m_1, m_2, T_R, r, G) = 0$$

Sada pravimo formulu.

T se nalazi kod G i T_R, dakle $\delta(T_R\sqrt{G}) = \frac{T\sqrt[2]{L^3}}{\sqrt{T^2M}} = \frac{\sqrt[2]{L^3}}{\sqrt{M}} = \frac{L\ \sqrt{L}}{\sqrt{M}} \quad \rightarrow \quad T_R\sqrt{G} = f_3(m_1, m_2, r)$

$\delta\left(\frac{T_R\sqrt{G}}{\sqrt{r^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \rightarrow \quad \frac{T_R\sqrt{G}}{\sqrt{r^3}} = f_4(m_1, m_2)$

$\delta\left(\frac{T_R\sqrt{G}\sqrt{m_i}}{\sqrt{r^3}}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{T_R\sqrt{G}\sqrt{m_i}}{\sqrt{r^3}} = \sqrt{m_i} * f_4(m_1, m_2) = f_5(m_1, m_2) \quad$ f_5 mora da bude bezdimenziono.

$$\frac{T_R\sqrt{G}}{\sqrt{r^3}}\sqrt{m_i} = f_6\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \rightarrow T_R = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_i}f_6\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

BAKINGEMOVA π TEOREMA

$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ - fizičke veličine
M – dimenziona matrica
$p = rangM$

Svaka fizički smislena jednačina sačinjena korišćenjem n različitih fizičkih promenljivih ($f(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n) = 0$) koje su sadržane korišćenjem k međusobno nezavisnih fizičkih veličina, može se predstaviti korišćenjem $p = n - k$ bezdimenzionih parametara, tj. može se zapisati kao $F(\pi_1, \ldots, \pi_{n-p}) = 0$ gde je funkcija F zavisi od $n - p$ bezdimenzionih veličina π_i koje se mogu predstaviti kao :

$$\pi_i = Q_1^{\alpha_{1_i}} * \ldots * Q_n^{\alpha_{n_i}}, \quad i = 1, \ldots, n-p, \ \alpha_{ji} \in Q$$
$$a_i = (\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni})^T \ - \ baza\ prostora\ rešenja\ jednačine\ Ma = 0$$

PRIMER 1 (MATEMATIČKO KLATNO - III NAČIN**)**

Postoje tri fundamnetalne fizičke veličine potrebne za opisivanje kretanja klatna: vreme, masa tega i dužina kanapa, odnosno 4 dimenzionalne veličine: T (period oscilovanja), M (masa klatna), L (dužina kanapa) i g (ubrzanje zemljine teže).
Dakle, za opisivanje kretanja matematičkog klatna potrebno je da se formira 4-3=1 bezdimenzionih veličina.
Neka je

T – period oscilovanja
m - masa tega
l – dužina klatna
g – ubrzanje zemljine teže

$$f(T, m, l, g) = 0$$
$$\delta(T) = T$$
$$\delta(m) = M$$
$$\delta(l) = L$$
$$\delta(g) = L/T^2$$

Neka je $\pi_1 = T^a m^b l^c g^d$
Dakle, $\delta\left(\frac{gT^2}{L}\right) = 1$, odnosno iz relacije $\frac{gT^2}{l} = const$ se dobija da je period oscilovanja klatna $T = const\sqrt{\frac{l}{g}}$.
Konstanta je jednaka 2π.

Do sličnog zaključka je moglo da se dođe korišćenjem Bakingemove π teoreme:

Potrebno je da navedemo sve promenljive koje utiču na naš problem.
Posmatrajmo, pored mase tega, dužine kanapa, vremena i zemljine teže, ugao otklona tega (θ_0). Zatim svaku promenljivu treba da zapišemo preko bazičnih jedinica. Stoga, matrica M, koja odgovara navedenim fizičkim veličinama i jedinicama biće sledećeg oblika:

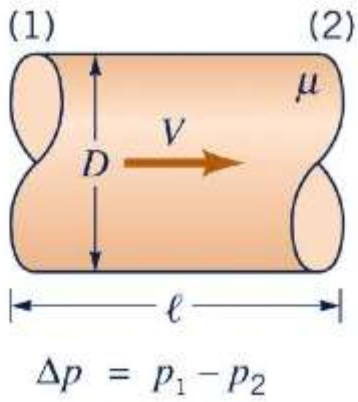
$$M = \begin{array}{c} \\ T \\ M \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \delta(T) & \delta(m) & \delta(l) & \delta(g) & \delta(\theta_0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Kako je rang matrice $rangM = 3$, i sa obzirom da je $n = 5$ veličina uključeno, formiraćemo sistem od $5 - 3 = 2$ bezdimenzione veličine. Rešavamo sistem $Ma = 0$ gde je a vektor dužine 5.
Dakle, imamo dva linearno nezavisna rešenja:

