MATEMATIČKI FAKULTET, BEOGRAD

NUMERIČKA ANALIZA IIa

VEŽBE -

MARIJA IVANOVIĆ
10-9-2019

Obične diferencijalne jednačine – Košijevi problemi

Posmatramo običnu diferencijalnu jednačinu (ODJ)

$$u^{(m)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}) \qquad (1)$$

Uvodjenjem smene $u_k(x) = u^{(k)}(x)$, jednačina (1) se može prevesti na sistem od *m* diferencijalnih jednačina:

$$u_k'(x) = u_{k+1}(x)\,, \quad k = 0, \dots, m-2$$
$$u_{m-1}'(x) = f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$$

Na ovaj način, umesto rešavanja jedne jednačine *m*-tog stepena, problem se svodi na sistem od *m* jednačina prvog reda.

Zadavanjem m uslova dobija se rešenje problema koje je partikularno. Ako sus vi uslovi zadti u jednoj tački problem se naziva Košijevim.

- ✓ Numeričkim metodama se najčešće dobijaju približne vrednosti, sa tim da se mogu dobiti i tačne vrednosti rešenja.
- ✓ Rešenja se najčešće dobijaju u obliku tabele
- ✓ Metode se mogu primeniti samo za korektno postavljene probleme
- ✓ Problem treba da je dobro uslovljen (male promene ulaznih parametara uzrokuju male promene rešenja)

Neke analitičke metode za rešavanje ODJ

Rešavanje Košijevog problema se dobija kao granica niza funkcija u_n pri čemu se funkcije $u_n(x)$ izražavaju elementarnim funkcijama i njihovim integralima.
Ako se zadržimo na konačnom *n* dobijamo aproksimativni izraz za rešavanje problema $u(x)$.

Na ovom kursu, obradićemo:

- ✓ Metodu uzastopnih aproksimacija
- ✓ Metodu Tejlorovog razvoja
- ✓ Metodu stepenih redova

Metoda uzastopnih aproksimacija (Pikardova teorema)

Posmatramo diferencijalnu jednačinu 1. stepena:

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big) \tag{2}$$

Diferenciranjem jednačine (2) dobijamo njoj ekvivalentnu integralnu jednačinu

$$u(x) = u_0(x) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u(t)\big)dt, \tag{3}$$

odnosno, dobijamo jednačinu oblika

$$u(x) = F(x) \tag{3*}$$

na koju se može primeniti metoda uzastopnih aproksimacija:

$$u_0 = u(x_0)$$

$$u_{n+1} = u_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, u_n(t)\big)dt\,, \quad n = 0,1,2, \dots \tag{4}$$

Niz rešenja $\{u_n\}$ sistema (4) konvergira ka rešenju problema (2).

Ocena greške:

Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme o jedinstvenosti Košijevog problema i neka je $u(x)$ rešenje Košijevog problema i niz $\{u_n\}$ definisan formulom (4). Tada za svako $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ važi

$$|u_n(x) - u(x)| \le ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0,1,2 \dots$$

Gde je

$$D = \{(x,u) \in R^2, |x - x_0| \le a, |u - u_0| \le b\,, a, b > 0\}$$

$$(\exists M > 0)(\forall (x,u) \in D)\ |f(x,u)| \le M$$

$$(\exists L \ge 0)(\forall\ (x,u_1),(x,u_2)\ \in D)\ |f(x,u_1) - f(x,u_2)| \le L|u_1 - u_2|$$

Odnosno, $\|u_n(x) - u(x)\| \approx \|u_n(x) - u_{n-1}(x)\|$.

PRIMER 1

Metodom uzastopnih aproksimacija odrediti rešenja sledećih Košijevih problema:

a) $u'(x) = 2x(1 + u(x))$
$u(0) = 0$

Rešenje:

Primetimo prvo da $f(x,u) = 2x(1+u) \in C(R^2)$ i $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = 2x \in C(R^2)$ zadovoljavaju uslove Pikardove teoreme (za bilo koji pravougaonik).

Računamo formalno Pikardove iteracije:

$$u_0(x) = u(0) = 0$$

$$u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x 2t(1 + u_0(t))dt = 0 + \int_0^x 2t(1+0)dt = x^2$$

$$u_2(x) = u_0(x) + \int_0^x 2t(1 + u_1(t))dt = 0 + \int_0^x 2t(1+t^2)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

$$u_3(x) = u_0(x) + \int_0^x 2t(1 + u_2(t))dt = 0 + \int_0^x 2t\left(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4\right)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2*3}x^6$$

Matematičkom indukcijom se može pokazati da je

$$u_n(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2*3}x^6 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)}.$$

Budući da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = e^{x^2} - 1$$

lako se može zaključiti da je rešenje $u(x)$ definisano na celom skupu R i da je $u(x) = e^{x^2} - 1$.

b) $u'(x) = 1 + u^2(x)$
$u(0) = 0$

Rešenje:
Slično kao i kod dela pod a) primetimo da je $f \in C(R^2)$ i da je $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) \in C(R^2)$. Dakle uslovi Pikardove teoreme su ispunjeni. Računamo Pikardove iteracije.

Dobija se da je $u(x) = tg(x)$. Maksimalni interval egzistencije rešenja je $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $u'(x) = (u(x))^{1/3}$
$u(0) = 0$

Rešenje:
Primetimo prvo da funkcija $f(x,u) = u^{1/3}$, odnosno $f'(x,u) = \frac{1}{3}u^{-2/3}$ ima prekide u nuli. Dakle Lipšicov uslov funkcije f treba da se proveri direktno po definiciji. Iz jednakosti

$$u - v = \left(u^{1/3} - v^{1/3}\right)\left(u^{2/3} + v^{2/3} + u^{1/3}v^{1/3}\right)$$

se vidi da f nije Lipšic-neprekidna u okolini nule, te Pikardova teorema nije primenljiva na ovaj problem.

d) Odrediti rešenje Košijevog problema na odsečku [0,0.3] sa tačnošću $\varepsilon = 5 * 10^{-3}$
$u_1' = x + u_1 u_2, \quad u_1(0) = 1$
$u_2' = x^2 - {u_1}^2, \quad u_2(0) = 1/2$

Rešenje (zadatak je iz zbirke Numeričke metode):
Početna aproksimacija $u^{(0)}$ bira se tako da su njena vrednost i vrednost prvog izvoda u tački $x = 0$ jednake sa odgovarajućim vrednostima funkcije $u(x)$:

$$u_1'(0) = 0 + u_1(0)u_2(0) = 0 + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$u_2'(0) = 0^2 - u_1(0)^2 = -1$$

Dakle, dobija se da je

$$u_1^{(0)}(x) = \frac{1}{2}x + 1 \ \ (u_1'(0) = \frac{1}{2}, u_1(0) = 1)$$
$$u_2^{(0)}(x) = -x + \frac{1}{2} \ \ (u_2'(0) = -1, u_2(0) = \frac{1}{2})$$

Dalje se prema iterativnoj formuli dobija da je

$$u_1^{(1)} = u_1^{(0)} + \int_0^x \left(t + \left(\frac{1}{2}t + 1\right)\left(-t + \frac{1}{2}\right)\right)dt = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$
$$u_2^{(1)} = u_2^{(0)} + \int_0^x \left(t^2 - \left(\frac{1}{2}t + 1\right)^2\right)dt = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$$
Proverimo da li prva aproksimacija zadovoljava traženu tačnost
$$\max_{[0,0.3]} |u_1^{(1)} - u_1^{(0)}| = \max_{[0,0.3]} \left|-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{8}\right| = 0.012 > \varepsilon$$
Određujemo vrednost najredne iteracije:
$$u_1^{(2)} = u_1^{(0)} + \int_0^x \left(t + \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} + 1\right)\left(\frac{t^3}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right)\right)dt$$
$$= -\frac{x^7}{168} + \frac{11x^6}{168} + \frac{11x^5}{240} - \frac{5x^4}{96} - \frac{5x^3}{16} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$
$$u_2^{(1)} = u_2^{(0)} + \int_0^x \left(t^2 - \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{8} + \frac{t}{2} + 1\right)^2\right)dt =$$
$$= -\frac{x^7}{252} + \frac{x^6}{144} + \frac{29x^5}{960} + \frac{5x^4}{96} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$$
Tačnost je postignuta:
$$\max_{[0,0.3]} |u_1^{(2)} - u_1^{(1)}| \leq 0.00436 < \varepsilon$$
$$\max_{[0,0.3]} |u_2^{(2)} - u_2^{(1)}| \leq 0.00225 < \varepsilon$$

PRIMER 2

Metodom uzastopnih aproksimacija, sa tačnošću 5*10^{-5}, približno odrediti rešenje Košijevih problema:

$u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = 8$
$u(0) = 0$
$u'(0) = 0$

Rešenje:
Integraljenjem jednačine na intervalu $[0, t]$ i uzimajući u obzir početne uslove dobija se jednačina
$$u'(t) + 4u(t) + 4\int_0^t u(k)dk = 8t$$
Ponovnim integraljenjem na interval $[0, x]$ dalje se dobija da je
$$u(x) + 4\int_0^x u(t)dt + 4\int_0^x \int_0^t u(k)dkdt = 4x^2$$
Imajući u vidu da je
$$\int_0^x \int_0^t u(k)dkdt = \int_0^x (x - t)u(t)dt$$
Metodom uzastopnih aproksimacija definisanom rekurentnom formulom
$$u_0(x) = 4x^2$$
$$u_{n+1}(x) = 4x^2 - 4\int_0^x (1 + x - t)u_n(t)dt \ , n = 0,1,2, \dots$$

dobijaju se sledeće iteracije

$$u_1(x) = \frac{4}{3}(-x + 3x^2 - 4x^3)$$

$$u_2(x) = \frac{4}{45}(45x^2 - 60x^3 + 45x^4 + 24x^5 + 2x^6)$$

...

Metoda Tejlorovog razvoja

Posmatramo Košijev problem

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big), \qquad (5)$$
$$u(x_0) = u_0.$$

Ideja metode je da se primeni Tejlorov razvoj na rešenje Košijevog problema (5) u okolini neke izabrane tačke.

Neka je niz $\{x_n\}$ tačaka definisan sa $x_n = x_0 + nh$ pri čemu je $h > 0$. Tada, primenom Tejlorove formule, dobijamo

$$u(x_{n+1}) = u(x_n + h) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \cdots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}u^{(p+1)}(x_n)$$

Uvodimo oznake:

$$u'(x) = f(x, u) = f^0(x, u)$$
$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)u'(x) = f^1(x, u)$$
$$u'''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, u) + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial u}(x, u)u'(x) + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}(x, u) = f^2(x, u)\ldots$$

i zračunamo vrednosti $u'(x_0), u''(x_0), u'''(x_0)$ ...

<u>Približno rešenje problema se tada može zapisati na sledeći način:</u>

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \qquad (6)$$

za $|x - x_0| \le R$, gde je R poluprečnik konvergencije reda $\sum_{j=0}^{n} \frac{u^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$.

PRIMER 3

Metodom Tejlorovog razvoja odrediti približno rešenje Košijevog problema

$$u'(x) = x^2 + u(x)^2$$
$$u(0) = 1$$

Rešenje

Budući da je funkcija $f(x, u) = x^2 + u^2$ analitička u tački (0,1) na osnovu Teoreme sledi da postoji jedinstveno rešenje koje je analizičko u tački $x_0 = 0$ zadatog Košijevog problema.

Na osnovu

$$u'(x) = x^2 + u(x)^2$$

se mogu odrediti izvodi višeg reda:

$$u' = x^2 + u^2 \qquad u'(0) = x_0^2 + u(0)^2 = 1$$
$$u'' = 2x + 2uu' \qquad u''(0) = 2x_0 + 2u(0)u'(0) = 2$$
$$u''' = 2 + 2uu'' + 2(u')^2 \qquad u'''(0) = 2 + 2u(0)u(0)'' + 2(u(0)')^2 = 8$$
$$u^{(4)} = 2uu''' + 6u'u'' \qquad u^{(4)}(0) = 2u(0)u(0)''' + 6u(0)'u(0)'' = 28$$

Zamenom dobijenih vrednosti u Tejlorov razvoj

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{u''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{u'''(0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

dobija se sledeće

$$u(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 \dots$$

PRIMER 4

Metodom Tejlorovog razvoja odrediti približno rešenje Košijevog problema

$$u'(x) = x^2 + u(x)$$
$$u(1) = 1$$

Rešenje

Budući da je funkcija $f(x, u) = x^2 + u$ analitička u tački (1,1) na osnovu Teoreme sledi da postoji jedinstveno rešenje koje je analizičko u tački $x_0 = 1$ zadatog Košijevog problema.

Na osnovu

$$u'(x) = x^2 + u(x)$$

se mogu odrediti izvodi višeg reda:

$$u' = x^2 + u \qquad u'(1) = x_0^2 + u(1) = 2$$
$$u'' = 2x + u' \qquad u''(1) = 2x_0 + u'(1) = 4$$
$$u''' = 2 + u'' \qquad u'''(1) = 2 + u(1)'' = 6$$
$$u^{(4)} = u''' \qquad u^{(4)}(1) = u(1)''' = 6$$
$$u^{(k+1)} = u^{(k)}$$

Zamenom dobijenih vrednosti u Tejlorov razvoj

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{u''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{u'''(0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

dobija se sledeće

$$u(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x - 1) + \frac{4}{2!}(x - 1)^2 + 6\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{(x - 1)^k}{k!}$$

Uzimanjem samo konačno mnogo članova reda dobili bismo približno rešenje polaznog problema, međutim u ovom slučaju možemo da odredimo tačno rešenje problema:

$$u(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x - 1) + \frac{4}{2!}(x - 1)^2 + 6\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x - 1)^k}{k!} - 1 - \frac{x - 1}{1!} - \frac{(x - 1)^2}{2!}\right)$$
$$= 6e^{x-1} + 1 + 2(x - 1) + 2(x - 1)^2 - 6\left(1 + (x - 1) + \frac{(x - 1)^2}{2}\right) =$$
$$= 6e^{x-1} - x^2 - 2x - 2$$

PRIMER 5

Metodom Tejlorovog razvoja odrediti približno rešenje Košijevog problema

$$u'(x) = u(x) + 3x^2 - x^3$$
$$u(1) = 1$$

Rešenje

Budući da je funkcija $f(x,u) = u + 3x^2 - x^3$ analitička u tački (1,1) na osnovu Teoreme sledi da postoji jedinstveno rešenje koje je analizičko u tački $x_0 = 1$ zadatog Košijevog problema.

Na osnovu

$$u'(x) = u + 3x^2 - x^3$$

se mogu odrediti izvodi višeg reda:

$$u' = u + 3x^2 - x^3 \qquad u'(1) = u(1) + 3x^2 - x^3 = 3$$
$$u'' = u' + 6x - 3x^2 \qquad u''(1) = u(1)' + 6x - 3x^2 = 6$$
$$u''' = u'' + 6 - 6x \qquad u'''(1) = u(1)'' + 6 - 6x = 6$$
$$u^{(4)} = u''' - 6 \qquad u^{(4)}(1) = u(1)''' - 6 = 0$$
$$u^{(5)} = u^{(4)} \qquad u^{(k+1)}(1) = u(1)^{(k)} = 0, k = 5,6, \ldots$$

Zamenom dobijenih vrednosti u Tejlorov razvoj

$$u(x) = u(1) + \frac{u'(1)}{1!}(x - x_0) + \frac{u''(1)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{u'''(1)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

dobija se sledeće

$$u(x) = 1 + \frac{3}{1!}(x - 1) + \frac{6}{2!}(x - 1)^2 + 6(x - 1)^3 = x^3$$

što je i tačno rešenje.

PRIMER 6

Odrediti prva tri člana razvoja u Tejlorov red rešenja sistema jednačina

$$u_1'(x) = u_1(x) * \cos(x) - u_2(x) * \sin(x), \;\; u_1(0) = 1$$
$$u_2'(x) = u_1(x) * \sin(x) + u_2(x) * \cos(x), \;\; u_1(0) = 0$$

Rešenje

Slično kao i kod prethodnih zadataka, iz datih jednačina se dobija da je $u_1'(0) = 1$, $u_2'(0) = 0$, odnosno

$$u_1''(x) = (u_1' - u_2)\cos(x) - (u_1 + u_2')sin\,(x), \quad u_1''(0) = 1$$
$$u_2''(x) = (u_1' - u_2)\sin(x) + (u_1 + u'_2)\cos\,(x), \quad u_2''(0) = 1$$

$$u_1'''(x) = (u_1'' - 2u_2' - u_1)\cos(x) - (u''_2 + 2u'_1 - u_2)\sin\,(x), \;\; u_1'''(0) = 0$$
$$u_2'''(x) = (u_1'' - 2u'_2 - u_1)\sin(x) + (u_2'' + u_2)\cos\,(x), \quad u_2'''(0) = 3.$$

$$u_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$
$$u_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Metoda stepenih redova

Posmatramo Košijev problem

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x)$$
$$u(x_0) = u_0$$
$$u'(x_0) = u_0{}'$$

Pri čemu pretpostavljamo da se funkcije $p(x), q(x)\ i\ f(x)$ mogu prevesti u stepene redove:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$$
$$q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$$

Rešenje tražimo u obliku stepenog reda

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Odakle diferenciranjem dobijamo i razvoje funkcija

$$u'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j x^{j-1}$$
$$u''(x) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2}$$

Zamenom u početnu jednačinu, uz uslove $u(x_0) = c_0$, $u(x_1) = c_1$, dobijamo i ostale koeficijente c_k.

PRIMER 7

Metodom stepenih redova odrediti Košijevo rešenje problema

a) $$u''(x) - xu'(x) + u(x) = 1 - cosx$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(0) = 1$$

Rešenje:

$$c_{j+2} = \frac{j-1}{(j+2)(j+1)} c_j, j = 1,3,5, \dots ,2n-1$$
$$c_1 = 1, c_3 = c_5 = \cdots = c_{2n-1} = 0$$
$$c_{j+2} = \frac{(j-1)c_j + \frac{(-1)^{j-1}}{(2j)!}}{(j+2)(j+1)} c_j, j = 2,4,6, \dots ,2n$$
$$c_2 = 0, c_4 = -\frac{1}{288}, \dots$$

Dobija se sledeći sistem:

$$2c_2 + c_0 = 0$$
$$6c_3 = 0$$
$$12c_4 - c_2 = \frac{1}{2}$$
$$20c_5 - 2c_3 = 0$$
$$30c_6 - 3c_4 = -\frac{1}{24}$$

čije se rešenje dobija na osnovu početnih uslova

$$c_0 = u(0) = 0, c_1 = u;(0) = 1, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = \frac{1}{24}, c_5 = 0,, c_6 = \frac{1}{360}$$

Aproksimacija rešenja polinomom šestog stepena je sledeća

$$u(x) = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{360}x^6$$

b) $(1 - \alpha x)u''(x) + \alpha^2 x u'(x) - \alpha^2 u(x) = 0$

$u(0) = 0$

$u'(0) = \alpha$

Rešenje:

Rešenje tražimo u obliku stepenog reda $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$c_{j+2} = \frac{\alpha(j+1)jc_{j+1} - \alpha^2(j-1)c_j}{(j+2)(j+1)}, j = 1,2, \dots$$

$$c_0 = 1, c_1 = \alpha, \dots, c_n = \frac{\alpha^n}{n!}$$

Na osnovu početnih uslova dobija se da je $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha x}$.

c) $xu''(x) - (x+n)u'(x) + nu(x) = 0$

gde je *n* dati prirodni broj.

