Геометрија 5, домаћи задаци 2017/18

Афини простори и афина пресликавања

1. Навести примере дводимензионих равни у четвородимензионом афином простору $\mathbb{R}^4$ (афинизација одговарајућег векторског простора) које су: (а) паралелне и различите; (б) делимично паралелне; (в) мимоилазне; (г) секу се у тачки; (д) секу се по правој.

2. Доказати следећа тврђења у произвољном афином простору над пољем $\mathbb{R}$, која представљају аксиоме при синтетичком заснивању еуклидске геометрије.

(а) Ако две разне равни имају неку заједничку тачку, онда је њихов пресек права.

(б) Ако су тачке A, B, C различите и колинеарне, тада је тачно једна од њих између преостале две.

(в) Ако тачка A није на правој Δ, тада у њиховој равни $\Pi = \langle A, \Delta \rangle$ постоји тачно једна права Γ која садржи тачку A и не сече праву Δ.

3. (а) Доказати да су две разне хиперравни у афином простору димензије $n > 1$ или паралелне или се секу по потпростору димензије $n-2$.

(б) Доказати да је пресек $k < n$ хиперравни афиног простора димензије n, међу којима никоје две нису паралелне, афини простор димензије $n-k$.

(в) Доказати да је сваки афини потпростор димензије $k < n$ афиног простора димензије n пресек неких $n-k$ различитих хиперравни.

4. У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су афини потпростори $\Pi:\ x_1 - x_2 - x_5 + 1 = 0,\ 2x_1 + x_3 + x_5 - 3 = 0,\ 3x_2 - x_4 + 3x_5 - 5 = 0$ и $\Gamma:\ x_1 = 2 + t + s, x_2 = -1 - 2t, x_3 = -3s, x_4 = 4 - 2t + 3s, x_5 = 3 + s;\ t, s \in \mathbb{R}$.

(а) Представити потпростор Π у параметарском облику, а потпростор Γ као пресек неких хиперравни.

(б) Испитати узајамни положај потпростора Π и Γ.

(в) Одредити једначину потпростора Σ најмање димензије који садржи Π, паралелан је са Γ и садржи тачку $M(1, 2, 1, 2, 0)$.

5. Нека је T_{PQ} тежиште система тачака A, P, Q, при чему је A фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}^n$, а P и Q припадају редом датим (разним) афиним потпросторима Π и Γ.

(а) Доказати да је скуп $\Sigma = \{T_{PQ} \mid P \in \Pi,\ Q \in \Gamma\}$ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са Π и Γ.

(б) Испитати детаљно специјалан случај $n = 3$ и $\dim \Pi = \dim \Gamma = 1$.

6. Дат је троугао ABC у еуклидској равни.

(а) Одредити барицентричне координате центра уписане кружнице датог троугла, центра уписане кружнице троугла чија су темена средишта страница датог троугла и Нагелове тачке датог троугла.

(б) Доказати да ове три тачке и тежиште троугла припадају једној правој (тзв. Нагелова права) и одредити односе добијених дужи на тој правој.

7. Нека су $A(0, 2)$, $B(3, 5)$, $C(-3, 5)$, $D(-3, -1)$ тачке афине равни, дате својим координатама у односу на афини репер Oe.

(а) Доказати да је систем тачака (A, B, C) једна афина база и одредити барицентричне координате произвољне тачке $M(x, y)$ у тој бази.

(б) Доказати да постоји јединствена афина трансформација Φ за коју важи $\Phi(A, B, C) = (B, C, D)$ и одредити формуле те трансформације у односу на дати репер.

8. (а) Доказати да су транслације и хомотетије једине афине трансформације афиног простора $\mathcal{A}$ које имају исту матрицу A у односу на све базе његове директрисе $\mathbb{V}$. При томе је $A = \alpha E$ за тачно један ненула скалар α.

(б) Доказати да скуп свих хомотетија и транслација чини нормалну подгрупу афине групе.

9. Дат је скуп тачака $A_1, \ldots, A_m$ афиног простора $\mathcal{A}^n$ и пресликавање f које свакој тачки P простора придружује тачку Q такву да је $\overrightarrow{PQ} = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \cdots + \alpha_m \overrightarrow{PA_m}$, где су $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ произвољни реални скалари.

(а) Доказати да је f афино ресликавање и одредити његов тип у зависности од датих реалних скалара.

(б) Ако је $m = 3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\mathcal{A} = \mathbb{E}^2$ еуклидска раван и тачке A_1, A_2, A_3 су неколинеарне, одредити криву коју описује тачка Q док се тачка P креће по описаном кругу троугла $A_1A_2A_3$.

10. Нека је σ афино пресликавање афиног простора $\mathcal{A}$ такво да је за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, тачка $\sigma^2(M)$ средиште дужи $M\sigma(M)$.

