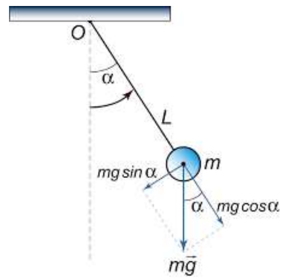
Osnove matematičkog modeliranja - Klatno



Slika 1.

Problem:

Posmatrajmo problem klatna. Loptasti teg mase m vezan je nerastegljivim kanapom (znamarljive mase) dužine l za jednu nepokretnu tačku. Ako se klatno u početnom trenutku otkloni od ravnotežnog položaja za ugao θ_0 i pusti da se slobodno kreće pod uticajem teže, napisati matematički model kojim se opisuje kretanje tega u zavisnosti od vremena t (odrediti funkciju $\theta(t)$ kojom se određuje ugao tega u zavisnosti od vremena t).

Rešenje:

Kretanje tega se može opisati na sledeći način:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_o}$$

Gde je sa $\overrightarrow{F_g}$ označena sila gravitacije a sa $\overrightarrow{F_o}$ otpora.

Pretpostavimo da se nalazimo u vakuumu i da na teg deluje **samo** sila gravitacije, tj. neka je $\overrightarrow{F_0} = 0$.

Sila gravitacije deluje vertikalno na dole, $F_g = mg$ i može se razložiti na svoje dve komponente:

- radijalnu (F_r) i
- tangencijalnu silu (F_t).

Radijalna komponenta deluje u pravcu kanapa i ne proizvodi ni jedno dejstvo (pretpostavljamo da je kanap nerastegljiv).

Jedino dejstvo ima tangencijalna komponenta kojom se teg pomera u pravcu suprotnom od pravca otklona:

$$F_t = -mg\ sin\theta$$

Sa obzirom da se sila gravitacije koja deluje na teg određuje kao prozvod mase i ubrzanja, a ubrzanje kao drugi izvod pređenog puta, sledi da je

$$m\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -mg \cdot \sin\theta$$

Budući da je masa pozitivna veličina, možemo da podelimo izraz sa m:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -g\sin\theta$$

Ako posmatramo uglove u radijanima, dužina luka je direktno proporcionalna uglu otklona,

$$s(t) = l \cdot \theta(t)$$

pa je

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad (1)$$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu kretanja tega bez prigušenja (zanemarujemo otpor okolne sredine).

Za dobijanje rešenja, potrebno je da unesemo početne uslove:

U trenutku $t = 0$ ugao otklona je θ_0, početna brzina je $v_0 = 0$ (teg je bio u stanju mirovanja):

$$\theta(0) = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}(0) = 0. \quad (2)$$

Jednačine (1) i (2) predstavljaju Košijev zadatak.

U slučaju da je ugao otklona $\theta \ll 1$ model se može dodatno uprostiti ($\sin\theta \approx \theta$):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l}\theta. \quad (3)$$

U literaturi se koristi izraz

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -w^2\theta, \;\; w = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

i kaže da je učestalost oscilovanja w.
Tačno rešenje jednačine (3) je

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

Zamenom početnih uslova u jednačinu, dobija se da je $C_1 = \theta_0, C_2 = 0$ pa je rešenje Košijevog zadatka funkcija

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

koja opisuje periodično harmonijsko kretanje. Period oscilovanja T_0 je stoga

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \theta_0 \ll 1 \;\; (\theta_0 \ll 15^0)$$

Što je poznato kao Hejgensov zakon. Period ne zavisi od mase m a ni od malog ugla θ_0.

Merenjem perioda T u funkciji dužine l matematičkog klatna se dobijaju eksperimentalni podaci u skladu sa funkcionalnom zavisnošću

$$T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)\sqrt{l}$$

po kojoj je period linearna funkcija $T = k\sqrt{l}$, sa nagibom $k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$.