Za vežbu.

Ojlerova metoda

Mnoge diferencijalne jednačine poput $y' = ce^{x^2},\ c = const$ i $y' = ax^2 + by^2,\ a, b = const$ se ne mogu rešiti eksplicitnim metodama. Kako se broj i složenost takvih jednačina povećava, jedan od načina da se dobijene jednačine reše jesu aproksimativne metode. Najjednostavnija takva metoda naziva se Ojlerovom metodom (eng. Euler's method).

Neka je $\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$ data diferencijalna jednačina i neka su početni uslovi $y = y_0$ za $x = x_0$. Odnosno, neka je poznato početno rešenje (x_0, y_0) i izvod funkcije u svim tačkama (x, y), slika 1. Obeležimo tačku x_0 na x-osi, a zatim obeležimo i tačke $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tako da važi $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Neka su tačke ekvidistantno raspoređene, odnosno neka je $h = x_{i+1} - x_i$. Korišćenjem Ojlerove metode, mogu se lako odrediti približne vredosti Košijevog zadatka u tačkama x_i. Formula se dobija integraljenjem Njutn-Lajbnicove formule u garnicama od x_i do x_{i+1}

$$y(x + h) = y(x) + \int_x^{x+h} f\big(t, y(t)\big)dt = y(x) + hf\big(x, y(x)\big) + o(h^2)$$

Algoritam je sledećeg oblika:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$$
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

Na ovaj način dobija se vrednost problema u tački (x_1, y_1).

Ponavljanjem postupka, dobićemo vrednost funkcije u tački (x_n, y_n).

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$
$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$$
$$\dots$$
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Ako uzmemo da su $y_1, y_2, \dots, y_n$ približne vrednosti dobijene Ojlerovom metodom, a $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ tačne vrednosti polaznog problema, tada je greška pri i-toj iteraciji

$$greška = |y_i - y(x_i)|$$

Ono što možemo da primetimo je da se greška povećava sa brojem iteracija.

Ovako definisana metoda naziva se EKSPLICITNOM METODOM

PRIMER 8

Približno odrediti rešenje Košijevog problema na intervalu $x \in [0{,}0.5]$ sa korakom $h = 0{,}1$. Uporediti tačno rešenje problema sa približnim.

$$y' + 2y = 2 - e^{-4x},\ \ y(0) = 1$$

Rešenje:

Tačno rešenje problema je $y(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

Da bi koristili Ojlerov metod, prvo ćemo transformisati jednačinu $y' = 2 - 2y - e^{-4x}$

To znači da je $f(x,y) = 2 - 2y - e^{-4x}$. Dalje, imamo da je $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$f_0 = f(0{,}1) = 2 - e^{-4*0} - 2*1 = -1$$
$$y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0{,}1*(-1) = 0{,}9$$

Dakle, za $x_1 = 0{,}1$ imamo da je $y_1 = 0{,}9$

Na sledećem koraku imamo

$$f_1 = f(0.1, 0{,}9) = 2 - e^{-4*0.1} - 2*0{,}9 = -0{,}470320046$$
$$y_2 = y_1 + hf_1 = 0{,}9 + (0{,}1)(-0{,}470320046) = 0{,}852967995$$

Dakle, za $x_2 = 0{,}2$ imamo da je $y_2 = 0{,}852967995$

I tako redom:

$$f_2 = -0{,}155264954 \qquad y_3 = 0{,}8374415005$$
$$f_3 = 0{,}032922788 \qquad y_4 = 08398833779$$
$$f_4 = 0{,}1184359245 \qquad y_5 = 0{,}851677371$$

Konačno: pregled tačne, približne vrednosti i odstupanja od greške:

x	Aproksimacija	Tačna vrednost	Greška
x_0= 0	y_0 =1	*y(0)* = 1	0 %
x_1 = 0.1	y_1 =0.9	*y(0.1)* = 0.925794646	2.79 %
x_2 = 0.2	y_2 =0.852967995	*y(0.2)* = 0.889504459	4.11 %
x_3 = 0.3	y_3 =0.837441500	*y(0.3)* = 0.876191288	4.42 %
x_4 = 0.4	y_4 =0.839833779	*y(0.4)* = 0.876283777	4.16 %
x_5 = 0.5	y_5 =0.851677371	*y(0.5)* = 0.883727921	3.63 %

gde smo grešku računali po sledećoj formuli

$$procenat\ greške = \frac{|tačna\ vrednost - približna\ vrednost|}{tačna\ vrednost}100.$$

Možemo da primetimo da je najveće odstupanje od tačne vrednosti 4,42% što i nije „prevelika“ greška. Kako da popravimo aproksimaciju?

Ponovićemo postupak, ali ovog puta sa korakom koji je nešto manji i uporediti dobijene rezultate.

Neka su $h = 0{,}1, h = 0{,}05, h = 0{,}01, h = 0{,}005$ i $h = 0{,}001$. Za $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ i $x = 5$ dobijamo sledeću tablicu:

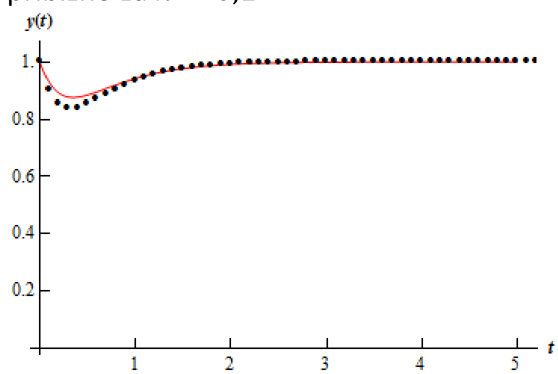
Aproksimacija

	tačna vrednost	***h* = 0.1**	***h* = 0.05**	***h* = 0.01**	***h* = 0.005**	***h* = 0.001**
x= 1	0.9414902	0.9313244	0.9364698	0.9404994	0.9409957	0.9413914
x = 2	0.9910099	0.9913681	0.9911126	0.9910193	0.9910139	0.9910106
x = 3	0.9987637	0.9990501	0.9988982	0.9987890	0.9987763	0.9987662
x = 4	0.9998323	0.9998976	0.9998657	0.9998390	0.9998357	0.9998330
x = 5	0.9999773	0.9999890	0.9999837	0.9999786	0.9999780	0.9999774

Greška u procentima

	***h* = 0.1**	***h* = 0.05**	***h* = 0.01**	***h* = 0.005**	***h* = 0.001**
x = 1	1.08 %	0.53 %	0.105 %	0.053 %	0.0105 %
x = 2	0.036 %	0.010 %	0.00094 %	0.00041 %	0.0000703 %
x = 3	0.029 %	0.013 %	0.0025 %	0.0013 %	0.00025 %
x = 4	0.0065 %	0.0033 %	0.00067 %	0.00034 %	0.000067 %
x = 5	0.0012 %	0.00064 %	0.00013 %	0.000068 %	0.000014 %

Primetimo sledeće: Umanjivanjem koraka za 10x umanjili smo i grešku skoro 10x.
Sledi slika rešenja, tačno rešenje i pribižno za $h = 0{,}1$



PRIMER 9

Približno odrediti rešenje Košijevog problema u tačkama $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ i $x = 5$. Računati sa koracima $h = 0{,}1, h = 0{,}05, h = 0{,}01, h = 0{,}005$ i $h = 0{,}001$. Uporediti tačno rešenje problema sa približnim.

$$y' - y = -\frac{1}{2}e^{x/2}\sin(5x) + 5e^{x/2}\cos(5x), \quad y(0) = 0$$

Rešenje
Rešenje diferencijalne jednačine je $y(x) = e^{x/2}\sin(5x)$.
Postupak rešavanja isti kao i u prethodnom primeru.
Slede tabele:

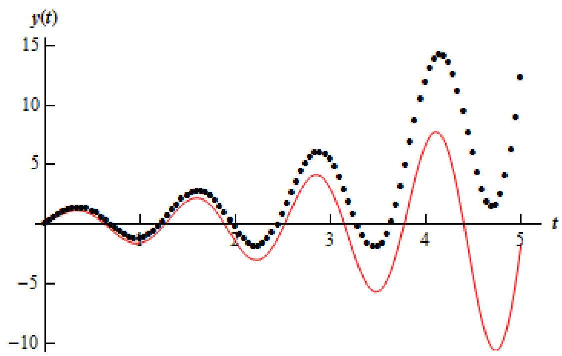
Aproksimacija

	Tačno rešenje	***h* = 0.1**	***h* = 0.05**	***h* = 0.01**	***h* = 0.005**	***h* = 0.001**
x = 1	-1.58100	-0.97167	-1.26512	-1.51580	-1.54826	-1.57443
x = 2	-1.47880	0.65270	-0.34327	-2.18657	-1.35810	-1.45453
x = 3	2.91439	7.30209	5.34682	3.44488	3.18259	2.96851
x = 4	6.74580	15.56128	11.84839	7.89808	7.33093	6.86429
x = 5	-1.61237	21.95465	12.24018	1.56056	0.0018864	-1.28498

Procena greške

	h = 0.1	h = 0.05	h = 0.01	h = 0.005	h = 0.001
x = 1	38.54 %	19.98 %	4.12 %	2.07 %	0.42 %
x = 2	144.14 %	76.79 %	16.21 %	8.16 %	1.64 %
x = 3	150.55 %	83.46 %	18.20 %	9.20 %	1.86 %
x = 4	130.68 %	75.64 %	17.08 %	8.67 %	1.76 %
x = 5	1461.63 %	859.14 %	196.79 %	100.12 %	20.30 %

Grafik za $h = 0{,}05$ i tačno rešenje



Implicitna Ojlerova metoda

$u_{j+1}^{*} = u_j + hf(x_j, u_j)$ (Ojlerova eksplicitna metoda)

$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left(f(x_j, u_j) + f\left(x_{j+1}, u_{j+1}^{*}\right)\right)$

PRIMER 10

Na intervalu [0,1] sa koracima $h = 0.2$ i $h = 0.1$ implicitnom Ojlerovom metodom približno odrediti rešenje Košijevog problema

$$y' = 0.2y^2 - x^2$$
$$y(0) = 1$$

Rešenje:

Koristimo formule:

$$y_{j+1}^* = y_j + hf\left(x_j, y_j\right) = y_j + h(0.2{y_j}^2 - {x_j}^2)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f\left(x_j, y_j\right) + f\left(x_{j+1}, y_{j+1}^*\right)\right) = y_j + \frac{h}{2}\left(0.2{y_j}^2 - {x_j}^2 + 0.2{y_{j+1}^*}^2 - {x_{j+1}}^2\right)$$

Tablično rešenje:

$h = 0.2$

i	*x*	*y*	*y**
0	*0*	1	
1	0.2	1.036808	1.02
2	0.4	1.0605387	1.05430742
3	*0.6*	1.05380476	1.06703355
4	0.8	0.99764746	1.04001485
5	1	0.87173876	0.95355347

$h = 0.1$

i	x	y	y*
0	*0*	1	
1	0.1	1.019701	1.01
2	0.2	1.03819964	1.0295989
3	*0.3*	1.05343986	1.04697823
4	0.4	1.063274	1.06003721
5	0.5	1.06545544	1.06657952
6	0.6	1.05763489	1.06430739
7	*0.7*	1.03736305	1.05082081
8	0.8	1.00210234	1.02362427
9	0.9	0.94925126	0.98014443
10	1	0.87618491	0.91776204

PRIMER 11

Na intervalu [0,1] sa koracima $h = 0.2$ i $h = 0.1$ implicitnom Ojlerovom metodom približno odrediti rešenje Košijevog problema

$$y' = e^y x - x^2$$
$$y(0) = 1$$

Rešenje:

Koristimo formule:

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(e^{y_i}x_i - x_i^2)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)\right) = y_i + \frac{h}{2}\left(e^{y_i}x_i - x_i^2 + e^{y_{i+1}^*}x_{i+1} - x_{i+1}^2\right)$$

Tablično rešenje:

$h = 0.2$

i	**x**	***y***	***y****
0	*0*	1	
1	0.2	1.2303543	1.1
2	0.4	1.5659992	1.37663012
3	0.6	2.07261537	1.78361883
4	0.8	2.88757629	2.41427051
5	1	4.30843401	3.46621821

$h = 0.1$

i	**x**	***y***	***y****
0	*0*	1	
1	0.1	1.2205688	1.1
2	0.2	1.51589694	1.35446252
3	0.3	1.91712667	1.69704901
4	0.4	2.47417694	2.1669117
5	0.5	3.26842056	2.82728076
6	0.6	4.43547054	3.78229201
7	0.7	6.20736111	5.20766597
8	0.8	8.99313323	7.40837014
9	0.9	13.5380836	10.9305918
10	1	21.2500714	16.7869149

PRIMER 12

Pretpostavimo da imamo 1000 din koje želimo da uložimo na račun banke koja plaća 6% kamate na godišnjem nivou. Koliko je stanje na našem računu posle godinu dana?

Rešenje:

Stanje na računu posle godinu dana $->$ korak je $h = \frac{1}{12}$.
p – kamata
u – početni ulog

Posle 1.meseca stanje na računu je: $u_1 = u \quad + pu$
Posle 2.meseca stanje na računu je : $u_2 = u_1 + pu_1$
Posle 3.meseca stanje na računu je : $u_3 = u_2 + pu_2$
.....

Model koji odgovara posmatranom problemu je $u' = pu, u(0) = 1000$
Rešenje Košijevog problema je $u(x) = 1000e^{px}$

Dakle, za godinu dana trebalo bi da dobijemo $u(1) = 1000e^{0,06*1} = 1061,84$
Ojlerovom metodom, po formuli $u_{n+1} = u_n + hpu_n,\ u_0 = 1000$, za godinu dana dobićemo:

i	*y*
0	1000.0000
1	1005.0000
2	1010.0250
3	1015.0751
4	1020.1505
5	1025.2513
6	1030.3775
7	1035.5294
8	1040.7070
9	1045.9106
10	1051.1401
11	1056.3958
12	1061.6778

Dakle, Ojlerovom metodom, dobijamo vrednost od 1061,6778 din čime smo na gubitku za 0,16 para. Rešiti sve prethodne probleme Ojelerovom implicitnom metodom i modifikovanom metodom a zatim uporediti rezultate.

Modifikovana Ojlerova metoda

$$u_{j+1/2} = u_j + \frac{h}{2} f(x_j, u_j)$$
$$u_{j+1} = u_j + hf\left(x_{j+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

PRIMER 13

Ojlerovom metodom i njenim modifikacijama odredimo približno rešenje Košijevog problema

$$u'(x) = x^2 + u^2(x)$$
$$u(0) = 0$$

na intervalu $[0,1]$ a zatim oceniti grešku Rungeovim kriterijumom

$$u(x + 2h) - u_1 \approx \frac{u_1 - u_2}{2^p - 1}$$

Rešenje:

Eksplicitnom Ojlerovom metodom za

$$x_0 = 0, y_0 = 0, f(x, y) = x^2 + y^2, h = 0.25$$

dobijamo sledeća rešenja:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.25 * (0 + 0) = 0 \quad (x_1 = 0.25)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0.25 * (0.25^2 + 0) = 0.015625 \quad (x_2 = 0.5)$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0.078186 \quad (x_3 = 0.75)$$
$$y_4 = \cdots = 0.220339 \quad (x_4 = 1)$$

Implicitnom Ojlerovom metodom se dobija da je:

$$y_{j+1}^* = y_j + hf\left(x_j, y_j\right)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f\left(x_j, y_j\right) + f\left(x_{j+1}, y_{j+1}^*\right)\right)$$
$$y_1^* = 0$$
$$y_1 = 0 + \frac{0.25}{2}\left(0 + f(0.25,0)\right) = \frac{0.25}{2}(0.25^2 + 0^2) = 0.007812$$
$$y_2^* = 0.007812 + 0.25(0.5^2 + 0.007812^2) = 0.023452$$
$$y_2 = 0.007812 + \frac{0.25}{2}(0.25^2 + 0.007812^2 + 0.5^2 + 0.023452^2) = 0.046951$$

Runge-Kuta metoda

Košijev problem

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

se na osnovu poznatih početnih vrednosti rešava Runge Kutta formulama tako što se prvo pronađe vrednost problema u tački x_i, potom u tački $x_i + h$ i tako dalje, sve dok se ne odrede vrednosti u svim tačkama segmenta za unapred definisan korak interpolacije h.
Runge Kutta formule reda tačnosti n definišu se na sledeći način:

$n = 1$:

$$k_1 = f(x, y),$$
$$y(x+h) \approx y(x) + hk_1 \quad \text{Ojlerova formula}$$

$n = 2$:

$$k_1 = f(x, y),$$
$$k_2 = f(x + th, y + thk_1)$$
$$y(x+h) \approx y(x) + \tfrac{1}{2}hk_1 + \tfrac{1}{2}hk_2$$

$n = 3$:

$$k_1 = f(x, y),$$
$$k_2 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h, y + \tfrac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f(x + h, y - hk_1 + 2hk_2)$$
$$y(x+h) \approx y(x) + \tfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$n = 4$:

$$k_1 = f(x, y),$$
$$k_2 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h, y + \tfrac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h, y + \tfrac{1}{2}hk_2\right)$$
$$k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$
$$y(x+h) \approx y(x) + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Ocena greške:

$$\|y(x+2h) - v_1\| \sim \tfrac{1}{2^p - 1}\|v_1 - v_2\|$$

PRIMER 14

Odrediti približnu vrednost Košijevog problema $y' = y - x^2 + 1$, $y(0) = 0.5$ u tački $x = 2$ koristeći Runge Kutta formule reda 4.

Rešenje:

Tačno rešenje datog problema je $y = x^2 + 2x + 1 - \frac{1}{2}e^x$.

Runge Kutta formule koristimo na intervalu $0 \le x \le 2$. Prvo ćemo uzeti da je početni korak $h = 0.5$. Koristimo formule za $n = 4$.