(а) Доказати да је, за сваку тачку $M \in \mathcal{A}$, барицентар тачака $(M, 1)$, $(\sigma(M), 2)$ фиксна тачка при пресликавању σ.

(б) Одредити σ у случају када има тачно једну фиксну тачку.

11. (а) Одредити формуле афине трансформације Φ еуклидске равни којом се тачка $(0, 0)$ слика у тачку $(2, 5)$, а праве $\Delta : x - y + 1 = 0$ и $\Sigma : 5x + 4y + 5 = 0$ су фиксне.

(б) Одредити реалне коефицијенте α, β такве да важи $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$, где је Φ_1 дилатација са основом Δ, правцем Σ и коефицијентом α, а Φ_2 дилатација са основом Σ, правцем Δ и коефицијентом β.

(в) Одредити једначину и површину елипсе која је слика круга $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ при пресликавању Φ.

12. (а) Одредити формуле фамилије афиних пресликавања у односу на фиксирани репер Oe афине равни тако да се координатне осе Ox и Oy пресликавају редом на праве $2x + 3y + 1 = 0$ и $x - y - 7 = 0$.

(б) Одредити међу добијеним пресликавањима она која нису афине трансформације.

(в) Доказати да је међу добијеним пресликавањима тачно једно дилатација.

13. Нека су p и q две праве у афиној равни $\mathcal{A}$ које се секу у тачки A.

(а) Ако је σ_p афина симетрија у односу на праву p паралелно са q и σ_q афина симетрија у односу на праву q паралелно са p, доказати да је њихова композиција $\sigma = \sigma_p \circ \sigma_q$ централна симетрија у односу на тачку A.

(б) Доказати да је скуп $\mathbb{S} = \{\varepsilon, \sigma_p, \sigma_q, \sigma_A\}$ једна подгрупа афине групе и одредити њену таблицу. Која је група у питању?

14. Нека је π паралелно пројектовање афиног простора $\mathcal{A}$ са афиним репером $Oe_1e_2e_3$, чија је основа $\Pi :\ 2x+y-z+1 = 0$, директриса права $\Gamma = \langle G, u\rangle$, $G(-1, 2, 3)$, $u = 2e_1 + e_2 - e_3$, а $\eta_{S,k}$ хомотетија са центром $S(2, 2, -2)$ и коефицијентом -2. Одредити формуле пресликавања $\pi \circ \eta_{S,k}$, а затим испитати које афино пресликавање је добијено на овај начин.

15. У афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 са афиним репером Oe одредити формуле:

(а) дилатације чија је основа раван $\Pi : 2x - y + z = 2$ и која слика тачку O у тачку $S(2, 1, 2)$;

(б) трансвекције чија је основа раван $\Pi : 2x + y + 2z - 3 = 0$ и која слика тачку $S(1, 0, 1)$ у тачку $S'(0, 4, 0)$.

16. Одредити основне компоненте и врсту афине трансформације дате својим формулама у односу на афини репер $Oe_1e_2e_3$ афиног простора $\mathcal{A}^3$:

(а) $$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y + 4z - 1,\\ y' &= -2x - 5y - 4z + 1,\\ z' &= 2x + 6y + 5z - 1; \end{aligned}$$

(б) $$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y - 4z + 1,\\ y' &= 3x + 6y - 6z + 2,\\ z' &= -4x - 8y - 8z + 6; \end{aligned}$$

(в) $$\begin{aligned} x' &= 7x - 4y + 8z + 2,\\ y' &= 6x - 3y + 8z + 2,\\ z' &= 3x - 2y + 5z + 1. \end{aligned}$$

17. Доказати да су два трапеза $ABCD$ и $A'B'C'D'$ еуклидске равни, са основицама $AB \parallel CD$, $A'B' \parallel C'D'$, афино подударни акко је $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$. Специјално, доказати да је сваки трапез афино подударан неком једнакокраком трапезу.

18. (а) Нека су P, Q, R, S, редом, додирне тачке елипсе Σ са страницама AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$. Доказати да су дужи PR и QS два њена дијаметра.

(б) Доказати да је $AP : PB = AS : SD$, као и да су дијаметри PR и QS конјуговани акко су тачке P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA.

19. Елипса додирује странице троугла BC, CA, AB троугла ABC у тачкама P, Q, R, редом.

(а) Доказати да су праве BC и QR паралелне акко права AP садржи центар елипсе.

(б) Уколико су тачке P, Q, R средишта страница датог троугла, доказати да је елипса јединствено одређена. Одредити њену једначину и површину уколико темена троугла имају координате $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

20. Ако је O центар и A било која тачка хиперболе, доказати да постоји права Δ која садржи тачку O, таква да права OA садржи средишта свих тетива те хиперболе које су паралелне са Δ (праве OA и Δ се некада називају конјугованим дијаметрима хиперболе).