Kako se određuje ubrzanje Zemljine teže: na osnovu izmerenih parova $\{(l_1, T_1), (l_2, T_2), \dots, (l_n, T_n)\}$ nacrta grafik $T = f(\sqrt{l})$ koja najbolje aproksimira predstavljane eksperimentalne podatke pa se iz nagba te prave k određuje ubrzanje g po formuli

$$g = \frac{4\pi^2}{k^2}.$$

Primer:
Odrediti ubrzanje Zemljine teže ako period oscilovanja kugice koja visi na kanapu dužine 30 cm iznosi 1s.
Rešenje:
$T \; = \; 1s$
$l = 0.3m$
$k = \frac{T}{\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{0.3}} = 1.8257418584.. \; \rightarrow \qquad g = \frac{4\pi^2}{k^2} \approx 11.84\frac{m}{s^2}.$

Primer:
Odrediti period oscilovanja kuglice koja visi na kanapu dužine 30 cm ako je $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.
Rešenje:
Period oscilovanja kuglice je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{9.81}} = 1.0987679729s$

Kako bi izgledala trajektorija klatna ukoliko bi postojao **postoji otpor** vazduha koji usporava klatno pri kretanju:

$$F_o = -B\,\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Označimo B/l sa b. Model klatna sa prigušenjem je sledećeg oblika.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} &= -\frac{b}{m}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{g}{l}\sin\theta \\ &= -k\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{g}{l}\sin\theta \quad \left(k = \frac{b}{ml}\right).\end{aligned}$$

Simulacija kretanja klatna u MATLABU

```
clc;
clear all;
m = 0.3;  % masa tega
b = 0.2;  % precnik tega
l = 0.5;  % duzina kanapa
g = 9.81; % gravitacija

r = g/l;
k = b/(m*l);


figure(1);
f = @(t,x) [x(2); -k*x(2)-r*sin(x(1))];    % sa prigusenjem f = [∂θ/∂t ;  -b/(ml) ∂θ/∂t - g/l sin θ]
%f = @(t,x) [x(2); -r*sin(x(1))];          % bez prigusenja

init = [pi/2; 0];                          % pocetni polozaj  (init = [theta_0 v_0])
[t,x] = ode45(f,[0 200], init);

O = [0 0];
axis(gca, 'equal');
axis([-1 1 -1 1]);
grid on;

for i = 1: length(t)
   P = l*[sin(x(i,1))  -cos(x(i,1))];
   O_circ = viscircles(O,0.01);
   pend = line([O(1) P(1)], [O(2) P(2)]);
   ball = viscircles(P, 0.05);

   pause(0.001);

   if i< length(t)
       delete(pend);
       delete(ball);
       delete(O_circ);
   end
end
```

Model klatna se može izvesti i korišćenjem zakona fizike.
U početnom trenutku $t = 0$ klatno je zahvatalo ugao $\theta = \theta_0$ i bilo je u stanju mirovanja. Promena potencijalne energije od početnog do trentuka t je

$$P = mgh$$

dok je promena kinetičke energije

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Zbog zakona očuvanja energije sledi da je

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

tj. $v = \sqrt{2gh}$.
Brzina predstavlja prvi izvod pređenog puta, $v = \frac{\partial s}{\partial t} = l\frac{\partial \theta}{\partial t}$ odakle se dalje dobija da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$$

Pošto je $h = y_1 - y_0 = lcos\,\theta - lcos\theta_0$ dobija se da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (4)$$

što diferenciranjem po vremenu daje

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2g}{l}\right) sin\theta\right)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2g}{l}\right) sin\theta\right)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \\ &= -\frac{g}{l}\sin\theta\end{aligned}$$

Što se poklapa sa prethodnim zapisom matematičkog modela klatna.

Odredimo period za koji će se klatno vratiti u prvobitni položaj (period T):
Posmatrajmo vreme u funkciji od ugla, tj.