KORAK 0:

$x_0 = 0, y_0 = 0.5$

KORAK 1:

$x_0 = 0$

$k_1 = f(x_0, y_0) = 0.5 - 0^2 + 1 = 1.5$

$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}\right) = \left(0.5 + \frac{0.5 * 1.5}{2}\right) - \left(0 + \frac{0.5}{2}\right)^2 + 1 = 1.8125000$

$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}\right) = \left(0.5 + \frac{0.5 * 1.8125000}{2}\right) - \left(0 + \frac{0.5}{2}\right)^2 + 1 = 1.8906250$

$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = (0.5 + 0.5 * 1.8906250) - (0 + 0.5)^2 + 1 = 2.1953125$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.5 + \frac{0.5}{6}(1.5 + 2 * 1.8125000 + 2 * 1.8906250 + 2.1953125)$$
$$= 1.4251302$$

KORAK 2:

$x_1 = 0.5$

$k_1 = f(x_1, y_1) = f(0.5, 1.4251302) = 1.4251302 - (0.5)^2 + 1 = 2.1751302$

$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}\right) = f(0.75, 1.9689128\ ) = (1.9689128) - (0.75)^2 + 1 = 2.40641275$

$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}\right) = f(0.75, 2.0267334) = (2.0267334) - (0.75)^2 + 1 = 2.4642334$

$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(1, 2.6572469) = (2.6572469) - (1)^2 + 1 = 2.6572469$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.4251302 + \frac{0.5}{6}(2.1751302 + 2 * 2.40641275 + 2 * 2.4642334 + 2.6572469)$$
$$= 2.6396027$$

KORAK 3:

$x_2 = 1$

$k_1 = f(x_1, y_1) = f(1, 2.6396027) = 2.6396027 - (1)^2 + 1 = 2.6396027$

$k_2 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}\right) = f(1, 3.2995034\ ) = 3.2995034$

$k_3 = f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}\right) = f(1, 3.4644785) = 3.4644785$

$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = f(1.5, 4.3718420) = 3.1218420$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 2.6396027 + \frac{0.5}{6}(2.6396027 + 2 * 3.2995034 + 2 * 3.4644785 + 3.1218420)$$
$$= 4.0068190$$

KORAK 4:

$x_3 = 1.5$

$k_1 = f(x_2, y_2) = f(1.5{,}4.0068190) = 2.756819$

$k_2 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_1}{2}\right) = f(1.75, 4.6960237\,) = \;2.63352375$

$k_3 = f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_2}{2}\right) = f(1.75, 4.6652000) = \;\;2.6026999$

$k_4 = f(x_2 + h, y_2 + hk_3) = f(2, 5.3081689) = 2.30816897$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 4.0068190 + \frac{0.5}{6}(2.756819 + 2 * 2.63352375 + 2 * 2.6026999 + 2.30816897) =$$
$$= \;5.3016053$$

Uporedimo tačne vrednosti datog problema i približne vrednosti izračunate RungeKutta formulama.

x_i	**tačna vrednost,** $y(x_i)$	**numerička vrednost,** y_i	**greška,** $\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0.5	0.5	0
0.5	1.4256394	1.4251303	0.0005091
1	2.6408591	2.6396027	0.0012564
1.5	4.0091555	4.0068190	0.0023365
2	5.3054720	5.3016052	0.0038667

Rešenje zadatka kada je $h = 0.2$:

x_i	tačna vrednost, $y(x_i)$	numerička vrednost, y_i	greška, $\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8292986	0.8292933	0.0000053
0.4	1.2140877	1.2140762	0.0000114
0.6	1.6489406	1.6489220	0.0000186
0.8	2.1272295	2.1272027	0.0000269
1	2.6408591	2.6408227	0.0000364
1.2	3.1799415	3.1798942	0.0000474
1.4	3.7324000	3.7323401	0.0000599
1.6	4.2834838	4.2834095	0.0000743
1.8	4.8151763	4.8150857	0.0000906
2	5.3054720	5.3053630	0.0001089

Rešenje zadatka kada je $h = 0.05$

x_i	tačna vrednost, $y(x_i)$	num. vrednost, y_i	greška, $\lvert y(x_i) - y_i \rvert$
0.00	0.500000000000	0.500000000000	0.000000000000
0.05	0.576864451812	0.576864451812	0.000000000000
0.10	0.657414540962	0.657414540962	0.000000000000
0.15	0.741582878636	0.741582878636	0.000000000000
0.20	0.829298620920	0.829298620920	0.000000000000
0.25	0.920487291656	0.920487291656	0.000000000000
0.30	1.015070596212	1.015070596212	0.000000000000
0.35	1.112966225703	1.112966225703	0.000000000000
0.40	1.214087651179	1.214087651179	0.000000000000
0.45	1.318343907255	1.318343907255	0.000000000000
0.50	1.425639364650	1.425639364650	0.000000000000
0.55	1.535873491066	1.535873491066	0.000000000000
0.60	1.648940599805	1.648940599805	0.000000000000
0.65	1.764729585493	1.764729585493	0.000000000000
0.70	1.883123646265	1.883123646265	0.000000000000
0.75	2.003999991694	2.003999991694	0.000000000000
0.80	2.127229535754	2.127229535754	0.000000000000
0.85	2.252676574037	2.252676574037	0.000000000000
0.90	2.380198444422	2.380198444422	0.000000000000
0.95	2.509645170342	2.509645170342	0.000000000000
1.00	2.640859085770	2.640859085770	0.000000000000
…			
1.70	4.553026304136	4.553026304136	0.000000000000
1.75	4.685198661997	4.685198661997	0.000000000000
1.80	4.815176267794	4.815176267794	0.000000000000
1.85	4.942590238699	4.942590238699	0.000000000000
1.90	5.067052778860	5.067052778860	0.000000000000
1.95	5.188156209705	5.188156209705	0.000000000000
2.00	5.305471950535	5.305471950535	0.000000000000

Može se primetiti kako se greška metode smanju sa korakom.

Matlab kod za Runge Kutta formule:

```
function rungeKutta
h = 0.5;
x = 0;
y = 0.5;
fprintf('Korak 0: x = %12.8f, y = %12.8f\n', x,y);
for i=1:4
k1 = h*f(x,y);
k2 = h*f(x+h/2, y+k1/2);
k3 = h*f(x+h/2, y+k2/2);
k4 = h*f(x+h, y+k3);
y = y + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
x = x + h;
fprintf('Korak %d: x = %6.4f, y = %18.15f\n', i, x, y);
end
end


%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function v = f(x,y)
v = y-x^2+1;
end
```

Odnosno, kod kada funkcija zavisi od koraka h i tačke x koju je potrebno odrediti.

```
function rungeKutta(h, xn)

x = [0];
y = [0.5];
brKoraka = (xn-x(end))/h;

fprintf('Korak 0: x = %12.8f, y = %12.8f\n', x,y);
for i=1:brKoraka
k1 = h*f(x(end),y(end));
k2 = h*f(x(end)+h/2, y(end)+k1/2);
k3 = h*f(x(end)+h/2, y(end)+k2/2);
k4 = h*f(x(end)+h, y(end)+k3);
y = [y (y(end) + (k1+2*k2+2*k3+k4)/6)];
x = [x  (x(end) + h)];
fprintf('Korak %d: x = %6.4f, y = %18.15f\n', i, x, y);
end

t = x.^2+2.*x+1-1/2.*exp(x);
raz = t-y;
end
```

PRIMER 15

Koristeći Runge Kutta formule $n = 3$ reda tačnosti, približno rešiti Košijev zadatak:

$$y' = xy^2 + 2xy$$
$$y(0) = 1$$

za $x \in [0, 0.5]$ sa korakom $h = 0,1$. Računati na četiri decimale.

REŠENJE:
Koristimo formule za $n = 3$:
Rešenje diferencijalne jednačine je $y(x) = \frac{2}{ce^{-x^2}-1}$, uz uslov da je $y(0) = 1$ sledi da je $c = 3$.
Formiramo tablicu:

x	y	k1	k2	k3	tačna vrednost
0	1	0	0,15	0,3121	1
0,1	1,0152	0,3061	0,4684	0,6638	1,0152
0,2	1,0626	0,6509	0,8474	1,1088	1,0625
0,3	1,1484	1,0847	1,3481	1,7336	1,1482
0,4	1,2853	1,6890	2,0770	2,7049	1,2850
0,5	1,4970				1,4966

Dakle, približna vrednost Košijevog problema u tački $x = 0,5$ je $1,4970$

Da li bi i koliko bolje rešenje postigli kada bi radili sa manjim korakom, $h = 0,05$?

x	y	k1	k2	k3	tačna vrednost
0	1	0	0,15	0,3121	1
0,05	1,0038	0,1508	0,22733	0,3076	1,0038
0,1	1,0152	0,3061	0,3865	0,4733	1,0152
0,15	1,0345	0,4709	0,5578	0,6543	1,0345
0,2	1,0625	0,6508	0,7473	0,8574	1,0625
0,25	1,1	0,8525	0,9625	1,0914	1,1000
0,3	1,1483	1,0845	1,2130	1,3677	1,1482
…					
0,5	1,4966				1,4966

PRIMER 16

Koristeći Runge Kutta formule $n = 4$ reda tačnosti, približno rešiti Košijev zadatak:

$$y' = y + 2x - 3$$
$$y(0) = 2$$

za $x \in [0, 0.5]$ sa korakom $h = 0,1$. Računati sa 5 decimala.

REŠENJE:

Koristimo formule za $n = 4$:

Rešenje diferencijalne jednačine je $y(x) = ce^x - 2x + 1$ uz uslov da je $y(0) = 2$ sledi da je $c = 1$.

Formiramo tablicu:

X	Y	k1	k2	k3	k4	**tačna vr.**
0	2.0000	1.0000	0.9500	0.9475	0.8947	2
0.1000	1.9052	0.8948	0.8396	0.8368	0.7785	1,9052
0.2000	1.8214	0.7786	0.7175	0.7145	0.6500	1,8214
0.3000	1.7499	0.6501	0.5826	0.5793	0.5081	1,7499
0.4000	1.6918	0.5082	0.4336	0.4299	0.3512	1,6918
0.5000	1.6487					1,6487

Primetimo da je rešenje metodom Runge Kutta reda 4 tačnosti 10^{-4}

PRIMER 17

Posmatramo idealizovani ekosistem koji čine lisice i zečevi. Lisice se hrane zečevima a zečevi travom koje ima u izobilju. U vremenskom intervalu t broj lisica je označn sa $v_2(t)$, dok je broj zečeva u tom trenutku označen sa $v_1(t)$.

Ako je model koji odgovara ovakvom problemu je sledećeg oblika:

$$v_1(t)' = (3 - 2v_2(t))v_1(t), \qquad v_1(0)=2$$
$$v_2(t)' = (-2.5 + v_1(t))v_2(t), \qquad v_2(0)=2$$

naći rešenje ovako definisanog Košijevog problema.

REŠENJE

t = 0 1 2 3 4 5 6

iteracija: 1

vrednosti dobijene Runge Kuta metodom 4 reda:

```
  -2.0000         0    2.5000   -0.5625
  -1.0000   -2.2500   -2.2500    3.1250
```

iteracija: 2

vrednosti dobijene Runge Kuta metodom 4 reda:

```
   0.2005    0.5516    0.1992   -1.1705
  -0.1367    0.0090    0.0090    0.1819
```

iteracija: 3

vrednosti dobijene Runge Kuta metodom 4 reda:

```
  -0.2876   -0.2522    0.2751    0.7291
  -0.0080   -0.2314   -0.2314    0.3694
```

iteracija: 4

vrednosti dobijene Runge Kuta metodom 4 reda:

```
   0.1151   -0.1783   -0.3986    0.1874
```

0.1124	0.2050	0.2050	-0.4699

iteracija: 5
vrednosti dobijene Runge Kuta metodom 4 reda:

0.0998	0.3438	0.1662	-0.7032
-0.0974	-0.0228	-0.0228	0.1641

Vrednosti funkcija u, v i w date su tablicno u sledecem obliku:

iteracija	u	v
0	2.0000	2.0000
1.0000	2.4063	1.4583
2.0000	2.4949	1.5576
3.0000	2.5761	1.4777
4.0000	2.4342	1.4795
5.0000	2.5036	1.5349

PRIMER 18

Koristeći Runge Kutta metodom sa tačnošću 10^{-4} odrediti približno repenje problema
$u' = \cos(x^2 u + 3x) + 2,\;\; u(0) = 1$
u tački $x = 0{,}4$.

REŠENJE
Formiramo tablicu
U tačkki x_k sa tačnošću epsilon

0	1.0000
0.4000	2.0790

Traženo rešenje sa korakom 0,4

0	1.0000	3.0000	2.7875	2.7886	2.0323
0.4000	2.0790	0	0	0	0

Traženo rešenje sa korakom 0,2

0	1.0000	2.7879	2.4820	2.4844	2.0375
0.2000	1.5864	0	0	0	0
0.4000	2.0784	0	0	0	0

PRIMER 19

Neka je u(x) kriva koja prolazi kroz tačku (0,1) I ima osobinu da je koeficijent nagiba tangente u svakoj njenoj tački jednak dužini radijusa vektor te tačke. Naći u(0.1) i u(0.2) sa tačnošću 10^{-4}.

Rešenje:

Problem je sledećeg oblika:

$$u'(x) = \sqrt{x^2 + u^2}, u(0) = 1$$

PRIMER 20

Neka je $u(x)$ rešenje diferencijalne jednačine koja zadovoljava date uslove:

$$u'(x) = e^{x+u} - 1, \quad u(x_0) = 0.1, \;\; u'(x_0) = 0$$

Sa tačnošću 10^{-4} odrediti $u(0), u(0.1)$ i $u'(0.1)$.

Rešenje

Za vežbu.

PRIMER 21

Koristeći Runge Kutta formule $n = 4$ reda tačnosti, približno odrediti vrednost Košijevog zadataka u tački $x = 0{,}2$:

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$
$$y(0) = 1$$

sa tačnošću 10^{-4}

REŠENJE:

Za vežbu.

PRIMER 22

Koristeći Runge Kutta formule $n = 4$ reda tačnosti, približno rešiti Košijev zadatak:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2} y, \quad y(1) = 2$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{x} z + y + x, \quad z(1) = \frac{25}{12}$$

za $x = 2$. Uzeti da je $h = 0{,}25$. Računati sa 4 decimale.

REŠENJE

```
>> F = @(x,y) [2*x.*y(1)./(1+x.^2); -y(2)./x+y(1)+x];
>> a = 1;
>> y0 = [2;25/12];
>> h = 0.25;
>> b = 2;
>> y = ode4(F,a,h,b,y0)
>> y = ode4(F,a,h,b,y0)

y =

    2.0000    2.5625    3.2500    4.0624    4.9999
    2.0833    2.4341    3.0104    3.8071    4.8333
```

PRIMER 23

Sa tačnošću 10^{-4} u tački $x = 1.2$ naći približno rešenje Košijevog problema:

$$u''(x) = u'(x) + e^{x^2}, u(1) = 1.23425, u'(x) = 0.78502$$

Rešenje

FUNKCIJE ZA REŠAVANJE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA – MATLAB KODOVI

```
% --------- ODE1 -----------------------------------------------------------
% Standardni solver za resavanje ODJ primenom Ojlerove metode.
% Poziv funkcije:
% y_out = ODE1(F,t0,h,tfinal,y0)
% Ojlerovom metodom se, sa fiksiranim korakom h na intervalu  t0 <= t <= tfinal,
% resava Kosijev zadatak:
%      dy/dt = F(t,y)
%      y(t0) = y0
% Rezultat pozivanja funkcije je vektor y_out
% --------------------------------------------------------------------------

 function y_out = ode1(F,t0,h,tfinal,y0)
   y = y0;
   y_out = y;
   for t = t_0 : h : t_final-h
      k = F(t,y);
      y = y + h*k;
      y_out = [y_out; y];
   end
 end
```

% ---

Zadatak 1

Posmatrajmo Košijev zadatak

$$\frac{dy}{dt} = 2 * y;$$
$$y(0) = 10$$
$$0 \leq t \leq 3$$

```
>> F = @(t,y) 2*y;
>> y0 = 10;
>> t_0 = 0;
>> tfinal = 3;
>> h = 1;
>> y = ode1(F,t_0,tfinal, y0)
```

Zadatak 2

Složeni kamatni račun (Primer 10)

```
>>p = 0.06;
>>F = @(t,y) p*y;
>>t_0 = 0;
>>h = 1/12;
>>tfinal = 10;                  % 10 godina
>>y0 = 1000;                    % 1000 rsd (eur, dolar, ...)
>>y = ode1(F,t0,tfinal, y0)
  >>format bank                 % novčane jedinice su dinari i pare, evri i centi, ... (2 decimale).
                                % grafik + poređenje sa prostim kamatnim računom y1 = y0 + y0+p*t;
>> t = (0:h:t_final)';
>> plot(t,[y y1],'.')
```

```
% ---------------------- ODE2 ---------------------------------------------------
% Standardni solver za resavanje ODJ primenom metode pravougaonika
% Poziv funkcije:
% y_out = ODE2(F,t_0,h,tfinal,y0)
%  metodom sa fiksiranim korakom h na intervalu  t0 <= t <= tfinal
% resava sledeci Kosijev zadatak:
%     dy/dt = F(t,y)
%     y(t0) = y0
% --------------------------------------------------------------------------

 function y_out = ode2(F,t0,h,tfinal,y0)
   y = y0;
   y_out = y;
   for t = t_0 : h : t_final-h
      k1 = F(t,y);
      k2 = F(t+h/2, y+h*k1/2);
      y = y + h*k2;
      y_out = [y_out; y];
   end
  end

% --------------------------------------------------------------------------
```

Zadatak 3:
Posmatrajmo Košijev zadatak kojim se opisuje širenje plamena šibice

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-x^2}$$
$$y(0) = y_0$$
$$0 \le t \le \frac{2}{t_0}$$

Tačno rešenje Košijevog problema je $y(t) = \sin(t)$;

```
podaci.m
F = @(t,y) sqrt(1-y.^2);
y_0 = 0;
t_0 = 0;
t_final = pi/2;
h = pi/32;
y = ode2(F,t_0,t_final, y_0)
t = (0:h:t_final)';
plot(t,y,'o-')
set(gca, 'xtick', [0:pi/8:pi/2], 'xticklabel', {'0','\pi/8', '\pi/4', '3\pi/8', 'pi/2'})
axis([0 pi/2 0 1]), xlabel('t'), ylabel('y')
```

Ako pogledamo vrednosti vektora y videćemo da rešenja ove metode odstupaju od tačnog rešenja budući da su vrednosti funkcije sin(t) poznate.

Zadatak 4 (isti kao 2):

```
>> F = @(t,y) 2*y;
>> t0 = 0;
>> h = 1;
>> tfinal = 3;
>> y0 = 10;
>> y = ode2(F,t0,tfinal, y0)
```

```
% --------- ODE4 ----------------------------------------------------------
% Standardni solver za resavanje ODJ primenom meode Runge-Kutta.
% Poziv funkcije:
% y_out = ODE4(F,t_0,h,tfinal,y_0)
% Runge-Kutta metodom sa fiksiranim korakom h na intervalu  t0 <= t <= tfinal
% resava sledeci Kosijev zadatak:
%      dy/dt = F(t,y)
%      y(t0) = y0
% -------------------------------------------------------------------------

 function y_out = ode4(F,t0,h,tfinal,y0)
   y = y0;
   y_out = y;
   for t = t_0 : h : t_final-h
      k1 = F(t,y);
      k2 = F(t+h/2, y+h*k1/2);
      k3 = F(t+h/2, y+h*k2/2);
      k4 = F(t+h, y+h*k3);
      y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
      y_out = [y_out; y];
   end
  end
```

Zadatak 5:

Posmatrajmo Košijev zadatak kojim se opisuje process širenje plamena šibice

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - y^3$$

$$y(0) = y_0$$

$$0 \le t \le \frac{2}{t_0}$$

```
>>F = @(t,y) y.^2-y.^3;
>>y_0 = 0.01;
>>t_0 = 0;
>>t_final = 2/y_0;
>>h = t_final/500;      % 500 koraka
>>y = ode4(F,t_0,t_final, y_0)
>>t = (0:h:t_final)';
>>plot(t,y,'.')
```

Primetimo sa grafika da plamen sveće počinje da se širi postepeno, zatim naglo, nakon čega ostaje fiksiranog poluprečnika

```
% resiti Zadatak 1 sa drugačijim ulaznim podacima:
% t_0 = 0;
% y_0 = 1/1000;
% t_final = 2/y_0;
% h = t_final/2000;
% za koju vrednost parametra t plamen dostize poluprecnik 0.9?
% ---------------------------------------------------------------------------
```

Zadatak 6:
Rešiti prethodni zadatak za nove ulazne podatke.
podaci.m

```
>>F = @(t,y) 1 + y.^2;
>>y_0 = 0;
>>t_0 = 0;
>>t_final = 2;
>>h = t_final/500;     % 500 koraka
```

STEPEN TAČNOSTI METODA

Stepen tačnosti možemo odrediti izračunavanjem vrednosti problema sa koracima h i h/2 i poređenjem dobijenih rezultata sa tačnim rešenjem.