Еуклидски простори, изометрије и сличности

1. Одредити формуле следећих пресликавања еуклидске равни:

(а) ротација која слика тачке $(1,2)$ и $(\frac{\sqrt{3}+2}{2},\frac{3}{2})$ редом у тачке $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}+2}{2})$ и $(2,1)$;

(б) клизајућа рефлексија која слика тачке $(0,0)$ и $(0,1)$ редом у тачке $(1,1)$ и $(2,1)$;

(в) сличности која је композиција хомотетије са центром у тачки $(2,1)$ и коефицијентом 3 и рефлексије у односу на праву $x+3y=5$;

(г) обе хомотетије које сликају круг $x^2+y^2=1$ на круг $(x-3)^2+(y-1)^2=3$.

2. Доказати да су пресликавања дата формулама у односу на ортонормирани репер Oe_1e_2 еуклидске равни изометрије или сличности и одредити њихове основне компоненте:

(а) $$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -3x, & & & & \\ y' & = & & & 3y & - & 4; \end{array}$$

(б) $$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 5x & - & 12y & + & 8, \\ y' & = & 12x & + & 5y & - & 16. \end{array}$$

3. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ је оријентисан својим ортонормираним репером Oe. Одредити формуле:

(а) завојног кретања чија је оса права $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ оријентисана својим вектором правца, угао ротације $-\frac{3\pi}{4}$ и вектор транслације $(0,-2,-2)$;

(б) осноротационе рефлексије за угао $\frac{2\pi}{3}$, чија је основа раван $2x-y+2z-3=0$ и оса права оријентисана вектором $\overrightarrow{SP}$, где је P тачка $(3,0,3)$ и S њен пресек са равни основе.

4. Еуклидски простор $\mathbb{E}^3$ оријентисан је својом канонском базом $Oe_1e_2e_3$. Доказати да је датом матрицом A одређена једна векторска ротација или рефлексија и одредити њену осу и одговарајући угао у односу на једну од оријентација те осе, односно раван рефлексије, уколико је:

(а) $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; (б) $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; (в) $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Одредити све парове реалних бројева (a,b) за које је формулама:

(а) $$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & ax & + & by & + & bz, \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz, \\ z' & = & bx & + & by & + & az, \end{array}$$ одређена једна ротација еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$;

(б) $$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & ax & + & by & + & bz, \\ y' & = & bx & + & by & + & az, \\ z' & = & bx & + & ay & + & bz, \end{array}$$ одређена једна рефлексија еуклидског векторског простора $\mathbb{R}^3$.

6. У четвородимензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ дата је права $\Delta: x_1=4+t, x_2=3+2t, x_3=-3-t, x_4=7+3t$, $t\in\mathbb{R}$ и тачке $A(4,1,-1,-1)$, $B(-1,2,4,0)$, $C(0,3,0,-2)$.

(а) Одредити тачку A_1 симетричну тачки A у односу на праву Δ.

(б) Одредити једначину сфере чији је центар тачка A_1 и која садржи тежиште троугла ABC.

7. У четвородимензионом еуклидском простору задата је дводимензиона раван $\Pi: x_1+x_2=1, x_3+x_4=0$. Одредити формуле:

(а) нормалне пројекције на раван Π;

(б) симетрије у односу на раван Π.

8. У петодимензионом еуклидском простору дате су дводимензионе равни $\Pi: x_1=s, x_2=t, x_3=0, x_4=t, x_5=s$, $s,t\in\mathbb{R}$ и $\Gamma: x_1=q, x_2=1, x_3=2p, x_4=0, x_5=0$, $p,q\in\mathbb{R}$ ($\Pi: x_1=t, x_2=-2, x_3=t, x_4=s, x_5=0$, $t,s\in\mathbb{R}$ и $\Gamma: x_1=0, x_2=p, x_3=q, x_4=p, x_5=q+1$, $p,q\in\mathbb{R}$). Одредити једначину праве Δ која представља њихову заједничку нормалу, а затим једначину сфере која додирује ове равни и центар јој припада правој Δ. Написати једначине тангентних равни ове сфере у додирним тачкама са равнима Π и Γ.

9. У четвородимензионом еуклидском простору дати су раван $\Pi: x_1+2x_2-x_3+3x_4+15=0$ и права $\Gamma: x_1=s+2, x_2-2s, x_3=-s-1, x_4=-s-2$, $s\in\mathbb{R}$. Одредити једначину праве Δ која припада равни Π, са правом Γ заклапа најмањи угао и на најмањем је растојању од координатног почетка.

