Геометрија 5, школска 2015/16, домаћи задаци

1. Одредити формуле следећих пресликавања еуклидске равни:

(а) ротација која слика тачке $(1,2)$ и $(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{3}{2})$ редом у тачке $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$ и $(2,1)$;

(б) клизајућа рефлексија која слика тачке $(0,0)$ и $(0,1)$ редом у тачке $(1,1)$ и $(2,1)$;

(ц) композиција хомотетије са центром у тачки $S(2,1)$ и коефицијентом 3 и рефлексије у односу на праву $x+3y=5$.

2. Доказати да су пресликавања дата формулама у односу на ортонормирани репер Oe_1e_2 еуклидске равни изометрије или сличности и одредити њихове основне компоненте:

(а) $\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -\frac{5}{13}x & - & \frac{12}{13}y & - & \frac{14}{13}, \\ y' & = & -\frac{12}{13}x & + & \frac{5}{13}y & + & \frac{47}{13}; \end{array}$ (б) $\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 5x & - & 12y & + & 8, \\ y' & = & 12x & + & 5y & - & 16. \end{array}$

3. Доказати да средишта свих дужи MM', где је M' слика произвољне тачке M при индиректној изометрији
$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & \cos\varphi\, x & + & \sin\varphi\, y & + & x_0, \\ y' & = & \sin\varphi\, x & - & \cos\varphi\, y & + & y_0, \end{array}$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$ припадају једној правој (оса одговарајуће рефлексије), која заклапа угао $\frac{\varphi}{2}$ са позитивним делом $x-$осе.

4. Доказати да су произвољна два трапеза афино подударна ако и само ако су им исти односи основица. Да ли је сваки трапез афино подударан неком једнакокраком трапезу?

5. На страницама произвољног троугла ABC дате су тачке P, Q, R тако да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 2$. Одредити однос површина троугла који образују праве AP, BQ, CR и датог троугла ABC.

6. (а) Нека су су A и B додирне тачке произвољне елипсе са центром O и тангенти из произвољне тачке T у спољашњости елипсе. Доказати да дуж TO полови тетиву AB елипсе.

(б) Доказати да постоји јединствена елипса $\mathcal{E}$ еуклидске равни која додирује странице троугла ABC у средиштима страница BC, CA, AB. Шта је центар елипсе $\mathcal{E}$?

7. Нека су P, Q, R, S додирне тачке елипсе $\mathcal{E}$ редом са страницама AB, BC, CD, AD паралелограма $ABCD$. Доказати да су дужи PR и QS дијаметри елипсе, као и да важи једнакост $\frac{AP}{PB} = \frac{AS}{SD}$.

8. (а) Нека је $ABCD$ паралелограм описан око елипсе $\mathcal{E}$ са центром O тако да су њихове додирне тачке средишта одговарајућих страница паралелограма. Ако је E пресек те елипсе са полуправом OA, одредити размеру $OE : EA$.

(б) Ако су дата два узајамно конјугована дијаметра PQ и RS неке елипсе $\mathcal{E}$, конструисати још четири њене разне тачке.

9. Нека је P произвољна тачка хиперболе $\mathcal{H}$, чије се асимптоте секу у тачки O. Тангента у тачки P сече асимптоте у тачкама A и B.

(а) Доказати да је $PA = PB$.

(б) Доказати да је површина троугла OAB константна, тј. да не зависи од тачке P.

10. Одредити тип афине трансформације која представља композицију коначног броја централних симетрија датог афиног простора.

11. Доказати да је композиција хомотетије и транслације афине равни опет хомотетија и одредити њен центар и коефицијент. Да ли скуп свих транслација и хомотетија чини подгрупу афине групе?

12. Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и π пресликавање које произвољној тачки M додељује тачку M' за коју важи $\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. Доказати да је пресликавање π афино и одредити тип пресликавања π у зависности од реалне константе α.

13. Нека су A, B, C три фиксиране неколинеарне тачке афиног простора $\mathcal{A}^n$ и α, β, γ реални бројеви такви да $\alpha+\beta+\gamma \neq 1$. Означимо са M барицентар система тачака (A, α), (B, β), (C, γ), $(M, 1)$.

(а) Доказати да је пресликавање $\sigma_{\alpha\beta\gamma} : M \to M'$ транслација или хомотетија.