Posmatramo sledeći problem:
  Integral_0^1 (1/(1+t)^2)dt
Tačno rešenje integrala je 1/2.

```
 function p = orderx(odex)

   vexact = 0.5;
   F = @(t,y) 1/(1+t)^2;
   t0 = 0;
   tfinal = 1;
   y0 = 0;
   h = 0.1
   y_out = odex(F,t0,h,tfinal,y0);
   v1 = y_out(end)
   h = h/2
   y_out = odex(F,t0,h,tfinal,y0);
   v2 = y_out(end)
   ratio = (v1 - vexact)/(v2 - vexact)
   p = round(log2(ratio));

end

 % primer:
>>orderx(@ode1)
 >>orderx(@ode2)
 >>orderx(@ode4)
```

```
% ---------- ode23 ----------------------
% Ovo je ugrađena MATLAB funkcija koja rešava Košijev zadatak sa određenim stepenom tačnosti.
% Bogacki - Shampine order 3(2)
% Korišćenjem 3 vrednosti funkcije postiže se tačnost stepena 2.
% k1 = f(t,y)
% k2 = f(t+h/2, y+h/2*k1);
% k3 = f(t+3/4h, y+3/4*h*k2);
% y = y + h/9*(2*k1 + 3*k2 + 4*k3);

% k4 = f(t+h,y);
% e = h/72*(-5*k1+6*k2+8*k3-9*k4);
```

Kako se funkcija poziva?
Definišu se funkcija F, segment na kome se problem rešava i ulazni podaci:

Neka nas zanima rešenje problema dy/dt=y na segmentu [0,1] ako je y0=1;

```
% >> F = @(t,y) y;
% >> ode23(F,[0 1],1)              % ako se ne napiše ni jedan argument, Matlab će nacrtati rešenje

% >> [t,y] = ode23(F,[0,1],1)      % ako upišemo izlazne argumente, Matlab će vratiti
                                     rešenje i sam izabrati korak interpolacije

% tolerancija za rešenja je 10^(-3).

% Primer:
% a = 0.25;
% y0 = 15.9
% F = @(t,y) 2*(a-t)*y^2;
% [t,y] = ode23(F, [0,1],y0);
% plot(t,y,'-',t,y,'.','markersize', 0.24)
% h = diff(t);


% ----------- ode45 -----------------------
% Dormand - Prince su reda 5(4)
% >> F = @(t,y) y;
% >> tspan = (0:0.1: 1)'
% >> [t y] = ode45(F,tspan,1)
% >> plot(t,y,'o-')
% ako zelimo da proverimo tacnost
% format short e
% >> exp(t)-y        % tacno resenje
% ans = ......

a = 0.25;
y0 = 15.9;
F =@(t,y) 2*(a-y)*y^2;
[t y] = ode45(F,[0,1],y0)     % ode45 sam bira svoj korak
```

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina korišćenjem Matlaba

1. Neka je, na primer, dat sledeći Košijev zadatak:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

```
>> F = @(t,y) [y(2); -y(1)];
```

i početni uslovi:

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

ili $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tačno rešenje zadatog Košijevog problema je $y(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

```
>> tspan(0: 1/36: 1)*2*pi      % svakih 10 stepeni
>> y0 = [0;1];
>>ode45(F,tspan,y0)
>> [t y] = ode45(F,tspan,y0);
>> whos                              % lista sve promenljive

>> plot(y(:,1), y(:,2),'o-')
>> axis square
>> axis(1.2*[-1 1 -1 1])
```

2. Rešiti sledeći Košijev zadatak

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 1$$

(Van de Polov oscilator)

Smena:

$$y = [x; \quad x'] = [y1, y2]$$
$$y' = [x'; \quad x'']$$
$$y' = [y2; \quad \mu(1 - y_2^2)y_2 - y_1]$$

Polazni zadatak postaje:

```
>> mu = 100;
>> F = @(t,y)  [y(2); mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)]
%>>  opt  = odeset('stats', 'on')'                 % zanima nas koliko je slozen problem za ode
funkcije

>>  y0 = [0;1];
>> [t,y]= ode45(F, [0 280], y0, opts);
>> plot(t,y(:,1),'.')

>> [t,y]= ode15s(F, [0 280], y0, opts);
```

Za više informacija kucati: >> doc ode45

PRIMER 24

Izračunati vrednost funkcija $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ na odsečku [0,0.3] sa korakom $h = 0.1$. Ako su funkcije Košijevog problema sledeće:

$$u_1'(x) = -2u_1 + 5u_3$$
$$u_2'(x) = (sinx - 1)u_1 - u_2 + 3u_3$$
$$u_1'(x) = -u_1 + 2u_3$$
$$u_1(0) = 2, u_2(0) = 1, u_3(0) = 1$$

Rešenje

```
>> G = @(x,y) [-2*y(1)+5*y(3); (sin(x)-1).*y(1)-y(2)+3*y(3); -y(1)+2*y(3)];
>> y0=[2;1;1];
>> a = 0;
>> b = 0.3;
>> h = 0.1;
>> y = ode4(G,a,h,b,y0)

y =
          x=0      x=0.1    x=0.2     x=0.3
   y1   2.0000   2.0898   2.1588   2.2062
   y2   1.0000   1.0050   1.0195   1.0427
   y3   1.0000   0.9950   0.9801   0.9553
```

Adamsova metoda

Rešavamo Košijev problem

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Adamsova metoda je višeslojna metoda koja se koristi za rešavanje Košijevog problema na ekvidistantnoj mreži. Višeslojne formule su oblika

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{j+1-i} - h \sum_{i=0}^{n} b_i f(x_{j+1-i}, y_{j+1-i}) = 0$$

- za $a \neq 0$ $b_0 = 0$ metoda je eksplicitna.
- za $a \neq 0$ $b_0 \neq 0$ metoda je implicitna.

Adamsovove eksplicitne formule se definišu izrazima

$$m = 1 \qquad y_n = y_{n-1} + h f_{n-1} \quad O(h^2)$$
$$m = 2 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(3f_{n-1} - f_{n-2}) \quad O(h^3)$$
$$m = 3 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{12}(23f_{n-1} - 16f_{n-2} + 5f_{n-3}) \quad O(h^4)$$
$$m = 4 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}) \quad O(h^5).$$

Broj m predstavlja potreban broj početnih vrednosti koje se računaju nekom jednokoračnom metodom (koja je istog reda tačnosti).

Admsove implicitne fomule se definišu izrazima

$$m = 1 \qquad y_n = y_{n-1} + h f_n \quad O(h^2)$$
$$m = 2 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \quad O(h^3)$$
$$m = 3 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}) \quad O(h^4)$$
$$m = 4 \qquad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}(9f_n - 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}) \quad O(h^5).$$

Numerički se Košijevi zadaci rešavaju tako što se nalazi rešenje problema u zadatim tačkama. Da bi se odredile vrednosti problema u zadatim tačkama potrebno je da se koriste eksplicitne i implicitne Adamsove formule istog reda tačnosti.

Adamsove formule reda tačnosti $O(h^5)$ su

$$y_n^* = y_{n-1} + \frac{h}{24}(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4})$$
$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}(9f_n^* - 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3})$$

gde su $y_n \approx y(x)$

$f_i = f(x_i, y_i)$

$f_i^* = f(x_i, y_i^*)$

Greška se ocenjuje izrazom:

$$\|y - y_n\| \sim \frac{1}{14}\|y_n - y_n^*\|$$

PRIMER 22

Koristeći Adamsove formule reda tačnosti $O(h^4)$ odrediti približno rešenje Košijevog zadatka

$$y' = \frac{x}{y - x^3}$$
$$y(x_0) = 3$$
$$y'(x_0) = 0.5$$

u tački $x = 0.6$. Početne vrednosti problema računati korišćenjem Runge Kuta formulama.
Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Na osnovu ograničenja i vrednosti funkcije prvo se odredi vrednost početne tačke, $x_0 = 1$. Zatim se, koristeći Runge Kutta formule za $m = 3$ odrede vrednosti funkcije u tačkama x_1 i x_2 koje su neophodne za korišćenje Adamsove metode.
Sa obzirom da je $x_0 = 1$ i da se traži vrednost funkcije u tački $x = 0.6$ za korak h mora da važi $h < 0$.
Neka je $h = -0.1$. U tabeli niže su date početne vrednosti problema.

x	y	y*	k1	k2	k3	f	f*
1.0000	3.0000	0	0.5000	0.4486	0.4034	0.5000	0
0.9000	2.9550	0	0.4043	0.3663	0.3319	0.4043	0
0.8000	2.9183	0	0	0	0	0.3325	0

$$y_3^* = y_2 + \frac{h}{12}(23f_2 - 16f_1 + 5f_0) = 2.9183 - \frac{0.1}{12}(23 * 0.3325 - 16 * 0.4043 + 5 * 0.5) = 2.8877$$

$$f_3^* = f(x_3, y_3^*) = \frac{0.7}{2.8877 - 0.7^3} = 0.2751$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(5f_3^* + 8f_2 - f_1) = 2.9183 - \frac{0.1}{12}(5 * 0.2751 + 8 * 0.3325 - 0.4043) = 2.8881$$

x	y	y*	f	f*
0.7000	2.8881	2.8877	0.2750	0.2751

Postupak se ponovi za y_4^* i y_4.

x	y	y*	f*
0.6000	2.8631	2.8629	0.2267

Matlab kod

podatak.m

```
disp('ZADATAK');
disp('Koristeci eksplicitne Adamsove formule 3.reda');
disp('tacnosti priblizno resiti kosijev zadatak:');
disp(' y = f(x,y) ');
disp(' y(Xo)=Yo ');
disp(' u tacki x=xk');

f = inline('x./(y-x.^3)');
x0 = 1;
y0 =  3;
h = -0.1;
xn = 0.6;

function AdamsovaMetoda()
podatak;
[x y k1 k2 k3] = RungeKuta3reda(f, x0, y0, xn-h, h);
Y1 = [];   % ovo je y*
F = [];
F1 = [];    % ovo je F*
for i = 1:3
    F  = [F feval(f,x(i),y(i))];
    F1  = [F 0];
    Y1 = [Y1 0];
end

for i = 4:5
    Y1(i) = y(i-1)+h/12*(23*F(i-1)-16*F(i-2)+5*F(i-3));
    F1(i) = feval(f,x(i-1),Y1(i-1));
    x(i) = x0+ (i-1)*h;
    y(i) = y(end)+h/12*(5*F1(end)+8*F(end)-F(end-1));
    F(i) = feval(f,x(i),y(i));
end

disp('RESENJE (tablicno): ');
disp('    x         y         y*        f         f*  ');
[x' y']
[Y1' F' F1']
end

function [x y k1 k2 k3] = RungeKuta3reda(f, x0, y0, xn, h)

x = [];
x = [x x-0];
y = [];
y = [y y0]
brKoraka = (xn-x0)/h;
k1 = [];
k2 = [];
k3 = [];
for i=1:2
    k1 = [k1 feval(f,x(end),y(end))];
    k2 = [k2 feval(f,x(end)+h/2, y(end)+h*k1(end)/2)];
    k3 = [k3 feval(f,x(end)+h, y(end)-h*k1(end)+2*h*k2(end))];

    x = [x x(end)+h];
    y = [y (y(end)+h/6*(k1(end)+4*k2(end)+k3(end)))];
end
[x' y']
[k1' k2' k3']
end
```

PRIMER 23

Koristeći Adamsove formule reda tačnosti $O(h^4)$ sa korakom $h = 0.1$ odrediti približno rešenje Košijevog zadatka

$$y' + y\, sinx + y^2 = 0$$
$$y(0) = 1$$

na intervalu $[0,0.5]$. Početni odsečak odrediti pomoću Tejlorovog polinoma 6og stepena funkcije y.
Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Tejlorov polinom 6og stepena u okolini tačke x_0 je sledećeg oblika:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{6} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Na osnovu počenog uslova sledi da je

$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = -y\, sinx - y^2 = \cdots = -1$$

Ostali koeficijenti polinoma mogu se dobiti diferenciranjem poslednje jednačine zaključno sa šestim izvodom i računanjem vrednosti izvoda u tački $x = 0$:

$$y''(x) = -y'sinx - ycosx - 2yy' = \cdots = 1$$
$$y''' = -y''sinx - 2y'cosx + y'sinx - 2y'^2 - 2yy'' = \cdots = -2$$
$$y^{iv} = -y'''sinx - 3y''cosx - 3y'sinx + ycosx - 2yy''' - 2y''''y - 4y''y' = \cdots = 8$$
$$y^{v} = -y^{iv}sinx - y'''cosx + 3y''sinx - 3y'''cosx + 3y''sinx + 3y'cosx + y'cosx - ysinx - 2y^{iv}y - 2y'''y' - 2y^{iv}y' - 2y''y'' - 4y'''y' - 4y''y'' = \cdots = -34$$
$$y^{vi} = -y^{v}sinx - 5y^{iv}cosx + 10y'''sinx + 10y''cisx - 5y'sinx - ycosx - 2y^{v}\, y - 10y^{iv}y' - 20y'''y'' = 157$$

Traženi Tejlorov polinom je sledećeg oblika:

$$w(x) + 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{17}{60}x^5 + \frac{157}{720}x^6$$

Adamsova metoda je oblika:

$$y_n^* = y_{n-1} + \frac{h}{24}(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4})$$
$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{24}(9f_n^* - 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3})$$

Formiramo tablicu:

i	x_i	y_i	$y_i *$	f_i	$f_i *$
0	0	1.00000		-1.0000	
1	0.1	0.9047		-0.9088	
2	0.2	0.8178		-0.8313	
3	0.3	0.7382		-0.7631	
4	0.4	0.6650	0.6551	-0.7011	-0.7014
5	0.5	0.5978	0.5978		-0.6440

$$y_4 *= y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) = 0.665077$$
$$y_4 = y_3 + \frac{4}{24}(9f_4 * + 19f_3 - 5f_2 + f_1) = 0.6650$$
$$y_5 *= \cdots = 0.5978$$
$$y_5 = \cdots = 0.5978$$

PRIMER 24

Koristeći Adamsove formule odrediti približno rešenje Košijevog zadatka

$$y' - x^2y + x = 0$$
$$y(0) = 1$$

u tački $x = 0.5$ sa tačnošću $5 * 10^{-4}$. Početne vrednosti računati

a) Tejlorovim razvojem.
b) Runge Kuta formulama

Rešenje:

a) Tejlorov polinom određujemo po formuli:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{6} \frac{y^{(i)}(0)}{i!} x^i$$
$$y(0) = 1$$
$$y'(0) = x^2y - x = 0$$
$$y''(0) = 2xy + x^2y' - 1 = 1$$
$$y'''(0) = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y' = 2$$
$$y^{iv}(0) = 4y' + 2xy'' + 2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2y''' = 0$$
$$y^{v}(0) = 6y'' + 4y'' + 4xy''' + 2xy''' + 2xy''' + x^2y^{iv} = -12$$
$$y^{vi}(0) = 12y''' + 8y''' + 8xy^{iv} + 2xy^{iv} + x^2y^{v} = 40$$
$$w(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^6}{18}$$

Napomena:

Obzirom da tražimo vrednost funkcije na intervalu $[0,0.5]$ $\frac{x^6}{18} < 10^{-5}$ vrednost poslednjeg člana polinoma neće uticati na rezultat, pa se može odbaciti. Početne vrednosti funkcije y biće određene polinomom petog stepena.
Računaćemo sa 5 decimala.
Formiramo tablicu:

I	x_i	y_i	$y_i *$	f_i	$f_i *$
0	0	1		0	
1	0.1	0.99533		-0.09005	
2	0.2	0.98263		-0.16069	
3	0.3	0.96376		-0.21326	
4	0.4	0.94049	0.94051	-0.24952	-0.24952
5	0.5	0.91433	0.91434		-0.27142

Iz uslova za ocenu greške, $\frac{1}{14}|y_5 - y_5 *| \leq 5 * 10^{-4}$, sledi da je tražena tačnost postignuta.
Rešenje je $y(0.5) \approx 0.9143$

b) Rešenje dobijeno korišćenjen Runge Kutta formula 4.reda tačnosti i Adamsovom metodom:

$$y' = x^2y - x = f(x, y)$$

I	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	1	0	-00.475	-0.04765	-0.0900
1	0.1	0.9953	-0.0900	-0.1277	-0.1277	-0.1607
2	0.2	0.9826	-0.1607	-0.1891	-0.1892	-0.2133
3	0.3	0.9638	-0.2133	f_i	$f_i *$	
4	0.4	0.9405	-0.2495	0.9406	-0.2495	
5	0.5	0.9143		0.9144	-0.2714	

I u ovom slučaju je $\frac{1}{14}|y_5 - y_5 *| \leq 5 - 10^{-4}$, odnosno $y(0.5) \approx 0.9143$

PRIMER 25

Koristeći Adamsove formule, na intervalu [0,0.5] sa korakom $h = 0.1$, naći rešenje Košijevog zadatka

$$y'(x) = xu^3(x)$$
$$y(0) = 1$$

Početne vrednosti računati Runge Kuta formulama. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Formiramo tablicu na isti način kao i u prethodnim zadacima:

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	1	0	0,5	0,0504	0,1015
1	0.1	1,00504	0,01015	0,1546	0,1558	0,2126
2	0.2	1,02062	0,02126	0,2742	0,2766	0,3456
3	0.3	1,04828	0,03456	f_i	$f_i *$	
4	0.4	1,09110	0,05196	1,09086	0,05192	
5	0.5	1,15461		1,15418	0,07688	

