# ТМИ- испит (Р смер)

13. 9. 2019.

1. а) Лебег-Стилтјесова мера. б) Да ли је услов непрекидности с лева функције у дефиницији Л-С мере неопходан? в) Описати Лебег-Стилтјесову меру за функцију $f(x) = 0, x \leq 0$ и $f(x) = 1$, $x > 0$.

2. Испитати мерљивост функције која је задата као збир:
а) две мерљиве функције, б) једне мерљиве и једне немерљиве функције, в) две немерљиве функције.

3. Израчунати а) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx$, б) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2xe^{-n^2x^2}dx$.
в) Може ли се применити ТДК?

4. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.
а) Дефиниција $L^p(X, \mu)$ простора. б) Доказати да је скуп простих интеграбилних функција свуда густ у $L^p(X, \mu)$.

5. Нека $f \in L^2(X, \mu) \cap L^4(X, \mu)$. Да ли $f \in L^3(X, \mu)$ и $f \in L^1(X, \mu)$?

6. Да ли постоје две функције које су једнаке скоро свуда, а разликују се на непребројивом скупу?

1. б) Јесте. Лебег-Стилтјесова мера је дефинисана са $\lambda_f([x, y)) = f(y) - f(x)$... Треба показати $\lim_{x\to b_-} f(x) = f(b)$. Доказ у случају $f(b) < \infty$ : Користимо Хајнеов принцип. Нека је $x_n$, $n \in \mathbb{N}$, произвољан растући низ такав да $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и такав да је $f(x_1) < \infty$. Треба показати $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$. Користићемо непрекидност мере $\lambda_f$ одоздо. Дефинишемо скупове $E_n = [x_1, x_n)$, $n \geq 1$. Пошто је $E_n \subset E_{n+1}$, за свако $n$, следи $\lambda_f(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda_f(E_n)$. Даље, $\cup_{n=1}^{\infty}E_n = [x_1, b)$ следи $f(b) - f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x_1)$. в) Диракова мера, тј $\lambda_f(E) = 1$, ако $0 \in E$ и $\lambda_f(E) = 0$, ако $0 \notin E$.

2. а) Да. б) Не. Нека је $f$ немерљива и $g$ мерљива. Ппс $f + g$ је мерљива. Пошто је разлика две мерљиве функције мерљива, следи $(f + g) - g = f$ је мерљива. в) Може и не мора. На пример, ако је $f$ било која немерљива функција онда је и $-f$ такође немерљива, а њихов збир $f+(-f) = 0$ је константна функција, дакле мерљива. С друге стране, ако је $f$ немерљива, онда је и $2f$ немерљива, па је и њихов збир $f + 2f = 3f$ такође немерљива. ($2f$ је немерљива: ппс. $2f$ је мерљива. Количник две мерљиве функције је мерљива. Константна функција је мерљива, следи $\frac{2f}{2} = f$ је мерљива).

3. а) $n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}nxe^{-n^2x^2}$. Посматрамо функцију $h(t) = te^{-t^2}$, $t \in [0, \infty]$. Пошто је $h \geq 0$, $h(0) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ следи да је $h$ ограничена функција. (Максимум се достиже у тачки $h'(t) = 0$, дакле $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следи $h(t) \leq 1$.) Следи

$$|n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}| = n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Пошто је $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$ онда је функција $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ интеграбилна доминанта па може ТДК:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx = 0.$$

б) Директним рачуном инеграла (нпр смена $t = n^2x^2$) добијамо резултат $\frac{1}{2}$. Да смо заменили места лимесу и интегралу резултат би био 0. Дакле не може ТДК.

5. $f \in L^3(X,\mu)$. Нека је $A = \{x \in X | \, |f(x)| < 1\}$ и $B = \{x \in X | \, |f(x)| \geq 1\}$. Тада

$$\int_X |f|^3 d\mu = \int_A |f|^3 d\mu + \int_B |f|^3 d\mu \leq \int_A |f|^2 d\mu + \int_B |f|^4 d\mu < \infty.$$

$f$ може и не мора припадати $L^1(X,\mu)$. На пример $f(x) = \frac{1}{x} \in L^p(1,\infty)$, за $p > 1$, $f \notin L^1(1,\infty)$ и $g(x) = \frac{1}{x^2} \in L^p(1,\infty)$, $p \geq 1$.

6. Да. $f_1(x) = \chi_K$ и $f_2(x) = 0$ где је $K$ Канторов скуп.