$$T^\alpha \cdot m^\beta \cdot L^\gamma \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^\delta = const \ \rightarrow \ \alpha - 2\delta = 0, \ \gamma + \delta = 0 \ \rightarrow \alpha = 2\delta, \quad \gamma = -\delta$$
$$(2,0,-1,1,0) \ \rightarrow \ \pi_1 = \frac{T^2}{l} g$$
$$(0,0,0,0,1) \ \rightarrow \ \pi_2 = \theta_0$$
$$F\left(\frac{T^2}{l} g, \theta_0\right) = 0 \ \rightarrow \ \frac{T^2}{l} g = \theta_0 \ \rightarrow \ T = \sqrt{\frac{l}{g}\mathbf{g}(\theta_0)}$$

Dakle, period oscilacije zavisi od početnog ugla i dužine klatna.

PRIMER 2



Posmatrajmo problem protoka fluida kroz cev. Označimo pritisak koji fluid stvara u odnosu na cev na početku i kraju cevi sa p_1 i p_2 (tim redom), a promenu pritiska sa Δp. Ako je cev prečnika D i ako intezitet pritiska opada proporcionalno rastojanju l, korišćenjem dimenzione analize opisati promenu inteziteta pritiska fluida u odnosu na cev.

Rešenje:
Neka se promena pritiska Δp može izraziti u funkciji od D, l, v i brzine fluida μ:

$$\Delta p = f(D, l, V, \mu)$$

Dakle, pad pritiska u cevi zavisi od sledećih promenljivih:

- Prečnika cevi (D)
- Dužine cevi (l)
- Brzine kretanja tečnosti (v)
- Gustine tečnosti (μ)

Svaka od navedenih promenljivih može se izraziti u funkciji od sledećih jedinica

- $\delta(D) = m \quad \{L \ \to dužina\}$
- $\delta(l) = m \quad \{L\}$
- $\delta(v) = \frac{m}{s} \quad \{LT^{-1} \ \to dužina/vreme\}$
- $\delta(\mu) = N \cdot \frac{s}{m^2} \qquad \{ML^{-1}T^{-1} \quad \to \frac{masa}{dužina \cdot vreme}$, jer je $N = kg \cdot \frac{m}{s^2} = masa \cdot \frac{dužina}{vreme^2}$ (Njutn)$\}$
- $\delta(\Delta p) = \frac{N}{m^2} \qquad \{ML^{-1}T^{-2}\}$

Treba da odredimo broj π jednačina:

$$n = 5 \quad (\Delta p, D, l, v, \mu)$$
$$k = 3 \ (M, L, T)$$

Dakle, $r = n - k = 2$

Kombinovaćemo nezavisne promenljive: D, v i μ sa Δp i l kako bismo napravili dve međusobno nezavisne dimenzione promenljive

$$\pi_1 = D^a v^b \mu^c \Delta p,$$
$$\delta(\pi_1) = (L)^a (LT^{-1})(ML^{-1}T^{-1})^c (ML^{-1}T^{-2}) =$$
$$= M^{c+1} L^{a+b-c-1} T^{-b-c-2} = M^0 L^0 T^0$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$c + 1 = 0$$
$$a + b - c - 1 = 0$$
$$-b - c - 2 = 0$$

dobiće se da je $a = 1, b = -1, c = -1$

$$\pi_1 = DV^{-1}\mu^{-1}\Delta p = \frac{\Delta p D}{\mu v}$$

Formiramo drugu jednačinu

$$\pi_2 = D^a V^b \mu^c l$$
$$\delta(\pi_2) = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-1}T^{-1})^c (L)$$
$$= M^c L^{a+b-c+1} T^{-b-c} = M^0 L^0 T^0$$

Rešavanjem sistema dobija se da je

$$a = -1, b = 0, c = 0$$
$$\pi_2 = D^{-1} V^0 \mu^0 l = \frac{l}{D}$$

Proverićemo da li su π_1 i π_2 dobro određene:
Izrazimo ih u funkciji od promenljivih F, L i T (inače, da smo u startu imali promenljive koje zavise od ovih veličina, izrazili bi ih u funkciji od M, L i T):

$\delta(\Delta p) = \frac{N}{m^2} \ \left\{\frac{F}{L^2}\right\},$

$\delta(\mu) = N \cdot \frac{s}{m^2} \ \left\{\frac{FT}{L^2}\right\}$,
$\delta(D) = m \ \ \{L\}$,
$\delta(v) = \frac{m}{s} \quad \left\{\frac{L}{T}\right\}$

$\pi_1 = \frac{\Delta pD}{\mu v}, \quad \delta(\pi_1) = \frac{(FL^{-2})(L)}{(FTL^{-2})(LT^{-1})} = F^0L^0T^0$
$\pi_2 = \frac{l}{D}, \quad \delta(\pi_2) = \frac{L}{L} = F^0L^0T^0$