PRIMER 26

Koristeći Adamsove formule i sa tačnošću $5 * 10^{-4}$ odrediti $y(0.5)$, gde je y približno rešenje Košijevog zadatka

$$xy' = 1 - y + x^2y^2$$
$$y(0) = 1$$

Početne vrednosti računati preko Tejlorovog razvoja. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Smenom $w = xu$ ($w' = y + xu'$) polazni problem se svodi na problem

$$w' = 1 + w^2$$
$$w(0) = 0$$

Formiramo Tejlorov red:

$$w(0) = 0$$
$$w'(0) = 1 + 0 = 1$$
$$w''(0) = 2ww' = 0$$
$$w'''(0) = 2w'^2 + 2ww'' = 2$$
$$w^{iv} = 6w''w' + 2ww''' = 0$$
$$w^{v} = 6w''^2 + 6w'w'' + 2w'w''' + 2ww^{iv} = 16$$
$$w^{vi} = 20w''w''' + 10w'w^{iv} + 2ww^{v} = 0$$
$$w^{vii} = 20w'''^2 + 20w''w^{iv} + 10w''w^{iv} + 10w'w^{v} + 2w'w^{v} + 2ww''' = 272$$

Konačno:

$$w(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$$

odnosno

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6$$

Formiramo tablicu:

i	x_i	w_i	y_i	$y_i *$	f_i	$f_i *$
0	0	0				
1	0.1	0.10033	1.00335			
2	0.2	0.20271	1.01355			
3	0.3	0.30934	1.03112			
4	0.4	0.42279	1.05697			-0.24952
5	0.5		1.09262	1.09255		-0.27142

Kako je $\frac{|y-y^*|}{14} = 5 * 10^{-6}$ sledi da je $y(0.5) = 1.09262$

PRIMER 27

Koristeći Adamsove formule na intervalu $[0,0.5]$ i sa korakom $h = 0.1$ odrediti približno rešenje Košijevog zadatka

$$2y''(x) + y'(x) + 4y(x) = 2\cos(2x)$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 2$$

Početne vrednosti računati preko Tejlorovog polinoma fje $y(x)$ šestog stepena.
Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

$$y''(x) = -\frac{1}{2}y'(x) - 2y(x) + \cos(2x)$$

Uvođenjem smene

$$u_1 = u$$
$$u_2 = u'$$

diferencijalnu jednačinu II reda svodimo na dif.jednačinu I reda. Dobija se da je

$$u_1' = u_2(x)$$
$$u_2'(x) = \cos(2x) - 2u_1(x) - \frac{1}{2}u_2(x)$$
$$u_1(0) = 0$$
$$u_2(0) = 2$$

Početni odsečak za funkciju $u_1(x) = u(x)$ može se odrediti pomoću Tejlorovog polinoma šestog stepena. Prva dva koeficijenta su određena početnim uslovima ($u_1(0) = 2, u_1'(0) = u_2(0) = 2$). Ostale koeficijente nalazimo uzastopnim diferenciranjem polazne jednačine i računanjem tako dobijenih izvod funkcije $u(x)$ u tački 0.
Početni odsečak za funkciju $u_2(x) = u'(x)$ se može dobiti korišćenjem Tejlorovog razvoja sedmog stepena.

$$u_1''(x) = u_2'(x) = \cos(2x) - 2u_1(x) - \frac{1}{2}u_2(x), \quad u_1''(0) = 0$$
$$u_3'''(x) = -2\sin(2x) - 2u_1'(x) - \frac{1}{2}u_2'(x), \quad u_2''(0) = -4$$

.....

Tražene aproksimacije funkcija $u_1(x)$ i $u_2(x)$ su sledećeg oblika:

$$w_1(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{31}{1440}x^6$$
$$w_2(x) = w_1'(x) - \frac{103}{2880}x^6$$

Formiramo tablicu kao i u prethodnim zadacima.

Milnova metoda

Milnova metoda, koja takođe spada u višekoračne metode i koristi se za rešavanje Košijevog problema na ekvidistantnoj mreži, dobija se iz opšte formule

$$y_n = y_{n-2} + h\sum_{k=0}^{m} b_k f_{n-k}$$

$m = 0$: $\quad y_n = y_{n-2} + 2hf_n$

$m = 1$: $\quad y_n = y_{n-2} + 2hf_{n-1}$

$m = 2 = 3$: $\quad y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2}) \qquad (*)$

$m = 4$: $\quad y_n = y_{n-2} + \dfrac{h}{90}(29f_n + 44f_{n-1} + 4f_{n-2} + 4f_{n-3} - f_{n-4})$

Milnova eksplicitna formula se dobija iz integrala:

$$y(x_n) = y(x_{n-1-k}) + \int_{x_{n-1-k}}^{x_n} f\big(x, y(x)\big)dx$$

za $k = 3$ se dobija da je

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3}) \quad .$$

Eksplicitna formula, zajedno sa formulom (*) daje Milnovu formulu

$$y_n^* = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3})$$

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_n^* + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

Milnove formule su 4.reda tačnosti. Greška formula se ocenjuje izrazom

$$||y(x_n) - y_n|| \approx \frac{1}{29}||y_n - y_n^*||$$

PRIMER 29

Milnovom metodom, sa korakom $h = 0.1$ približno rešiti Košijev zadatak

$$y' = \sqrt{x^2\, z + 1} - 1$$

$$y(1) = 1$$

u tački $x = 1.5$. Računati sa 5 decimala, a potreban broj početnih vrednosti odrediti Runge Kutta formulama.

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	1	1	0.41421	0.45785	0.45868	0.50516
1	1.1	1.04587	0.50516	0.55453	0.55558	0.60812
2	1.2	1.10143	0.60812	0.66388	0.66519	0.72448
3	1.3	1.16794	0.72448			
4	1.4	1.24682	0.85574	1.24682	0.85574	
5	1.5	1.33964		1.33964	1.00354	

$$y(1.5) \approx 1.33964$$

PRIMER 30

Milnovom metodom, približno rešiti Košijev zadatak

$$y' = e^x y - 4x^2 y - 2$$
$$y(0) = 2$$

u tačkama $x = 0{,}2$ i $x = 0{,}25$ sa tačnošću $5 * 10^{-4}$. Početne vrednosti računati Tejlorovim polinomom.

Rešenje

Uzećemo da je $h = 0{,}05$. Prvo odreditmo Tejlorov polinom

$$y(0) = 2$$
$$y'(0) = e^0 2 - 4 * 0^2 * 2 - 2 = 0$$
$$y''(0) = e^x y + e^x y' - 8xy - 4x^2 y' = \cdots = 2$$
$$y'''(0) = \cdots = -12$$
$$y^{iv}(0) = \cdots = -4$$
$$w(x) = 2 + x^2 - 2x^3 - \frac{x^4}{6}$$

Maksimalna vrednost poslednjeg člana polinoma u intervalu $[0{,}0.15]$ je reda veličine 10^{-5} pa ga odbacujemo obzirom da ne utiče na rezultat.

$$y_1 = 2 + 0.05^2 - 2(0.05)^3 - \frac{1}{2}(0.05)^4 = 2.00225$$

$$y_2 = 2 + 0.1^2 - 2 * (0.1)^3 - \tfrac{1}{2}(0.1)^4 = 2.00795\ , \ldots$$

Formiramo tablicu

i	x_i	y_i	y_i^*	f_i	f_i^*
0	0.00	2.00		0.00	
1	0.05	2.00225		0.08488	
2	0.10	2.00795		0.13881	
3	0.15	2.01550		0.16028	
4	0.20	2.03979	2.04693	0.16504	0.17262
5	0.25	2.04751	2.06188		0.13204

Kako je $\frac{1}{29}|2.03979 - 2.04963| \leq 5 * 10^{-4}$ postigli smo traženu tačnost.

Takodje $\frac{1}{29}|2.04751 - 2.06188| \leq 5 * 10^{-4}$

Rešenja polaznog problema su

$$y(0{,}2) \approx 2{,}040$$
$$y(0{,}25) \approx 2{,}048$$

PRIMER 31

Za približno rešavanje Košijevog zadatka

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

na ekvidistantnoj mreži izvesti formulu što je moguće višeg reda tačnosti oblika

$$y_n = a y_{n-1} + b y_{n-2} + h(y'_{n-1} + c y'_n)$$

Rešenje:

Budući da imamo tri nepoznate, a, b i c, formula može biti najviše reda 2. tačnosti, to jest. greška na prvom koraku može biti reda $O(h^3)$.

$$\varphi(x_n) = y(x_n) - y_n = O(h^3)$$

Pretpostavimo da su u prethodnim čvorovima vrednosti funkcije i njenog prvog izvoda izračunati tačno:

$$y(x_k) = y_k, k = 1,2, \dots, n-1$$
$$y'(x_k) = y'_k$$
$$R(x_n) = y(x_n) - ay(x_{n-1}) - by(x_{n-2}) - h\big(y'(x_{n-1}) - cy'(x_n)\big) = O(h^3)$$

Kako se uz $y(x_{n-1}), y(x_{n-2})$ i, $y'(x_n)$ nalaze nepoznate konstante, potrebno ih je eliminisati.
Pretpostavimo da je funkcija glatka i da su na osnovu Tejlorovog razvoja u okolini tačke x_n

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k$$
$$y'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y^{(k-1)}(x_n)}{(k-1)!}(x - x_n)^k$$

Dobijamo

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{n-1}) + O(h^3)$$
$$[\ \ y(x_{n-1}) = y(x_{n-2}) + hy'(x_{n-2}) + \tfrac{h^2}{2}y''(x_{n-2}) + O(h^3)\ \ ]$$
$$hy'(x_n) = h\big(y'(x_{n-1}) + hy''(x_{n-1})\big) + O(h^3)$$
$$y(x_{n-2}) = y(x_{n-1}) - hy'(x_{n-1}) - \frac{h^2}{2}y''(x_{n-1}) + O(h^3)$$

Zamenimo u formulu za grešku:

$$R(x_n) = y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{n-1}) + O(h^3)$$
$$-a\big(y(x_{n-1})\big) - b\left(y(x_{n-1}) - hy'(x_{n-1}) - \frac{h^2}{2}y''(x_{n-1}) + O\left(h^3\right)\right) - hy'(x_{n-1})$$
$$- c\left(h\left(y'(x_{n-1}) + hy''(x_{n-1})\right) + O\left(h^3\right)\right)$$

Grupišemo uz $y(x_{n-1})$, $y'(x_{n-1})$ i $y''(x_{n-1})$:

$$(1 - a - b)y(x_{n-1}) + h(1 + b - 1 - c)y'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2}(1 - b - 2c)y''(x_{n-1}) + O(h^3)$$

Da bi greška bila reda $O(h^3)$ svi koeficijenti uz h^k moraju biti jednaki nuli:

$$1 - a - b = 0$$
$$b - c = 0$$
$$1 - b - 2c = 0$$

Rešavanjem sistema dobijamo da je $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{3}$.
Početna formula je oblika

$$y_n = \frac{2}{3}y_{n-1} + \frac{1}{3}y_{n-2} + h\left(y'_{n-1} + \frac{1}{3}y'_n\right)$$

PRIMER 32

Za približno rešavanje Košijevog zadatka

$$y' = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0$$

na ekvidistantnoj mreži izvesti formulu što je moguće višeg reda tačnosti oblika

$$y_n = ay_{n-1} - by_{n-2} + hcy'_{n-1} + h^2(dy''_{n-1} - ey''_{n-2})$$

Rešenje:

Problem se rešava analogno. Imamo 5 nepoznatih, formula može biti tačna za polinome 4og stepana.

$$\varphi(x_n) = y(x_n) - y_n = O(h^5)$$
$$R(x_n) = y(x_n) - ay(x_{n-1}) + by(x_{n-2}) - hcy'(x_{n-1}) - h^2dy''(x_{n-1}) + h^2ey''(x_{n-2}) = O(h^5)$$

$$y(x_{n-1}) = y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$
$$y(x_{n-2}) = y(x_n - 2h) = y(x_n) - 2hy'(x_n) + \frac{4h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{8h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{16h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$
$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$
$$y''(x_{n-1}) = y''(x_n) - hy'''(x_n) + \frac{h^2}{2!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$
$$y''(x_{n-2}) = y''(x_n) - 2hy'''(x_n) + \frac{4h^2}{2!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5)$$

Grupisanjem elemenata uz nepoznate i izjednačavanjem sa nulom dobiće se rešenje problema.

Metod gađanja za rešavanje graničnih problema

Posmatramo sledeći granični problem:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
$$y(a) = y_0, y(b) = y_b$$

Rešenje:

Uvođenjem smene $z = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ početni problem dobija sledeći oblik:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z)$$
$$y(a) = y_0 \qquad z(a) = ?$$

Kao što se može primetiti, početna vrednost prvog Košijevog zadatka je poznata ($y(a) = y_a$) međutim, početno rešenje drugog Košijevog zadatka nije poznato. Metodom gađanja ovo rešenje možemo da pogodimo.
Stavimo da je $y'(a) = Y_a$ i metodom pokušaja i grešaka "gađamo" vrednost Y_a.
"Gađanje" vrednosti Y_a vršimo pomoću nekih numeričkih metoda na sledeći način.
Pro izaberemo jednu vrednost za Y_a, na primer Y_{a_1}. Rešimo početni problem. Neka je $u_1(x)$ funkcija kojom smo aproksimirali rešenje polaznog problema. Ukoliko se dobije da je $u_1(b) = y_b$ početni problem je rešen. Međutim, kako ovo najčešće nije slučaj (teško da možemo da pogodimo rešenje tek tako), označimo vrednost $u_1(b)$ kao y_{b_1}.

Ponavljamo postupak, za Y_{a_2}: rešenje polaznog problema označićemo kao $u_2(x)$. Ukoliko je sada $u_2(b) = y_b$ zadatak je rešen. Inače, postupak se ponavlja izborom nove vrednosti za Y_a.

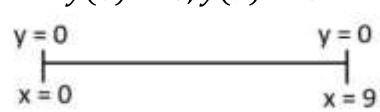
Najzad, kako smo za više različitih vrednosti broja Y_a dobili potencijalna rešenja, primenom neke numeričke metode, sa određenom tačnošću možemo izabrati vrednost Y_a tako da $u(b)$ bude jednako y_b.

Y_a	Y_{a_1}	Y_{a_2}	...
y_b	y_{b_1}	y_{b_2}	...

PRIMER 33

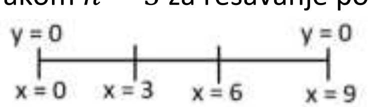
Rešiti sledeći granični zadatak:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} - 2y = 8x(9 - x)$$
$$y(0) = 0, y(9) = 0$$



Rešenje:

Koristimo na primer Ojlerov metod sa korakom $h = 3$ za rešavanje polaznog problema:



Pretpostavimo da je $y'(0) = 4$ i videti koja će se vrednost dobiti za $y(9)$.

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 2y + 8x(9-x) = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 4$$

Uvođenjem smene $\frac{\partial y}{\partial x} = z$ polazni problem dobija sledeći oblik:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z = f_1(x, y, z), \qquad y(0) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 8x(9-x) = f_2(x, y, z), \qquad z(0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0) = 4$$

Iz prve jednačine dobijamo da je

$$y_{i+1} = y_i + h * f_1(x_1, y_1, z_1)$$
$$z_{i+1} = z_i + h * f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + hf_1(x_0, y_0, z_0) = 0 + f_1(0,0,4) * 3 = 12$$
$$z_1 = z_0 + hf_2(x_0, y_0, z_0) = 4 + f_2(0,0,4) * 3 = 4 + \big(2 * 0 + 8 * 0 * (9-0)\big) = 4$$

$i = 2$

$$y_2 = y_1 + hf_1(x_1, y_1, z_1) = 12 + f_1(3,12,4) * 3 = 24$$
$$z_2 = z_1 + hf_2(x_1, y_1, z_1) = 4 + f_2(3,12,4) * 3 = 508$$

$i = 3$

$$y_3 = y_2 + hf_1(x_2, y_2, z_2) = 24 + f_1(6,24,508) * 3 = 1548$$

Primetimo da je $y(x_3) \approx y_3 = 1548$. Dobijeno rešenje poprilično odstupa od početne vrednosti koja je data. Zato uzimamo drugu vrednost za $y'(0)$.

Neka je, na primer $y'(0) = -24$. Ponovimo postupak, rešavamo problem

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z = f_1(x, y, z), \qquad y(0) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y + 8x(9-x) = f_2(x, y, z), \qquad z(0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0) = -24$$

Ponovo koristimo Ojlerovom metod:

$$y_{i+1} = y_i + h * f_1(x_1, y_1, z_1)$$
$$z_{i+1} = z_i + h * f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + hf_1(x_0, y_0, z_0) = 0 + f_1(0,0,-24) * 3 = -72$$
$$z_1 = z_0 + hf_2(x_0, y_0, z_0) = -24 + f_2(0,0,-24) * 3 = -24$$

$i = 2$

$$y_2 = y_1 + hf_1(x_1, y_1, z_1) = -72 + f_1(3,-72,-24) * 3 = -144$$
$$z_2 = z_1 + hf_2(x_1, y_1, z_1) = -24 + f_2(3,-72,-24) * 3 = -24$$

$i = 3$

$$y_3 = y_2 + hf_1(x_2, y_2, z_2) = -72 + f_1(6,-144,-24) * 3 = -216.$$

Primetimo sada da je $y(x_3) \approx y_3 = -216$. Međtim, i ovo rešenje poprilično odstupa od početne vrednosti koja je data. Treba izabrati neku treću vrednost za $y'(0)$. Nova vrednost se može dobiti nekom numeričkom metodom (na primer inverznom interpolacijom):

p	q
4	1548
-24	-216

$$p = p_0 + \frac{p_1 - p_0}{q_1 - q_0}(q - q_0), q_0 \leq q \leq q_1$$

$$p = 4 + \frac{-24 - 4}{-216 - 1548}(0 - 1548) = -20.57$$

Probamo sada sa sledećim gađanjem, uzmemo da je $y'(0) = -20.57$

Dobijamo sledeća rešenja:

$$y_1 = y_0 + hf_1(x_0, y_0, z_0) = -61.7$$

$$z_1 = z_0 + hf_2(x_0, y_0, z_0) = -20.57$$

$$i = 2$$

$$y_2 = y_1 + hf_1(x_1, y_1, z_1) = -123{,}42$$

$$z_2 = z_1 + hf_2(x_1, y_1, z_1) = 41.17$$

$$i = 3$$

$$y_3 = y_2 + hf_1(x_2, y_2, z_2) = 0.09.$$

Naravno dobijeno rešenje nije baš jednako nuli, to je zato što smo Y_a aproksimirli sa 2 cifre.

NUMERIČKO REŠAVANJE GRANIČNIH ZADATAKA

Granični zadatak za obične DJ predstavlja problem nalaženja partikularnog rešenja sistema:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$\alpha y(p) + \beta y'(p) = P$$
$$\gamma y(q) + \delta y'(q) = Q$$

gde su p, q dve tačke intervala (najčešće njegovi krajevi) dok su α, β, γ i δ date konstante.