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

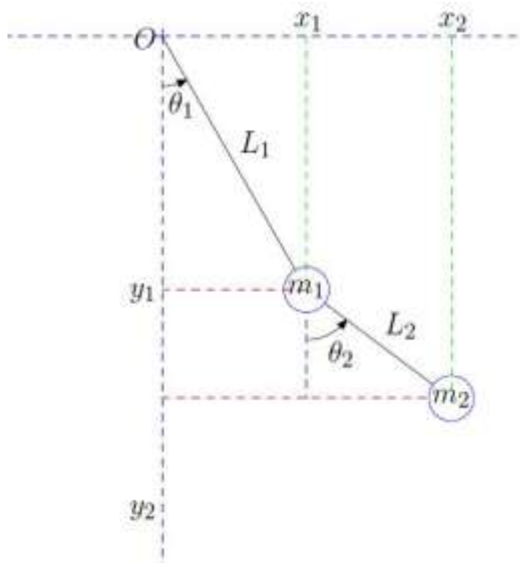
Ako integralimo poslednju jednačinu po θ od θ_0 do 0 dobićemo da je

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta}\frac{\partial \theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Rešavanjem ovog integrala (korišćenjem Ležandrove funkcije prve vrste) dobija se da je

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}F\left(\sin\frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad F(k,\psi) = \int_0^{\psi}\frac{\partial u}{\sqrt{1 - k^2 \sin u}} \quad \left(\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right)$$

Posmatrajmo sada problem dvostrukog klatna:



Neka je teg mase m_1 povezan za fiksnu osnovu kanapom dužine L_1a teg mase m_2 povezan kanapom dužine L_2 za prvi teg i neka su odgovarajući uglovi otklona θ_1 i θ_2.

Obeležimo koordinate tegova sa

$$x_1 = L_1 \sin\theta_1$$
$$y_1 = -L_1 \cos\theta_1$$
$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2$$
$$y_2 = -L_1 \cos\theta_1 - L_2 \cos\theta_2$$

Potencijalna enegrgija je

$$P = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

dakle

$$P = -m_1 g L_1 \cos\theta_1 - m_2 g (L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2).$$

Kinetička energija se određuje kao

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

odnosno

$$K = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)^2 \right).$$

Uzimajući da je

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = L_1 \cos(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial t}$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -L_1 \sin(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial t}$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = L_1 \cos(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + L_2 \cos(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial t}$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = -L_1 \sin(\theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - L_2 \sin(\theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial t}$$

dobija se sledeća jednačina

$$K = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(L_1^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t}\right)^2 + L_2^2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t}\right)^2 + 2 L_1 L_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$
$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t}\right)^2 + m_2 L_1 L_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Lagranževa funkcija za sistem je definisana kao razlika između kinetičke i potencijalne energije

$$L = K - P$$

Lagranževa funkcija treba da zadovoljava sistem Ojler-Lagranžovih jednačina

Lagranžova funkcija koja odgovara problemu dvostrukog klatna je

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2 + m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$
$$+m_1gL_1\cos\theta_1 + m_2g(L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2).$$

Treba da važe sledeće relacije:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta_i}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0,\ \ i = 1{,}2.$$

Kako su

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\sin(\theta_2 - \theta_1) - m_1gL_1\sin\theta_1 - m_2gL_1\sin\theta_1$$
$$= m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\sin(\theta_2 - \theta_1) - L_1g\sin\theta_1\,(m_1 + m_2)$$
$$\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta_1}{\partial t}} = (m_1 + m_2)L_1^2\frac{\partial\theta_1}{\partial t} + m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta_1}{\partial t}}\right) = (m_1 + m_2)L_1^2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)\sin(\theta_2 - \theta_1)\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t} - \frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)$$
$$= (m_1 + m_2)L_1^2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$+ m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Ako sada zamenimo izvedene jednačine u $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ dobiće se sledeća jednačina:

$$(m_1 + m_2)L_1^2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_1gL_1\sin\theta_1$$
$$+ m_2gL_1\sin\theta_1 \ \ = 0 \qquad /:\ \ L_1$$
$$(m_1 + m_2)L_1\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) + m_2L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_1g\sin\theta_1 + m_2g\sin\theta_1 = 0$$

Ponavljamo postupak za $i = 2$.