Najzad, korišćenjem bezdimenzionih promenljivih dobija se da je

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

Odnosno da je

$$\frac{\Delta pD}{\mu v} = f\left(\frac{l}{D}\right)$$

Dakle, ako je promena pritiska srazmerna rastojanju, dobija se da je

$$\frac{\Delta pD}{\mu v} = C \cdot \frac{l}{D}, \ \ C = const$$

PRIMER 3 ATOMSKA BOMBA

Korišćenjem dimenzione analize odrediti energiju koju će atomska bomba osloboditi nakon eksplozije. Imajući u vidu da se radijus koji eksplozija zauzima menja tokom vremena, neka je $R(t)$ poluprečnik eksplozivne lopte u trenutku t, ρ gustina okolnog vazduha, E oslobođena energija i P pritisak vazduha.

Rešenje:

Neka je $R = f(t, E, \rho_0, P_0)$. Promenljive t, E, ρ_0 i P_0 mogu se izraziti u dimenzionim jedinicama za vreme (T) izraženu u s, dužinu (L) izraženu u metrima i M (masu) izraženu u kg. Tada važi
$\delta(t) = T$
$\delta(R) = L$
$\delta(E) = ML^2T^{-3}$
$\delta(\rho_0) = ML^{-3}$
$\delta(P_0) = ML^{-1}T^{-2}$

Sa obzirom da se matematički model sastoji iz 5 veličina sačinjenih iz 3 jedinice, potrebno je da se formira $5 - 3 = 2$ međusobno nezavisih bezdimenzionih veličina:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \delta(t) & \delta(R) & \delta(E) & \delta(\rho_0) & \delta(P_0) \end{array} \\ M = \begin{array}{c} T \\ L \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rešavanjem sistema $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ odnosno

$$a - 3c - 2e = 0$$
$$b + 2c - 3d - e = 0$$
$$c + d + e = 0$$

dobijaju se sledeće vrednosti:

$$e = proizvoljno, d = proizvoljno$$
$$a = -3d - e$$
$$b = 5d + 3e$$
$$c = -d - e$$

Neka je $e = 1, d = 0$. Tada je $a = -3, b = 5, c = -1 \ \ \pi_1 = \frac{R^5\rho_0}{t^3E}$

Neka je $e = 0, d = 1$. Tada je $a = -1, b = 3, c = -1$ $\pi_2 = \frac{R^3 P_0}{tE}$
Najzad, dobija se da je

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

odnosno

$$\frac{R^5 \rho_0}{t^3 E} = f\left(\frac{R^3 P_0}{tE}\right)$$

pri čemu je funkcija f nepoznata.

Primetio da se iz π_1 može izraziti E:

$$E = c \cdot \frac{R^5 \rho}{t^2}$$

Zamenom u izraz za π_2 dobija se da je

$$\pi_2 = \frac{R^3 P_0}{tc \cdot \frac{R^5 \rho}{t^2}} = c_2 \frac{t P_0}{c R^2 \rho} = \frac{\bar{c} t P_0}{R^2 \rho}, \bar{c} = \frac{c_2}{c}$$

Čime se dobija izraz za energiju

$$E = \frac{R^5 \rho}{t^3} f^{-1}\left(\frac{\bar{c} t P_0}{R^2 \rho}\right)$$

PRIMER 4 (SNAGA POTREBNA DA SE POVUČE TERETNJAK)
Sa papira

PRIMER 5 UČESTALOST DISANJA MALIH I VELIKIH ŽIVOTINJA
Sa papira

PRIMER 6 KAKO ISPEĆI ĆURKU
Sa papira

PRIMER 6

Izraziti promenu pritiska fluida u horizontalnoj cevi . Kako ovi rezultati utiču na

Rešenje:

Formiramo model koji zavisi od:

- Promene pritiska
- Gustine fluida
- Brzine kretanja fluida
- Prečnika cevi
- k_s toplotnu provodljivost
- Mu

Koje se mogu izraziti preko sledećih jedinica

- $\delta(\Delta p) = \frac{\left[\frac{sila}{površina}\right]}{dužina} = \frac{MLT^{-2}L^{-2}}{L} = ML^{-2}T^{-2}$
- $\delta(\rho) = ML^{-3}$
- $\delta(v) = LT^{-1}$
- $\delta(D) = L$
- $\delta(k_s) = L$
- $\delta(\mu) = ML^{-1}T^{-1}$

Model se sastoji iz 6 promenljivih ($n = 6$) koje su formirane korišćenjem $m = 3$ nezavisne promenljive. Dakle, treba da napravimo 3 međusobno nezavisne bezdimenzione jednačine.