- Ako su $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0, \beta = 0$ i $\delta = 0$ granični uslov se naziva I ili DIRIHLEOV GRANIČNI USLOV
- Ako su $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta \neq 0$ i $\delta \neq 0$ granični uslov se naziva II ili NOJMANOV GRANIČNI USLOV
- Ako su $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0, \beta \neq 0$ i $\delta \neq 0$ granični uslov se naziva III ili GRANIČNI USLOV

METODE KONAČNIH RAZLIKA

- Zasnivaju se na zameni izvoda količnicima konačnih razlika (koristi se i termin MREŽA)
- Koristimo podeljene razlike unapred i unazad:

Podeljene razlike unapred O(h): $y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Podeljene razlike unazad O(h): $y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$

$$y_{\dot{x},i} = \frac{1}{2}\left(y_{x,i} + y_{\bar{x},i}\right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$ -ovo je aproksimacija koju koristimo.

Na sličan način, aproksimiramo i II izvod:

$$y_{x\bar{x},i} = (y_x)_{\bar{x},i} = \frac{1}{h}\left(y_{x,i} - y_{x-1,i}\right) = \dots = \frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{h^2}$$

Rešavamo granične zadatke oblika:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$
$$y(p) = P$$
$$y(q) = Q$$

gde su p i q krajevi intervala.

Koristimo "metodu progonke" kojom se rešavanje graničnih zadataka svodi na trodijagonalni sistem jednačina:

$$\begin{aligned} -c_0 y_0 + B_0 y_1 &= F_0 \\ A_i y_{i-1} - c_i y_i + B_{i+1} y_{i+1} &= F_i \\ A_n y_{n-1} - c_n y_n &= F_n \end{aligned}$$

Algoritam za rešavanje se zasniva na sledećim formulama:

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{c_0}, \qquad \beta_1 = -\frac{F_0}{c_0}$$
$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{c_i - \alpha_i A_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{\beta_i A_i - F_i}{c_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$y_n = \frac{\beta_n A_n - F_n}{c_n - \alpha_n A_n} \ \ (= \beta_{n+1})$$
$$y_i = y_{i+1}\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad i = \overleftarrow{0, \dots, n-1}$$

TEOREMA

Ako je $|c_i| \geq |A_i| + |B_i|$ $i = 1,..,n-1$, $|B_0| \leq 1, |A_n| \leq 1, |B_0| + |A_n| < 2$ tada je metoda progonke stabilna.

PRIMER 34

Metodom konačnih razlika rešiti granični zadatak

$$y'' - x^2 y = -2$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

sa korakom $h = 0.5$. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Diskretizacija problema:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	-0.5	0	0.5	1

Drugi izvod računamo po formuli:

$$y_{x\bar{x},i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$i = 1$ $\quad \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - 0.25y_1 = -2$

$i = 2$ $\quad \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - 0 * y_2 = -2$

$i = 3$ $\quad \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} - 0.25y_3 = -2$

$i = 4$ $\quad y_4 = 0$

Sređujemo sistem:

$$\begin{aligned} y_0 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1 \\ 4y_0 - 8.25y_1 + 4y_2 \qquad\qquad &= -2 \\ 4y_1 - 8y_2 + 4y_3 \qquad &= -2 \\ 4y_2 - 8.25y_3 + 4y_4 &= -2 \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Koristeći algoritam progonke koja je po teoremi stabilna ($|A_i| + |B_i| \leq |C_i|, |A_n| \leq 1, |B_0| \leq 1, |B_0| + |A_n| < 2$), dobijamo rešenje u tabličnom obliku:

$$A_0 = 1, \beta_0 = 0, A_n = 0, c_n = -1$$

i	A_i	c_i	B_i	F_i	α_i	β_i	y_i
0	0	-1	0	0	*	*	0
1	4	8.25	4	-2	0	0	0.7058
2	4	8	4	-2	0.4848	0.2424	0.9559
3	4	8.25	4	-2	0.6600	0.4900	0.7059
4	0	-1	*	0	0.7130	0.7059	0

PRIMER 35

Metodom konačnih razlika rešiti granični zadatak

$$y'' + 2xy' - y = x$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

sa korakom $h = 0.2$. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Diskretizacija problema:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0.2	0.4	0.60	0.80	1

Drugi izvod računamo po formuli:

$$y\ '' = \frac{(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})}{h^2}, \quad y' = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

$i = 1 \qquad \frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2} + 2x_1\frac{y_2-y_0}{2h} - y_1 = x_1$

$i = 2 \qquad \frac{y_3-2y_2+y_1}{h^2} + 2x_2\frac{y_3-y_1}{2h} - y_2 = x_2$

$i = 3 \qquad \frac{y_4-2y_3+y_2}{h^2} + 2x_3\frac{y_4-y_2}{2h} - y_3 = x_3$

$i = 4 \qquad \frac{y_5-2y_4+y_3}{h^2} + 2x_4\frac{y_5-y_3}{2h} - y_4 = x_4$

$i = 5 \qquad y_5 = 0$

Sređujemo sistem:

$$\begin{aligned}
&y_0 &&= 0\\
&24y_0 - 51y_1 + 26y_2 &&= 0.2\\
&23y_1 - 51y_2 + 27y_3 &&= 0.4\\
&22y_2 - 51y_3 + 29y_4 &&= 0.6\\
&21y_3 - 51y_4 + 29y_5 &&= 0.8\\
&y_5 &&= 0
\end{aligned}$$

Koristeći algoritam progonke koja je po teoremi stabilna, dobijamo rešenje u tabličnom obliku:

i	A_i	c_i	B_i	F_i	α_i	β_i	y_i
0	*	-1	0	1	*	*	1
1	24	51	26	0.2	0.0000	1	0.6691
2	23	51	27	0.4	0.5098	0.46667	0.3971
3	22	51	28	0.6	0.6875	0.2631	0.1950
4	21	51	29	0.8	0.7805	0.1446	0.0646
5	0	-1	*	0	0.8379	0.0646	0.0000

Napomena:
Za aproksimaciju prvog izvoda kod graničnih zadataka možemo da koristimo i sledeće formule:

$$y_0' = \frac{y_1-y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_n-y_{n-1}}{h}, \quad O(h)$$
$$y_0' = \frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}, \quad y_n' = \frac{y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n}{2h}, \quad O(h^2)$$

```
Primer.m
h = 0.2;
alpha1 = @(x) x.*0 + 1;
beta1 = @(x) 2.*x;
gamma1 = @(x) x.*0-1;
f = @(x) x;
a = 1;
b = 0;
g = 1;
d = 0;
p = 0;
q = 1;
P = 1;
Q = 0;

function Y = konacneRazlike()
Primer;
% ------------------------------------------------------
%  Metodom konacnih razlika sa korakom h resiti granicni zaddatak
% alpha(x)y'' + beta(x)y' + gamma(x)y(x) = f(x)
% ay(p) + by'(q) = P
% gy(q) + dy'(q) = Q
% ------------------------------------------------------
% Resavamo problem
% My = B
% gde matrica M sadrzi koeficijente koji se nalaze uz x_i

% Koristimo vektor
X = [p:h:q];
n = length(X);
M = zeros(n,n);
% Definisemo granicni uslov   a*y_0 + b*(y_1-y_0)/h = P
M(1,1) = a-b/h;
M(1,2) = b/h;
B(1) = P;
% Definisemo drugi granicni uslov q*y_n + d*(y_n-y_{n-1})/h = Q
M(n,n-1) = -d/h;
M(n,n) = q + d/h;
B(n) = Q;
for i = 2:n-1
     M(i,i-1) = alpha1(X(i))./(h.^2) - beta1(X(i))./(2*h);
     M(i,i) = gamma1(X(i)) - 2*alpha1(X(i))./h.^2;
     M(i,i+1) = alpha1(X(i))./h.^2 + beta1(X(i))./(2.*h);
     B(i) = f(X(i));
end
[M B']
Y = inv(M)*B';
end
```

PRIMER 36

Metodom konačnih razlika rešiti granični zadatak

$$y'' + xy' - \frac{y}{2x} = 1$$
$$y(2) + 2y'(2) = 1$$
$$y(2.3) = 2.15$$

Diferencijskom shemom tačnosti $O(h^2)$ za $h = 0.1$. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Diskretizacija problema:

x_0	x_1	x_2	x_3
2	2.1	2.2	2.3

Drugi izvod računamo po formuli:

$$y\ '' = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2},\quad y' = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},\quad y_n' = \frac{y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n}{2h}$$

$y(2) + 2y'(2) = 1$: $\qquad y_0 + \frac{2(-3y_0+4y_1-y_2)}{2h} = 1$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{y_i}{2x_i} = 1$$
$$y_n = 2.15$$

Sređujemo sistem:

….

Dobijeni sistem nije trodijagonalan. Sredimo ga kako bi postao trodijagonalan (npr. iz prve jednačine eliminišemo y_2) "sredimo sistem" kako bi metoda progonke bila stabilna:

$$-0{,}9553y_0 + y_1 \quad = 0.0498$$
$$89.5y_0 - 200.2381y_1 + 110.5y_2 = 1$$
$$-89y_1 - 200.2273y_2 + 111y_3 = 1$$
$$y_3 = 2.15$$

Koristeći algoritam progonke koja je po teoremi stabilna, dobijamo rešenje u tabličnom obliku:

i	A_i	c_i	B_i	F_i	α_i	β_i	y_i
0	*	0.9553	1	0.0498	*	*	2.2353
1	89.5	200.2381	110.5	1	1.0468	-0.0521	2.1851
2	89	200.2273	110.0	1	1.0371	-0.0531	2.1582
3	0	-1	*	2.15	1.0285	-0.0531	2.1500

PRIMER 37

Metodom konačnih razlika rešiti granični zadatak

$$x^2y'' + xy' + 1 = 2x^3$$

$$y(1) + 3y'(1) = 2$$
$$2(y(1.5) - y'(1.5)) = 0$$

Diferencijskom shemom tačnosti $O(h^2)$ za $h = 0.1$. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Diskretizacija problema:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5

$$y_0 + +3\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = 2$$

$$x_i^2\ (\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h^2} + 1 = 2x_i^3$$

$$2\left(y_5 + \frac{3y_5 - 4y_4 + y_3}{2h}\right) = 0$$

Sređujemo sistem:

$$-44y_0 + 60y_1 - 15y_2 = 2$$
$$115.5y_0 - 242y_1 + 126.5y_2 = 1.662$$
$$138y_1 - 288y_2 + 150y_3 = 2.456$$
$$162.5y_2 - 338y_3 + 175.5y_4 = 3.394$$
$$189y_3 - 392y_4 + 203y_5 = 4.488$$
$$5y_3 - 10y_4 + 16y_5 = 0$$

Dobijeni sistem nije trodijagonalan, izvršimo par trnsformacija kako bi sistem sveli na trodijagonalni … za domaći :D

Treći granični zadatak

Treći granični zadatak je oblika

$$-(a(x)y(x)')' + c(x)y(x) = f(x)$$
$$a(p)y'(p) - \sigma_0 y(p) = 0$$
$$a(q)y'(q) + \sigma_1 y(q) = 0$$
$$x \in [p,q]$$

Diskretizacija problema:

$$-\frac{1}{2}\left[(ay'_x)'_{\bar{x},i} + (ay'_{\bar{x}})'_{x,i}\right] + c_i y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$
$$\frac{2}{h}\left[-\frac{a_0 + a_1}{2} y_{x,0} + \sigma_0 y_0\right] + c_0 y_0 = f_0$$
$$\frac{2}{h}\left[\frac{a_n + a_{n-1}}{2}\ y_{\bar{x},0} + \sigma_1\ y_n\ \right] + c_n y_n = f_n$$

Odnosno:

$$-\frac{a(x_0) + a(x_1)}{h^2} y_1 + \left[\frac{a(x_0) + a(x_1)}{h^2} + \frac{2\sigma_0}{h} + c_0\right] y_0 = f_0$$
$$-\frac{a(x_{i+1}) + a(x_i)}{2h^2} y_{i+1} + \left[\frac{a(x_{i+1}) + 2a(x_i) + a(x_{i-1})}{2h^2} + c_i\right] y_i - \frac{a(x_i) + a(x_{i-1})}{2h^2} y_{i+1} = f(x_i), i = \overline{1, n-1}$$
$$\frac{a(x_n) + a(x_{n-1})}{h^2} y_{n-1} + \left[-\frac{a(x_n) + a(x_{n-1})}{h^2} + \frac{2\sigma_1}{h} + c_n\right] y_n = f_n$$

PRIMER 38

Približno rešiti granični zadatak:

$$-\left(x^2 y'(x)\right)' + 13y(x) = x^3$$
$$0.01y'(0.1) - y(0.1) = -0.0007$$
$$y'(0.5) + y(0.5) = 0.875$$

za $\in [0.1, 0.5]$ $h = 0.1$. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Primetimo da granični uslovi nisu homogeni i da drugi uslov nije zadat u traženom obliku. Pomnožićemo drugu jednačinu sa $a(0{,}5) = x^2 = 0.25$ a zatim uvodimo smenu:

$$y(x) = z(x) + \alpha x + \beta, \qquad \alpha, \beta \in R$$

Parametre α i β biramo tako da ograničenja budu u sledećem obliku:

$$0.01z'(0.1) - z(0.1) = 0$$
$$0.25z'(0.5) + 0.25z(0.5) = 0$$

Na osnovu graničnih uslova

$$0.01(z'(0.1) + \alpha) - (z(0.1) + 0.1\alpha + \beta) = -0.007$$
$$0.25(z'(0.5) + \alpha) + 0.25(z(0.5) + 0.5\alpha + \beta) = 0.2188$$

dobijamo sledeći sistem

$$0.01\alpha - 0.1\alpha - \beta = -0.007$$
$$0.25\alpha + 0.125\alpha + 0.25\beta = 0.875$$

Rešenje posmatranog sistema je $\alpha = 0.6201$, $\beta = -0.0551$.

Dakle, uvodimo smenu:

$$y(x) = z(x) + 0.6201x - 0.0551.$$

Novi granični zadatak je sledećeg oblika:

$$-(x^2 z') + 13z = x^3 - 6.8211x + 0.7163$$
$$0.01z'(0.1) - z(0.1) = 0$$
$$0.25z'(0.5) + 0.25z(0.5) = 0$$

Diskretizacija:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

$$\frac{2}{h}\left[-\frac{x_0^2 + x_1^2}{2}\frac{z_1 - z_0}{h} + z_0\right] + 13z_0 = 0.0352,$$

$$-\frac{x_i^2 + x_{i-1}^2}{2h^2} z_{i-1} + \left(\frac{x_{i+1}^2 + 2x_i^2 + x_{i-1}^2}{2h^2} + 13\right) z_i - \frac{x_{i+1}^2 + x_i^2}{2h^2} z_{i+1} = (x_i^3 - 6.8211x_i + 0.7163\ )$$

$$\frac{2}{h}\left[\frac{x_3^2 + x_4^2}{2}\frac{z_4 - z_3}{h} + 0.25z_4\right] + 13z_4 = -2.5692$$

Posle sređivanja dobijamo:

$$-38z_0 + 5z_1 = -0.0352$$
$$2.5z_0 - 22z_1 + 6.5z_2 = 0.6399$$
$$6.5z_1 - 32z_2 + 12.5z_3 = 1.3030$$
$$12.5z_2 - 46z_3 + 20.5z_4 = 1.9481$$
$$41z_3 - 59z_4 = 2.56692$$

Metoda progonke nije stabilna => Delimo I jednačinu sa 10 a poslednju sa 41.

$$-3.8z_0 + 0.5z_1 = -0.00352$$
$$z_3 - 1.4390z_4 = 0.0627$$

i	A_i	c_i	B_i	F_i	α_i	β_i	z_i
0	*	3.8	0.5	-0.00352	*	*	-0.0071
1	2.5	22	6.5	0.6399	0.1316	0.0009	-0.0606
2	6.5	32	12.5	1.3030	0.2999	-0.0294	-0.1039
3	12.5	46	20.5	1.9481	0.4160	-0.0497	-0.1304
4	1	1.4390	*	0.0627	0.5025	-0.0630	-0.1342

Zamenom u y dobijamo:

z_i	y_i	tačno y
-0.0071	-0.002	0,0010
-0.0606	0.0083	0,0080
-0.1039	0.0270	0,0270
-0.1304	0.0625	0,0640
-0.1342	0.1208	0,1250

Poređenja radi, rešenje polaznog sistema je funkcija $y(x) = x^3$

Može se primetiti da se greška povećava na krajevima intervala.

PRIMER 39

Približno rešiti granični zadatak:

$$-(xy')' + y = 1 - xe^x$$
$$y'(0.5) - y(0.5) = -1$$
$$y(0.9) = 3.4596$$

Diferencijskom šemomm tačnosti $O(h^2)$ na ravnomernoj mreži koraka $h = 0.1$ i rešiti diskretni zadatak računajući na 4 decimale.

Rešenje:

Slično kao kod prethodnog zadatka, prvo se primeti da uslovi nisu homogeni. Uvodimo smenu

$$y(x) = z(x) + ax + b$$

Zamenom u zadati problem dobiće se vrednost parametara $a = 1.75686$ i $n = 1.87843$.

Rešavamo sledeći granični zadatak:

$$-(xz'(x))' + z(x) = 1 + a - b - x(b + e^x)$$
$$0.5z'(0.5) - 0.5z(0.5) = 0$$
$$z(0.9) = 0$$

Diferencijska šema je sledećeg oblika:

$$\left(\frac{x_0 - x_1}{h^2} + \frac{1}{h} + 1\right)v_0 - \frac{x_0 - x_1}{h^2}v_1 = f_0$$
$$-\frac{x_{i-1} + x_i}{2h^2}v_{i-1} + \left(\frac{x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1}}{2h^2} + 1\right)v_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2h^2}v_{i+1} = f_i \qquad , i = 1,2,3 \ldots$$
$$v_4 = 0$$

Rešavanjem diferencijskog problema dobijaju se sledeće vrednosti

$$v_0 = -0.10545$$
$$v_1 = -0.10850$$
$$v_2 = -0.09323$$
$$v_3 = -0.05777$$
$$v_4 = 0$$

pa je približno rešenje problema

$$y(0.5) = 2,6514$$
$$y(0.6) = 2.8240$$
$$y(0.7) = 3.0150$$
$$y(0.8) = 3.2262$$
$$y(0.9) = 3.4596$$

```
Primer.m
h = 0.1;
a = @(x) x.^2;
c = @(x) 0.*x + 13;
f = @(x) x.^3 - 6.8211*x + 0.7163;
p = 0.1;
q = 0.5;
sigma1 = -1;
sigma2 = 0.25;


function y = treciGranicniZadatak()
Primer;
% Resavamo treci granicni zadatak
% koristimo diskretizaciju granicnih uslova
% a(p)*y'(p) - delta0*y(p) = 0;
% a(q)*y'(q) - delta1*y(q) = 0
% i diskretizaiju funkcije
% -(a(x)y(x)')' + c(x)y(x) = f(x)
X = [p:h:q];
n = length(X);
M = zeros(n,n);
% 2/h*[-(a(x_0)+a(x_1))/2 * (y(x_1)-y(x_0)/h + sigma1*y(x_0)] + c_0*y_0 =
f_0
M(1,1) = 2/h*( (a(X(1))+a(X(2)))/(2*h) + sigma1) + c(X(1));
M(1,2) = -2/h*(a(X(1))+a(X(2)))/(2*h);
B(1) = f(X(1));
% 2/h*[(a(x_n)+a(x_{n-1}))/2 * (y(x_n)-y(x_{n-1})/h + sigma2*y(x_n)] +
c_n*y_n = f_n
M(n,n-1) = 2/h*( -(a(X(n))+a(X(n-1)))/(2*h));
M(n,n) = 2/h*((a(X(n))+a(X(n-1)))/(2*h) + sigma2) + c(X(n));
B(n) = f(X(n));
for i = 2:n-1
    M(i,i-1) = -(a(X(i))+a(X(i-1)))./(2.*h.^2);
    M(i,i) = (a(X(i+1))+2*a(X(i))+a(X(i-1)) )/(2.*h.^2)+c(X(i));
    M(i,i+1) = -(a(X(i)) + a(X(i+1)))./(2.*h.^2);
    B(i) = f(X(i));
end
[M B']
X'
y = inv(M)*B'
z = y + 0.6201*X' -0.0551
end
```

% PROVERITI ZASTO JE RACUN DRUGACIJI.