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)L_1^2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2 + m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$
$$+m_1gL_1\cos\theta_1 + m_2g(L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2).$$

Kako su

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2} = -L_2gm_2\sin(\theta_2) - m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\sin(\theta_2 - \theta_1)$$
$$\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta_2}{\partial t}} = m_2L_2^2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right) + m_2L_1L_2\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial \theta_2}{\partial t}}\right) = m_2L_2^2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)\sin(\theta_2-\theta_1)\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}-\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)$$

$$= m_2L_2^2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)\sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$+ m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1)$$

Ako sada zamenimo izvedene jednačine u $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\frac{\partial\theta}{\partial t}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ dobiće se sledeća jednačina:

$$m_2L_2^2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2L_1L_2\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + L_2gm_2\sin(\theta_2) = 0 \quad /: \; m_2L_2$$

$$L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) + L_1\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) + L_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + g\sin(\theta_2) = 0$$

Rešavanjem sistema

$$(m_1+m_2)L_1\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) + m_2L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + m_1g\sin\theta_1 + m_2g\sin\theta_1 = 0$$

$$L_2\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) + L_1\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right)\cos(\theta_2-\theta_1) - L_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\sin(\theta_2-\theta_1) + g\sin(\theta_2) = 0$$

po $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}$ i $\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}$ dobija se sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right) = -\frac{-2m_2\sin(\theta_2-\theta_1)\left(L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2 - L_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\cos(\theta_2-\theta_1)\right) + g\big((2m_1+m_2)\sin\theta_1 + m_2\sin(2\theta_2-\theta_1)\big)}{2L_1(m_1+m_2-m_2(\cos(\theta_2-\theta_1))^2)}$$

$$\left(\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\right) = \frac{\left((m_1+m_2)\left(g\cos(\theta_1) - L_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial t}\right)^2\right) - m_2L_2\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right)^2\cos(\theta_2-\theta_1)\right)\sin(\theta_2-\theta_1)}{L_2(m_1+m_2-m_2(\cos(\theta_2-\theta_1))^2)}$$

Uvođenjem smena:

$$z_1 = \theta_1$$
$$z_2 = \frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$
$$z_3 = \theta_2$$
$$z_4 = \frac{\partial\theta_2}{\partial t}$$

Odnosno

$$z_1' = \frac{\partial\theta_1}{\partial t} = z_3$$
$$z_2' = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}$$
$$z_3' = \frac{\partial\theta_2}{\partial t} = z_4$$
$$z_4' = \frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}$$

Problem se može rešiti numerički

U komandnom prozoru Matlaba pozvati funkciju Dvostruko_klatno_glavni
>> Dvostruko_klatno_glavni

```
function zdot = Dvostruko_klatno_ODE(t,z)
% -------------------------------------------------
% U okviru funkcije Dvostruko_Klatno_ODE
% kretanje tegova je opisano koriscenjem obicnih dif. jednacina (eng. ODE).
% Funkcija ima ulazne parametre  t i x
% t predstavlja vremenski period u kome posmatramo kretanje tegova
% na primer t = 100 oznacava da se posmatra vremenski segment [0 100]
% dok su pocetne vrednosti predstavljene vektorom x zadate na sledeci
% nacin:
% z(1) = theta_1;
% z(2) = d(theta_1)/dt;
% z(3) = theta_2;
% z(4) = d(theta_2)/dt;
% z(5) = g (na primer g = 9.81);
% z(6) = m(1);
% z(7) = m(2);
% z(8) = L(1);
% z(9) = L(2);
% zdot(1) = d(theta_1)/dt;
% zdot(2) = d^2(theta_1)/dt^2;
% zdot(3) = d(theta_2)/dt;
% zdot(4) = d^2(theta_2)/dt^2;
% ------------------------------------------------

g  = z(5);
m1 = z(6);
m2 = z(7);
l1 = z(8);
l2 = z(9);

zdot = zeros(9,1);

zdot(1) = z(2);
zdot(2) = -(( g*(2*m1+m2)*sin(z(1))+ m2*(g*sin(z(1)-2*z(3))+
2*(l2*z(4)^2+l1*z(2)^2*cos(z(1)-z(3)))*sin(z(1)-z(3)))))/...
    (2*l1*(m1+m2-m2*(cos(z(1)-z(3)))^2)));
zdot(3) = z(4);
zdot(4) = (((m1+m2)*(l1*z(2)^2+g*cos(z(1)))+l2*m2*z(4)^2*cos(z(1)-z(3)))*sin(z(1)-
z(3)))/(l2*(m1+m2-m2*(cos(z(1)-z(3)))^2));

end
```