(б) Представити $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ у координатама за $n = 2$. Ако су $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(2,2)$ координате тачака у односу на дати репер афине равни, представити у координатама пресликавање σ_{111} и скицирати путању произвољне тачке M.

14. (а) Одредити формуле афиног пресликавања које има фиксну праву $x + y = 6$, а праве $y = 1$ и $y = 3x - 2$ слика редом у праве $x + 2y = 7$ и $2x + y = 8$. Доказати да је дато пресликавање дилатација и одредити основне компоненте.

(б) Одредити једначину елипсе која је слика круга $(x - 6)^2 + y^2 = 16$, скицирати је и одредити њену површину.

15. Одредити формуле афине трансформације којом се паралелограм $ABCD$ са теменима $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(3,1)$, $D(1,1)$ слика у квадрат $ABDE$. Које је пресликавање у питању?

16. Нека је π паралелно пројектовање чија је основа $\Pi: 2x+y-z+1=0$, директриса права $\Gamma=\langle G,u\rangle$, $G(-1,2,3)$, $u=2e_1+e_2-e_3$, а $\eta_{S,k}$ хомотетија са центром $S(2,2,-2)$ и коефицијентом -2. Одредити формуле пресликавања $\pi\circ\eta_{S,k}$, а затим испитати које афино пресликавање је добијено на овај начин.

17. Одредити основне компоненте и врсту афине трансформације дате својим формулама у односу на афини репер $Oe_1e_2e_3$ афиног простора $\mathcal{A}^3$:

(а) $$\phi:\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 3x &+& 6y &+& 4z &-& 1,\\ y' &=& -2x &-& 5y &-& 4z &+& 1,\\ z' &=& 2x &+& 6y &+& 5z &-& 1; \end{array}$$

(б) $$\theta:\begin{array}{rcrcrcrcr} x' &=& 5x &+& 2y &-& 2z &+& 2,\\ y' &=& -4x &-& y &+& 2z &-& 2,\\ z' &=& 8x &+& 4y &-& 3z &+& 4. \end{array}$$

18. У петодимензионом афином простору $\mathcal{A}$ дати су права $\Delta: x_1=2+t$, $x_2=-t$, $x_3=-1-t$, $x_4=1+2t$, $x_5=-3t$, $t\in\mathbb{R}$ и дводимензиона раван $\Gamma: x_1=r+3s$, $x_2=-1+4r-s$, $x_3=-3+r+s$, $x_4=4-r+s$, $x_5=-2+s$, $r,s\in\mathbb{R}$.

(а) Одредити узајамни положај праве Δ и равни Γ.

(б) Одредити афини потпростор Σ најмање димензије који садржи праву Δ и раван Γ.

19. Одредити барицентричне координате ортоцентра H, центра описаног круга O и центра Ојлеровог круга E троугла ABC, у односу на афину базу одређену теменима датог троугла, а затим доказати да је E средиште дужи OH.

20. У равни је дат конвексан петоугао $ABCDE$.

(а) Конструисати тежиште датог петоугла.

(б) Описати геометријско место тачака X за које важи $XA^2+XB^2+XC^2+XD^2+XE^2=\lambda$ у зависности од позитивне реалне константе λ.

21. Нека је T_{PQ} тежиште система тачака A, P, Q, при чему је A фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}^n$, а P и Q припадају редом датим афиним потпросторима Π и Γ.

(а) Доказати да је скуп $\Sigma=\{T_{PQ}\mid P\in\Pi,\ Q\in\Gamma\}$ један афини потпростор од $\mathcal{A}$ паралелан са Π и Γ.

(б) Испитати детаљно специјалан случај $n=3$ и $\dim\Pi=\dim\Gamma=1$.

22. Нека су Π и Γ права и раван у афином простору $\mathcal{A}$ димензије бар 4. Ако је Σ скуп свих барицентара система пондерисаних тачака $(P,\frac{2}{3})$ и $(G,\frac{1}{3})$ $(P\in\Pi,\ G\in\Gamma)$, доказати да је Σ афини потпростор афиног простора $\mathcal{A}$. Дискутовати узајамни положај Π, Γ и Σ и одредити $\dim\Sigma$.