Shema povišene tačnosti

Rešavamo sledeći problem:
Koristeći identitet

$$y_{\bar{x}x} = y'' + \frac{h^2}{12} y^{(4)} + O(h^4)$$

konstruisati diferencijsku shemu tačnosti $O(h^4)$
za granični zadatak

$$ay''(x) + by(x) = f(x)$$
$$y(0) = A$$
$$y(1) = B$$

Rešnje:
Iz DJ imamo da je

$$y'' = \frac{1}{a}(-by + f) \quad (*)$$

Diferenciramo (*) dva puta (po x)

$$y^{(3)} = \frac{1}{a}(-by' + f')$$
$$y^{(4)} = \frac{1}{a}(-by'' + f'')$$

U poslednju jednakost zamenimo y'' sa (*)

$$y^{(4)} = \frac{1}{a}(-b\frac{1}{a}(-by + f) + f'')$$
$$y^{(4)} = -\frac{b}{a^2}(-by + f) + \frac{f''}{a}$$

Zamenom poslednje jednakosti u dati identitet

$$y_{\bar{x}x} - \frac{1}{a}(-by + f) - \frac{h^2}{12}\left[-\frac{b}{a^2}(-by + f) + \frac{f''}{a}\right] = 0$$

dobija se tražena formula

$$y_{\bar{x}x} + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\right)y = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\right)f + \frac{h^2}{12a}f''$$
$$y_0 = A$$
$$y_n = B$$

Dobijena diferencijska shema se naziva SHEMOM POVIŠENE TAČNOSTI i odgovara samo zadacima napisanim u istom obliku kao i gore navedeni zadatak.

PRIMER 40

Shemom povišene tačnosti rešiti granični zadatak

$$y'' + y + x = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

sa korakom $h = 0.2.$ Raditi na 4 decimale.

Rešenje:

Koristimo shemu koju smo izveli:

$$a = b = 1, \quad f(x) = -x,$$
$$A = B = 0, \quad f'(x) = -1, \ f''(x) = 0$$

Diskretizujemo problem:

$$y_0 = 0$$
$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \left(1 - \frac{h^2}{12}\right) y_i = -\left(1 - \frac{h^2}{12}\right) x_i$$
$$y_5 = 0$$

Razvijemo srednju jednačinu:

$$-y_{i-1} + 1.9601 y_i - y_{i+1} = 0.399 x_i, \qquad i = 1,2,3,4$$

Primenimo metodu progonke.

Dobijamo sledeće rešenje:

$$y_0 = 0, y_1 = 0.03615, \ y_2 = 0.06286, \ y_3 = 0.0711, y_4 = 0.05253.$$

Poređenja radi tačno rešenje problema je

$$y(x) = \frac{sinx}{sin1} - x.$$

(Greška će biti reda 10^{-5})

PRIMER 41

Metodom konačnih razlika, sa korakom $h = 0{,}2$ rešiti granični problem:

$$y'' + x^2 y + 2 = 0$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

Računati na 4 decimale.

Rešenje:

Primetimo da su problem i ograničenja simetrični u odnosu na koordinatni početak (tj. Funkcija $y(x)$ je parna).
Rešenje se može posmatrati samo na intervalu [0,1].

Diskretizujemo problem:

$$y_0 = -1$$
$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + x_i^2 y_i + 2 = 0$$
$$y_n = 0$$

Rešenje sistema je

$$y_0 = 1.0533, y_1 = 1.10133, y_2 = 0.8916, y_3 = 0.6843, y_4 = 0.3871, y_5 = 0$$

PRIMER 42

Shemom povišene tačnosti, sa korakom $h = 0{,}25$ rešiti granični zadatak

$$y'' = y + e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$y(-1) = y(1) = 0$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Koristimo izvedenu shemu:

$$a = 1, b = -1, f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diskretizujemo problem

$$y_{\bar{x}x} - \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) y = \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) f + \frac{h^2}{12}\left(e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}\right)$$

Dobiće se sledeći sistem:

$$y_0 = 1$$
$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) y_i = \left(1 + \frac{h^2}{12}\right) e^{-\frac{x_i^2}{2}} + \frac{h^2}{12}(1 + x_i^2) e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$
$$y_8 = 1$$

Sistem je trodijagonalan

$$y_0 = 1$$
$$\frac{1}{h^2} y_{i-1} - \left(\frac{2}{h^2} + 1 + \frac{h^2}{12}\right) y_i + \frac{1}{h^2} y_{i+1} = e^{-\frac{x_i^2}{2}}\left(1 + \frac{2h^2}{12} + \frac{x_i^2 h^2}{12}\right)$$
$$y_8 = 1$$

Proverimo da li je progonka stabilna (jeste).

Dobićemo rešenja:

$$y(-1) = 0, y(1) = 0$$
$$y(-0.75) = y(0.75) = 0.1408$$
$$y(-0.5) = y(0.5) = -0.2433$$
$$y(-0.25) = y(0.25) = -0.3058$$

PRIMER 43

Shemom povišene tačnosti rešiti granični zadatak

a)

$$2y'' + y + sinx = 0$$
$$y(0) = 0, y(1) = \pi$$

b)

$$y'' + 3y - \tfrac{1}{2} e^x = 0$$
$$y(0) = 1, y(1) = 1$$

sa korakom $h = 0.2$ ($h = 0.1$). Raditi na 4 decimale.

VARIJACIONE METODE

Neka su diferencijalne jednačine date u obliku $Ly = f$ gde je L diferencijalni operator.
Približno rešenje tražimo u obliku

$$y(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x)$$

gde su funkcije $\psi_k(x), k = 1, \dots, n$ poznate linearno nezavisne funkcije koje zadovoljavaju homogene granične uslove, a $\psi_0(x)$ se bira tako da zadovoljava zadate granične uslove.

Konstante $c_k, k = 1, .., n$ se određuju minimizacijom funkcije greške koja je data izrazom:

$$R(x; c_1, \dots, c_n) = Ly - f$$

METODA KOLOKACIJE

Konstante c_k određujemo tako da funkcija greške u izabranim tačkama $x_k, k = 1, .., n$ bude jednaka nuli:

$$R(x; c_1, .., c_k) = 0, k = 1, .., n$$

METODA NAJMANJIH KVADRATA

Umesto minimizacije funkcionala, minimizira se funkcija greške:

$$||R||^2 = \int_a^b R^2(x; c_1, .., c_n)dx \to inf$$

<u>Podsećamo se</u> : Skalarni proizvod definisan u prostoru $L_2(a, b)$ sa (y, z)=$\int_a^b y(x)z(x)dx$

gde je norma $||y|| = \sqrt{\int_a^b y^2 dx}$

RICOVA METODA

Koristimo je kada je L samokonjugovan operator
Konstante $c_k, k = 1, .., n$ određujemo tako da je greška ortogonala na funkcije

$$< R, \psi_k >= \int_a^b R \quad (x; c_1, .., c_n)\psi_k(x)dx = 0$$

<u>Podsećamo se:</u> Operator L je samokonjugovan ako za svako $\forall y, z \in C^2(a, b)$ važi

$$< Ly, z > =< Lz, y >$$

Može se pokazati da je operator oblika

$$Ly = -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x)$$

p, q - dovoljno glatke

$$y \in C^2(a, b)$$

samokonjugovan.

GALERKINOVA METODA

Konstante $c_k, k = 1, .., n$ se određuju tako da greška funkcije ortogonalna na izborni sistem linearno nezavisnih funkcija

$$< R, \varphi_k >= \int_a^b R \quad (x; c_1, .., c_n)\varphi_k(x)dx = 0$$

Može se uzeti da je $\varphi_k = \psi_k$ čime se ova metoda svodi na Ricovu.

PRIMER 44

Metodom kolokacije rešiti granični zadatak:

$$y'' + y = sinx$$
$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Ako su tačke kolokacije ½ i 1, a bazisne funkcije su

$$\psi_0(x) = sinx + cosx,$$
$$\psi_1(x) = xcosx,$$
$$\psi_2(x) = x^2cosx$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Približno rešenje je sledećeg oblika:

$$y(x) \approx sinx + cosx + c_1xcosx + c_2x^2cosx$$

što znači da je ocena greške:

$$R(x, c_1, c_2) = (sinx + cosx + c_1xcosx + c_2x^2cosx)''_{xx} + (sinx + cosx + c_1xcosx + c_2x^2cosx) - sinx$$

koja posle sređivanja dobia sledeći oblik:

$$R(x, c_1, c_2) = -sinx - 2c_1sinx + 2c_2(\cos x - 2xsinx).$$

Korišćenjem uslova kolokacije

$$R\left(\frac{1}{2}, c_1, c_2\right) = 0,$$
$$R(1, c_1, c_2) = 0$$

dobija se sledeći sistem:

$$-0.9589c_1 + 0.7963c_2 = 0.4794$$
$$-1.6829c_1 - 2.2853c_2 = 0.8415$$

čija su rešenja:

$$c_1 = -0.5$$
$$c_2 = 0.$$

Približno rešenje početnog problema je

$$y(x) \approx sinx + \left(1 - \frac{1}{2}x\right)cosx$$

(Ovo je, inače, tačno rešenje)

PRIMER 45

Metodom kolokacije rešiti granični zadatak:

$$y'' + y' - xy = e^x$$
$$y(0) = 1, y(1) = e$$

Ako su tačke kolokacije 0.2, 0.4 i 0.8, a bazisne funkcije su

$$\psi_0(x) = e^x,$$
$$\psi_1(x) = x(1 - x),$$
$$\psi_2(x) = x(xe^x - e)$$
$$\psi_3(x) = x^2(x^2e^{2x} - e^2)$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Približno rešenje je oblika

$$y(x) \approx e^x + c_1x(1 - x) + c_2x(xe^x - e) + c_3x^2(x^2e^{2x} - e^2)$$
$$y'(x) = e^x + c_1 - 2c_1x + 2c_2xe^x + c_2x^2e^x - c_2e + 4c_3x^3e^{2x} + 2c_3x^4e^{2x} - 2c_3xe^2$$
$$y''(x) = e^x - 2c_1 + 2c_2e^x + 4c_2xe^x + c_2x^2e^x + 12c_3x^2e^{2x} + 16c_3x^3e^{2x} + 4c_3x^4e^{2x} - 4c_3xe^2$$

odnosno

$$y' = e^x + c_1(1 - 2x) + c_2(2xe^x + x^2e^x - e) + c_3(4x^3e^{2x} + 2x^4e^{2x} - 2xe^2)$$
$$y'' = e^x - 2c_1 + c_2(2xe^x + 4xe^x + x^2e^x) + c_3(12x^2e^{2x} + 16x^3e^{2x} + 4x^4e^{2x} - 4xe^2)$$

Pa je funkcija greške

$$R(x; c_1, c_2, c_3) = e^x + c_1(x^3 - x^2 - 2x - 1) + c_2\left(-x^3e^x + 2x^2e^x + 4xe^x + 4e^x + e(x^2 - 1)\right)$$
$$+ c_3\left(-x^5e^{2x} + 6x^4e^{2x} + 20x^3e^{2x} + 12x^2e^{2x} + e^2(x^3 - 2x - 2)\right)$$

Mora da važi (iz uslova kolokacije)

$$R(0.2; c_1, c_2, c_3) = 0$$
$$R(0.4; c_1, c_2, c_3) = 0$$
$$R(0.8; c_1, c_2, c_3) = 0$$

Dobijamo sistem od 3 jednačine sa 3 nepoznate. Slično postupku iz prethodnog zadatka, određivanjem vrednosti konstanti c_1, c_2 i c_3 dobija se približno rešenje problema

$$y(x) \approx e^x + c_1x(1 - x) + c_2x(xe^x - e) + c_3x^2(x^2e^{2x} - e^2).$$

```matlab
% Metodom kolokacije resavamo granicni zadatak:
% a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)
% y(p)=P
% y(Q)=Q
% gde su p i q krajevi intervala
% Tacke kolokacije su xk (vektor).
% Bazisne funkcije su psi_k (niz funkcija);


function MetodaKolokacije(a,b,c,f,psi0,psi1,psi2,xk)

syms c1 c2 x;
psi0 = sym(psi0);
psi1 = sym(psi1);
psi2 = sym(psi2);

a = sym(a);
b = sym(b);
c = sym(c);
f = sym(f);

v = psi0 + c1*psi1 + c2*psi2;
R = a*diff(v,2) + b*diff(v,1) + c*v-f;
[c1k c2k]  = solve(subs(R,x,xk(1)), subs(R,x,xk(2)));

vk = subs(v, {c1, c2}, {c1k, c2k})
pretty(simplify(vk))
end
```

PRIMER 46

Metodom kolokacije rešiti granični zadatak:

$$y(x) = \int_0^{\pi} \sin(x+t)\, y(t)dt + 1 + cosx$$

Ako su tačke kolokacije 0, $\frac{\pi}{2}$ i π, a bazisne funkcije su

$$\psi_0(x) = 1,$$
$$\psi_1(x) = cosx$$
$$\psi_2(x) = sinx$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Približno rešenje tražimo u obliku

$$v(x) = c_1 + c_2 cosx + c_3 sinx$$

Funkcija greške je oblika

$$R(x; c_1, c_2, c_3) = v(x) - \int_0^{\pi} sin\,(x+t)\, v(t)dt - 1 - cosx =$$
$$= c_1(1 - 2cosx) + c_2\left(cosx - \frac{\pi}{2} sinx\right) - 1 - cosx$$

(reši se integral $\int_0^{\pi} sin\,(x+t)(c_1 + c_2 cost + c_3 sint)dt$)

Metodom kolokacije mora da važi

$R(0; c_1, c_2, c_3) = 0$

$R\left(\frac{\pi}{2}; c_1, c_2, c_3\right) = 0$ sistem tri jednačine sa tri nepoznate

$R(\pi; c_1, c_2, c_3) = 0$

$$-c_1 + c_2 - \frac{\pi}{2} c_3 = 2$$
$$c_1 - \frac{\pi}{2} c_2 + c_3 = 1$$

$$3c_1 - c_2 + \frac{\pi}{2} c_3 = 0$$

$$\rightarrow c_2 = \frac{12}{4 - \pi^2}, \qquad c_1 = 1, \qquad c_3 = \frac{6\pi}{4 - \pi^2}$$

Približno rešenje je:

$$v(x) = 1 + \frac{12}{4 - \pi^2} cosx + \frac{6\pi}{4 - \pi^2}$$

(ovo je inače i tačno rešenje)

PRIMER 47

Metodom najmanjih kvadrata rešiti granični zadatak:

$$y'' + y = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$$

na intervalu (0,1). Računati sa 4 decimale. Bazisne funkcije su

$$\psi_0(x) = x + 1,$$
$$\psi_1(x) = x(x-1)$$
$$\psi_2(x) = x^2(x-1)$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Približno rešenje tražimo u obliku

$$y(x) = x + 1 + c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1)$$

odavde imamo da je

$$y'(x) = 1 + c_1(2x-1) + c_2(3x^2 - 2x)$$
$$y''(x) = 2c_1 + c_2(6x-2)$$

Funkcija greške je sada

$$R(x; c_1, c_2) = 2c_1 + c_2(6x-2) + x + 1 + c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1)$$

tj.

$$R(x; c_1, c_2) = c_1(x^2 - x + 2) + c_2(x^3 - x^2 + 6x - 2) + x + 1$$

Metodom najmanjih kvadrata dobija se funkcija

$$(*) \quad \int_0^1 R^2(x; c_1, c_2)dx = \frac{7070c_1^2 + 7700c_1 + 7860c_2^2 + 3850c_2 + 2485c_1c_2}{2100} + 1$$

Koja se minimizuje po c_1, c_2.

Očigledno je dovoljno minimizovati

$$7070c_1^2 + 7700c_1 + 7860c_2^2 + 3850c_2 + 2485c_1c_2 \qquad (\#)$$

Da bi postojao minimum, Hesijan mora biti pozitivno semidefinitan

$$H = \begin{vmatrix} 7070 & 2485 \\ 2485 & 7860 \end{vmatrix} > 0, 7070 > 0, 7860 > 0$$

Minimum postoji (ovo nije neophodno jer izraz (*) predstavlja kvadrat norme funkcije greške pa je ograničen odozdo nulom, a i neprekidan je po svakoj promenljivoj što znači da svakako dostiže globalni minimum).

Diferenciranjem izraza # po c_1, c_2 dobija se sistem

$$14140c_1 + 2485c_2 + 7700 = 0$$
$$2485c_1 + 15720c_2 + 3850 = 0$$

čija su rešenja

$$c_1 = -0.5158$$
$$c_2 = -0.1634$$

Odnosno, približno rešenje početnog problema je:

$$y(x) \approx x + 1 - 0.5158x(x-1) - 0.1634x^2(x-1).$$

PRIMER 48

Metodom najmanjih kvadrata odrediti aproksimaciju rešenja integralne jednačine:

$$\int_0^1 K(x,t)u(t)dt = x - 2x^3 + x^4$$

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) & 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

polinomom drugog stepena. Računati sa 4 decimale.