10. У петодимензионом еуклидском простору дате су афини потпростори $\Pi:\ x_2+x_5=x_1-x_2-x_3+x_4=3$ и $\Gamma:\ x_1=2+2q, x_2=1-5p+q, x_3=1+2p-q, x_4=3+2p+3q, x_5=2-5p+3q$, $p,q\in\mathbb{R}$. Одредити ортогоналну пројекцију равни Γ на раван Π, као и димензију пројекције.

Пројективни простори и пројективна пресликавања

1. Нека је Φ пројективна трансформација равни $\mathbb{RP}^2$ која је у односу на њен канонски репер одређена формулама $\lambda x' = -4x - 3y - 3z$, $\lambda y' = -y$, $\lambda z' = 3x + 3y + 2z$ и $\mathbb{A}$ афина карта таква да је $\infty_{\mathbb{A}} = \mathbb{P}(\mathbb{U})$ њена бесконачно далека права одређена векторском равни $\mathbb{U} : z = 0$.

(а) Одредити слику бесконачно далеке праве, праву која се слика у бесконачно далеку, као и траг $\Phi_{\mathbb{A}}$ дате трансформације Φ на афиној карти $\mathbb{A} = \mathbb{RP}^2 \backslash \infty_{\mathbb{A}}$ у одговарајућим афиним координатама.

(б) Одредити фиксне тачке и фиксне праве трансформације Φ и доказати да је у питању перспективна колинеација.

(в) Одредити бесконачно далеке праве $\infty_{\mathbb{B}} = \mathbb{P}(\mathbb{W})$ свих могућих афиних карата $\mathbb{B} = \mathbb{RP}^2 \backslash \infty_{\mathbb{B}}$ таквих да је траг дате трансформације Φ на картама $\mathbb{B}$ неко афино пресликавање. Које је пресликавање у питању?

(г) Доказати да је рестрикција σ датог пресликавања на правој $\mathbb{P}(\mathbb{F})$, где је $\mathbb{F}$ векторска раван $x = 0$, перспективно пресликавање и одредити формуле трансформације σ у одговарајућим хомогеним и афиним координатама.

2. У пројективној равни $\mathbb{RP}^2$ дате су праве $\Pi = \mathbb{P}(\mathbb{U})$ и $\Gamma = \mathbb{P}(\mathbb{W})$, где су векторске равни $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ дате својим једначинама $\mathbb{U} : y = 0$, $\mathbb{W} : y = z$, у односу на канонски репер векторског простора $\mathbb{R}^3$.

(а) Доказати да су $\Omega = [A, B, C]$ и $\Theta = [A, E, F]$ пројективни репери правих Π и Γ редом и одредити њихове адаптиране базе, уколико је $A[1 : 0 : 0]$, $B[1 : 0 : 1]$, $C[1 : 0 : 2]$, $E[3 : 2 : 2]$, $F[1 : 1 : 1]$.

(б) Одредити тачке D и G на правама Π и Γ редом такве да је $(ABCD) = (AEFG) = -1$, као и њихове хомогене и афине координате у односу на дате репере Ω и Θ.

(в) Доказати да су праве BE, CF, DG конкурентне. Уколико је S њихова пресечна тачка, одредити формуле перспективног пресликавања са центром S праве Π на праву Γ, у хомогеним и афиним координатама тако да је права AS бесконачно далека права.

3. У троуглу ABC еуклидске равни тачке P, Q, R су подножја висина из темена A, B, C, редом, а тачке D, E, F су средишта страница BC, CA, AB, редом. Доказати да важи $\mathcal{H}(PQ, PR; PA, PB)$ и $\mathcal{H}(DE, DF; DA, DB)$.

4. У пројективној равни $\mathbb{RP}^2$ дат је тротеменик XYZ. Праве Π и Γ секу праве YZ, ZX, XY тим редом у тачкама A, B, C, односно P, Q, R. Доказати да су пресечне тачке правих YZ и BR, ZX и CP, XY и AQ колинеарне. Како гласи тврђење у афиној карти у којој су праве YZ и BR паралелне?

5. Коника пројективне равни $\mathbb{RP}^2$ одређена је неколинеарним тачкама A, B, C и тангентама a, b те конике у тачкама A, B (a, b не садрже тачку C).

(а) Конструисати тангенту конике у тачки C, као и другу пресечну тачку конике и произвољне праве кроз C.

(б) Описати претходне конструкције у случају еуклидске хиперболе одређене асимптотама a и b и тачком C.

6. Дате су четири тачке A, B, C, D на пројективној коници у $\mathbb{RP}^2$. Праве AC и BD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F.

(а) Доказати да се тангенте конике у тачкама A, B секу на правој EF.

(б) Уколико се тангенте конике у тачкама A, C секу на правој BD, доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, као и да се тангенте у тачкама B и D секу на правој AC.