Animacija

```
function Dvostruko_klatno(ivp, vreme, fps, movie)
%   ivp = [phi1; dtphi1; phi2; dtphi2; g; m1; m2; l1; l2]
%   vreme                       interval od 0 do vreme (sekunde)
%   fps                         broj frejmova u sekundi (odgovaraju realnoj situaciji)
%   movie                       ako je false => ne pravi film
nframes = vreme * fps;
sol = ode45(@Dvostruko_klatno_ODE,[0 vreme], ivp)
t = linspace(0, vreme, nframes);
y = deval(sol,t);

phi1 = y(1,:)';
dtphi1 = y(2,:)';
phi2 = y(3,:)';
dtphi2 = y(4,:)';
l1 = ivp(8);
l2 = ivp(9);
figure(2);
videoObj = VideoWriter('Dvostruko_klatno.avi');
open(videoObj);
h = plot(0,0,'MarkerSize',30,'Marker','.','LineWidth',2);
title('Dvostruko klatno');
range = 1.1*(l1+l2); axis([-range range -range range]); axis square;
set(gca,'nextplot','replacechildren');

for i = 1 : length(phi1)-1
    if (ishandle(h) == 1)
        Xcoord = [0,l1*sin(phi1(i)),l1*sin(phi1(i))+l2*sin(phi2(i))];
        Ycoord = [0,-l1*cos(phi1(i)),-l1*cos(phi1(i))-l2*cos(phi2(i))];
        set(h,'XData',Xcoord,'YData',Ycoord);
        drawnow;
        if movie == false
            pause(t(i+1)-t(i));
        else
            writeVideo(videoObj, getframe);
        end
    end
end
close(videoObj);
end
```

Dvostruko_klatno_glavni.m

```
phi1                = pi/4;
dtphi1              = 0;    % pocetna brzina prvog tega
phi2                = pi/4;
dtphi2              = 0;    % pocetna brzina drugog tega
g                   = 9.81;
m1                  = 2;
m2                  = 1;
l1                  = 2;
l2                  = 1;
vreme               = 10;
fps                 = 50;
movie               = true;

clear All; clf;
ivp = [phi1; dtphi1; phi2; dtphi2; g; m1; m2; l1; l2];
Dvostruko_klatno(ivp, vreme, fps, movie);
```

Ukoliko nas zanima položaj tega u odnosu na vreme t:

Polozaj.m

```
phi1                    = pi/4;
dtphi1                  = 0;    % pocetna brzina prvog tega
phi2                    = pi/4;
dtphi2                  = 0;    % pocetna brzina drugog tega
g                       = 9.81;
m1                      = 2;
m2                      = 1;
l1                      = 2;
l2                      = 1;
vreme                   = 10;
fps                     = 100;
movie                   = true;

clear All; clf;
ivp = [phi1; dtphi1; phi2; dtphi2; g; m1; m2; l1; l2];
[t u] = ode45(@Dvostruko_klatno_ODE,[0 vreme], ivp);
hold on
plot(t,u(:,1), 'b-','LineWidth',2);
%plot(t,u(:,2), 'g-','LineWidth',2);
plot(t,u(:,3), 'r-','LineWidth',2);
%plot(t,u(:,4), 'k-','LineWidth',2);
xlabel('vreme(s)');
ylabel('ugao(\theta)');
title('Dvostruko klatno')
%legend('\theta_1', '\partial \theta_1', '\theta_2', '\partial \theta_2');
legend('\theta_1(t)', '\theta_2(t)');
hold off
```