Rešenje:

Uzećemo da je približno rešenje $v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

Funkcija greške je

$$R(x; c_1, c_2 c_3) = \int_0^1 K(x,t)(c_1 + c_2 t + c_3 t^2)dt - x + 2x^3 - x^4$$

$$= \frac{1}{2}(x - x^2)c_1 + \frac{1}{6}(x - x^3)c_2 + \frac{1}{12}(x - x^4)c_3 - x + 2x^3 - x^4$$

Koeficijenti c_i $i = 1,2,3$ se određuju minimizacijom integrala

$$I(c_1, c_2, c_3) = \int_0^1 R(x; c_1, c_2, c_3)^2 dx = min$$

odnosno $\frac{dI}{dc_k} = 0, k = 1,2,3.$

Dobijamo sistem

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x - x^2)c_1 + \frac{1}{3}(x - x^3)c_2 + \frac{1}{12}(x - x^4)c_3 - x + 2x^3 - x^4\right)^2 (x - x^2)dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x - x^2)c_1 + \frac{1}{3}(x - x^3)c_2 + \frac{1}{12}(x - x^4)c_3 - x + 2x^3 - x^4\right)^2 (x - x^3)dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x - x^2)c_1 + \frac{1}{3}(x - x^3)c_2 + \frac{1}{12}(x - x^4)c_3 - x + 2x^3 - x^4\right)^2 (x - x^4)dx = 0$$

Rešavanjem sistema dobijamo c_1, c_2 I c_3 dobijamo

$v(x) = 0.1920 + 11.0600x - 11.0658x^2.$

```
% Metodom najmanjih kvadrata resavamo granicni zadatak:
% a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)
% y(p)=P
% y(Q)=Q
% gde su p i q krajevi intervala
% Bazisne funkcije su psi_k (niz funkcija);

function MetodaNajmanjihKvadrata(a,b,c,f,p,q,psi0,psi1,psi2)

syms c1 c2 x;
psi0 = sym(psi0);
psi1 = sym(psi1);
psi2 = sym(psi2);

a = sym(a);
b = sym(b);
c = sym(c);
f = sym(f);

v = psi0 + c1*psi1 + c2*psi2;
R = a*diff(v,2) + b*diff(v,1) + c*v-f;
[c1nk c2nk]  = solve(int(R*diff(R,c1),p,q),int(R*diff(R,c2),p,q))

vnk = subs(v, {c1, c2}, {c1nk, c2nk})
pretty(simplify(vnk))
end
```

PRIMER 49

Ricovom metodom na intervalu (0,1) naći približno rešenje problema

$$(xy')' + y = x$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 1$$

rešenje tražiti u obliku $y(x) \approx x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$.

Rešenje:

Prvo tražimo y'' pa zamenom u y i y'' u polaznu jednačinu, dobijamo funkciju greške

$$y' = 1 + c_1(1-2x) + c_2(2x - 3x^2)$$
$$y'' = -2c_1 + c_2(2 - 6x)$$
$$(xy')' + y = x \quad \rightarrow \quad y' + xy'' + y - x = 0$$
$$R(x; c_1, c_2) = c_1(1 - 3x - x^2) + c_2(-x^3 - 8x^2 + 4x) + 1$$

Mora da važi:

$$\int_0^1 R(x; c_1, c_2) x(1-x) dx = 0$$
$$\int_0^1 R(x; c_1, c_2) x^2(1-x) dx = 0$$

Rešavamo sistem (rešavanjem integrala dobijamo sistem)

$$\frac{2}{25}c_1 + \frac{1}{10}c_2 = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{10}c_1 + \frac{19}{210}c_2 = \frac{1}{12}$$

Rešavanje sistema je

$$c_1 = \frac{85}{26}, \qquad c_2 = -\frac{35}{13}$$

Dakle, približno rešenje je

$$y(x) \approx x + \tfrac{5}{26}x(1-x)(17 - 14x).$$

PRIMER 50

Ricovom metodom naći približno rešenje problema

$$-(x^2y')' + xy = x$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 1$$

na segment [0,1] ako su bazisne funkcije $\psi_0(x) = x^2$,

$$\psi_1(x) = (1-x)sinx$$
$$\psi_2(x) = x^2(1-x)$$

PRIMER 51
Galerkinovom metodom na $(0, \pi/2)$ približno rešiti granični zadatak:

$$y'' + y = \cos x,$$
$$y(0) = 1,$$
$$y(\pi/2) = 0$$

ako su bazisne funkcije: $\psi_0(x) = \cos x$,

$$\psi_k(x) = \sin 2kx\,,\, k = 1,2,3,4$$

Računati sa 4 decimale.

Rešenje:
Prbližo rešenje tražimo u obliku

$$y(x) \approx cosx + \sum_{k=1}^{4} c_k \sin{(2x)}$$

Funkcija greške je

$$R(x; c_1, c_2, c_3, c_4) = \sum_{k=1}^{4} (1 - 4k^2) c_k \sin{(2x)} - cosx$$

Dalje mora važiti:

$$\int_0^{\pi/2} R(x; c_1, c_2, c_3, c_4) \sin(2jx)\, dx = 0\,, j = 1, .., 4$$

odnosno

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^{4} (1 - 4k^2) c_k \sin{(2x)} \sin(2jx)\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(2jx)\, dx \;\;, j = 1, .., 4$$

Imamo da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2kx) \sin(j2x)\, dx = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \pi/4 & k = j \end{cases}$$

i izračuna se

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(j2x)\, dx = \frac{2j}{4j^2 - 1}$$

pa se odatle dobija

$$c_j = \frac{8}{\pi} \frac{(-j)}{(4j^2 - 1)^2}$$

Približno rešenje je

$$y(x) \approx cosx - \frac{8}{\pi} (\frac{1}{9} sin2x + \frac{2}{225} sin4x + \frac{3}{1225} sin6x + \frac{4}{3969} sin8x)$$

```
% Galerkinovom metodom resavamo granicni zadatak:
% a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)
% y(p)=P
% y(Q)=Q
% gde su p i q krajevi intervala
% Bazisne funkcije su psi_k (niz funkcija);


function GalerkinovaMetoda(a,b,c,f,p,q,psi0,psi1,psi2)

syms c1 c2 x;
psi0 = sym(psi0);
psi1 = sym(psi1);
psi2 = sym(psi2);

a = sym(a);
b = sym(b);
c = sym(c);
f = sym(f);

v = psi0 + c1*psi1 + c2*psi2;
R = a*diff(v,2) + b*diff(v,1) + c*v-f;
[c1g c2g]  = solve(int(R*psi1,p,q),int(R*psi2,p,q))
c1g
vg = subs(v, {c1, c2}, {c1g, c2g})
pretty(simplify(vg))
end
```

Sopstvene vrednosti graničnih problema

PRIMER 52

Odrediti sopstvene vrednost λ graničnog problema

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Koristiti metodu mreže sa $n = 2,3,4$ podintervala.

Rešenje:

Granični zadatak diskretizujemo na mreži

$$\omega = \left\{ x_i \middle| \ x_i = ih, i = 0, \dots, n, h = \frac{1}{n} \right\}$$

Dobiće se sledeći sistem jednačina:

$$u_0 = u_n = 0$$
$$\frac{1}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) = \lambda_i u_i, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

Može se primetiti da je rešenje sistema zapravo problem određivanja sopstvenih vrednosti matrice A koja je dimenzije $(n-1) \times (n-1)$ i može se zapisati na sledeći način:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ako uzmemo da je $n = 2$ sistem je sledećeg oblika

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}(2) \ \rightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 8 - \lambda \ \rightarrow \quad \lambda_1 = 8$$

Ako uzmemo da je $n = 3$ sistem je sledećeg oblika

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ \rightarrow \quad \det(A - \lambda E) = (9 - \lambda)(27 - \lambda) \ \rightarrow \quad \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 27$$

Ako uzmemo da je $n = 4$ sistem je sledećeg oblika

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ \rightarrow \quad \det(A - \lambda E) = (32 - \lambda)(1024 - 64\lambda + \lambda^2 - 512)$$
$$\rightarrow \quad \lambda_1 = 9.37, \ \ \lambda_2 = 32, \lambda_3 = 54.63$$

Numeričko rešavanje integralnih jednačina

Fredholmove integralne jednačine I vrste

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x), x \in [a,b]$$

Fredholmove integralne jednačine II vrste

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt\,, x \in [a,b]$$

Ako se granica b u integralu zameni sa x, dobiće se Volterine jednačine I i II vrste.

Metoda uzastopnih aproksimacija

Rešavamo Fredholmovu integralnu jednačinu II vrste na sledeći način:
Uvodimo rekuretnu formulu

$$u_0(x) = f(x)$$
$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt, n = 0,1,2$$

Greška formule ocenjuje se sa

$$\max_{[a,b]}|y(x) - u_n(x)| \approx \max_{[a,b]}|u_n(x) - u_{n+1}(x)|$$

Metoda konvergira ako je

$$|\lambda|(b-a)M < 1, M = \max_{a \le x,t \le b} |K(x,t)|.$$

Ako se rešava Volterina jednačine, granicu b zameniti sa x.
Na ovaj način metoda konvergira za svako λ .

PRIMER 53
Metodom uzastopnih aproksimacija, odrediti rešenje integralne jednačine

$$y(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 y(t)dt + 1$$

za koje λ proces konvergira?

Rešenje:
Koristimo diferencijsku šemu

$$v_0(x) = f(x) = 1$$
$$v_{n+1}(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xt^2 v_n(t)dt, n = 0,1,2$$

Dobija se sledeći sistem:

$$v_1(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xt^2 1dt = 1 + \frac{\lambda x}{3}$$
$$v_2(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{\lambda t}{3}\right) dt = 1 + \frac{\lambda x}{3} + \frac{\lambda^2 x}{4 \cdot 3}$$

$$v_3(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xt^2 \left(1 + \frac{\lambda t}{3} + \frac{\lambda^2 t}{4 \cdot 3}\right) dt = 1 + \frac{x}{3} \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda^k}{4^{k-1}}$$

...

$$v_n(x) = 1 + \frac{x}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{4^{k-1}}$$

$$u(x) = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{4^{k-1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{4x}{3} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{4}} - \frac{4x}{3} = 1 + \frac{4\lambda}{3(4 - \lambda)} x, |\lambda| < 4.$$

niz konvergira za $|\lambda| < 4$.

PRIMER 54
Metodom uzastopnih aproksimacija, odrediti rešenje integralne jednačine

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-(x+t)} y(t)dt + x$$

za koje λ proces konvergira?

Rešenje:
Koristimo rekukrentnu formulu

$$v_0(x) = f(x) = x$$
$$v_{n+1}(x) = x + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+t)} v_n(t)dt, n = 0,1,2$$

Dobijamo

$$v_1(x) = x + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+t)} t dt = \cdots = x + \lambda e^{-x}$$
$$v_2(x) = x + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+t)} (t + \lambda e^{-t}) dt = \cdots = x + \lambda e^{-x} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$$
$$v_3(x) = x + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+t)} \left(t + \lambda e^{-t} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\right) dt = \cdots = x + \lambda e^{-x} \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\right)$$
$$\ldots$$
$$v_n(x) = x + \lambda e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k$$
$$v(x) = \lim_{n\to\infty} v_n = x + \frac{2\lambda}{(2-\lambda)} e^{-x}$$

niz konvergira za $|\lambda| < 2$.

Metod degenerisanih jezgara

U slučaju da je jezgro Fredholmove int. jednačine degenerisano

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\beta_k(t)$$

rešenje se može zapisati u obliku

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k\, \alpha_k(x), \quad c_k = \int_a^b y(t)\beta_k(t)dt$$

Konstante c_k su rešenja sistema diferencijalnih jednačina

$$c_k = \int_a^b \left(f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(t)\right) \beta_k(t)dt$$

PRIMER 55

Metodom degenerisanih jezgara rešiti integralnu jednačinu:

$$y(x) = x^2 + \lambda \int_{-1}^{1} (x+t) y(t) dt$$

Rešenje:

Kao što se može videti iz zadatka, jezgro integralne jednačine je degenerisano. Jednačina se može zapisati u obliku

$$y(x) = x^2 + \lambda \left(x \int_{-1}^{1} y(t) dt + \int_{-1}^{1} t y(t) dt \right)$$

odnosno

$$y(x) = x^2 + \lambda (c_1 x + c_0)$$

gde su

$$c_0 = \int_{-1}^{1} t y(t) dt = \int_{-1}^{1} t(t^2 + \lambda(c_1 t + c_0)) dt = \frac{2}{3} \lambda c_1$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1} y(t) dt = \int_{-1}^{1} (t^2 + \lambda(c_1 t + c_0)) dt = \frac{2}{3} + 2\lambda c_0$$

Iz sistema se dalje dobija da je

$$-2\lambda c_0 + c_1 = \frac{2}{3}$$

$$c_0 - \frac{2}{3} \lambda c_1 = 0$$

Odnosno

$$c_0 = \frac{4\lambda}{3(3 - 4\lambda^2)}$$

$$c_1 = \frac{2}{3 - 4\lambda^2}$$

$$\frac{4}{3} \lambda^2 - 1 \neq 0$$

Dakle, rešenje zadate integralne jednačine je $y(x) = x^2 + \frac{2\lambda}{3-4\lambda^2}\left(x + \frac{2}{3}\lambda\right), \lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

PRIMER 56

Metodom degenerisanih jezgara rešiti integralnu jednačinu:

$$y(x) = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-(x+t)} y(t) dt + x$$

Rešenje:

Kao što se može videti iz zadatka, jezgro integralne jednačine je degenerisano. Jednačina se može zapisati u obliku

$$y(x) = x + \lambda e^{-x} \int_{0}^{\infty} e^{-t} y(t) dt$$

Dakle, rešenje može da se zapiše u obliku:

$$u(x) = x + \lambda c e^{-x}$$

gde je

$$c = \int_0^{\infty} e^{-t} u(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-t}(x + \lambda c e^{-t})dt = parcijalnom\ integracijom$$

$$= -te^{-t}|_0^{\infty} + 1 + \lambda c \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 1 + \frac{\lambda c}{2}$$

Iz sistema se dalje dobija da je

$$2c = 2 + \lambda c \ \rightarrow \ c = \frac{2}{2-\lambda}, \lambda \neq 2$$

Dakle, rešenje zadate integralne jednačine je $u(x) = x + \frac{2}{2-\lambda} e^{-x}, \lambda \neq 2$
Ako je $\lambda = 2$ tada jednačina ima beskonačno rešenja

$$u(x) = ce^{-x} + f(x), \quad ako\ je \int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx = 0, c = const \in R$$

PRIMER 57

Zamenom jezgra degenerisanim oblikom $\overline{K(x,t)} = a + bxt + c(xt)^2$, $a, b, \in R$ rešiti integralnu jednačinu:

$$y(x) + \int_0^1 \ln(1 + tx) y(t)dt = 1$$

Računati na 5 decimala.

Rešenje:
Asimptotskim razvojem jegra integralne jednačine

$$K(x,t) = \ln(1 + xt) \approx xt - \frac{1}{2}(xt)^2 \equiv \overline{K(x,t)}, |xt| < 1$$

Dobija se aproksimacija jezgra u traženom obliku.
Zamenom jezgra u integralnu jednačinu po približnom rešenju

$$u(x) + x\int_0^1 tu(t)dt - \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 t^2 u(t)dt = 1$$

odnosno

$$u(x) = 1 - c_1 x + \frac{c_2 x^2}{2}$$

gde su

$$c_1 = \int_0^1 tu(t)dt = \int_0^1 t(1 - c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2})dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{8}c_2$$

$$c_2 = \int_0^1 t^2 u(t)dt = \int_0^1 t^2(1 - c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2})dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{10}c_2$$

Rešavanjem sistema dobija se da je $c_1 = 0.39932, c_2 = 0.12972$
Dakle, rešenje zadate integralne jednačine je $u(x) = 1 - 0.39932x + 0.12972x^2$

Metoda kvadraturnih formula

Metoda kvadraturnih formula se zasniva na aproksimaciji integrala nekom kvadraturom formulom

$$u_k = f(x_k) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j K\big(x_k, x_j\big) u_j \, , k = 1, \dots, n$$

gde su x_k čvorovi a c_k koeficijenti izabrane kvadraturne formule i $u_k \approx y(x_k)$.

PRIMER 58

Trapeznom formulom za $n = 4$ rešiti integralnu jednačinu

$$y(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1) y(t) dt = e^x - x$$

Računati sa 5 decimala.

Rešenje:

Čvorovi kvadraturne formule su ($h = \frac{1-0}{n}$)

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(e^{xt} - 1) y(t) dt &= x \int_0^1 (e^{xt} - 1) y(t) dt \\ &= x \frac{h}{2}\Big((e^{t_0 x} - 1) u_0 + (e^{t_4 x} - 1) u_4 + 2\big(u_1(e^{t_1 x} - 1) + \cdots + u_3(e^{t_3 x} - 1)\big)\Big) \\ &= x \frac{h}{2}\left((1-1) u_0 + (e^x - 1) u_4 + 2\left(u_1(e^{\frac{1}{4}x} - 1) + \cdots + u_3(e^{\frac{3}{4}x} - 1)\right)\right)\end{aligned}$$

Za $x = x_i$

$$u_i + x_i \frac{h}{2}\left((e^{x_i} - 1) u_4 + 2\left(u_1(e^{\frac{1}{4}x_i} - 1) + \cdots + u_3(e^{\frac{3}{4}x_i} - 1)\right)\right) = e^{x_i} - x_i$$

Rešavanjem sistema dobija se da je

$$\begin{aligned}u_0 &= 1.00000 \\ u_1 &= 1.00000 \\ u_2 &= 0.99958 \\ u_3 &= 0.99780 \\ u_4 &= 0.99320\end{aligned}$$

Inače, tačno rešenje problema je $y(x) = 1$.

PRIMER 59

Simpsonovom formulom, korišćenjem 3 čvora, rešiti integralnu jednačinu

$$y(x) + \int_0^1 xe^{xt}y(t)dt = e^x$$

Računati sa 5 decimala.

Rešenje:

Čvorovi kvadraturne formule su ($h = \frac{1}{2}$)

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$$

$$\int_0^1 xe^{xt}y(t)dt = x\frac{h}{3}(e^{t_0x}u_0 + e^{t_2x}u_2 + 4e^{t_1x}u_1)$$
$$= \frac{x}{6}\left(u_0 + 4e^{\frac{x}{2}}u_1 + e^xu_2\right)$$

Za $x = x_i$ dobija se sledeća jednačina, $i = 0,1,2$

$$u_i + \frac{x_i}{6}(u_0 + 4e^{\frac{x_i}{2}}u_1 + e^{x_i}u_2) = e^{x_i}$$

Rešavanjem sistema dobija se da je

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 1.00004$$
$$u_2 = 0.99957$$

Inače, tačno rešenje problema je $y(x) = 1$.

PRIMER 60

Simpsonovom formulom, korišćenjem 3 čvora, rešiti integralnu jednačinu

$$y(x) + \int_0^{\pi/2} (x + \sin(t))y(t)dt = x + \cos{(x)}$$

Računati sa 5 decimala.

Rešenje:

Čvorovi kvadraturne formule su ($h = \frac{\pi}{4}$)

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} (x + \sin(t))y(t)dt = \frac{\pi}{12}\left(xu_0 + 4\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u_1 + (x+1)u_1\right)$$

Za $x = x_i$ dobija se sledeća jednačina, $i = 0,1,2$

$$u_i + \frac{\pi}{12}\left(x_iu_0 + 4\left(x_i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u_1 + (x_i+1)u_1\right) = x_i + \cos{(x_i)}$$

Dobija se sledeći sistem:

$$u_0 + \frac{\pi}{12}2\sqrt{2}u_1 + \frac{\pi}{12}u_2 = 1$$

$$\frac{\pi^2}{48}u_0 + \left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{12}\right)u_1 + \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)u_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{24}u_0 + \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u_1 + \left(1 + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi^2}{24}\right)u_2 = \frac{\pi}{2}$$

Dok se rešavanjem sistema dobija se da je

$$u_0 = 0.59928$$
$$u_1 = 0.52690$$
$$u_2 = 0.04034$$

Zamenom dobijenih vrednosti dobija se analitički izraz za približno rešenje

$$u(x) = \cos(x) + +0.28078x - 0.40072$$

Inače, tačno rešenje problema je $y(x) = 1$.