Решење другог колоквијума 2013/2014.

1. Нека је X случајна величина која има експоненцијалну $\varepsilon(\lambda)$ расподелу са густином

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека је $Y = [X]$, тј. $Y(\omega) = k$ ако је $k \leq X(\omega) < k+1$, где је $k \in \{0, 1, 2, ...\}$.

(а) За сваки ненегативан цео број к израчунати $P\{Y = k\}$

Пошто $X : \varepsilon(\lambda)$, онда је њена функција расподеле: $F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\begin{aligned} P\{Y = k\} &= P\{[X] = k\} \\ &= P\{k \leq X(\omega) < k+1\} \\ &= F(k+1) - F(k) \\ &= 1 - e^{-\lambda(k+1)} - 1 + e^{-\lambda k} \\ &= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}), k \in \{0, 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

(б) Коју расподелу вероватноћа има случајна величина Y?
Y има геометријску расподелу са параметром $p = 1 - e^{-\lambda}$.

(в) Израчунати математичко очекивање случајне величине X.
$EX = \frac{1}{\lambda}$ (наведено је само крајње решење, формула за очекивање наведене расподеле је изведена на неком од часова вежби)

(г) Израчунати математичко очекивање случајне величине Y.
$EY = \frac{1}{p}$ (наведено је само крајње решење, формула за очекивање наведене расподеле је изведена на неком од часова вежби)

2. Случајна величина X има равномерну расподелу на интервалу $[0, 1]$.

(а) За $0 < t < \frac{1}{2}$ израчунати $P\{X \leq t | X \leq \frac{1}{2}\}$ и $P\{1 - X \leq t | X > \frac{1}{2}\}$.

Пошто $X : U[0, 1]$, онда је њена функција расподеле: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

$P\{X \leq t | X \leq \frac{1}{2}\} = \frac{P\{X \leq t, X \leq \frac{1}{2}\}}{P\{X \leq \frac{1}{2}\}} = \frac{P\{X \leq t\}}{P\{X \leq \frac{1}{2}\}} = \frac{F(t)}{F(\frac{1}{2})} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$ (у другој једнакости се користи да је интервал $[0, t]$ подскуп интервала $[0, \frac{1}{2}]$, јер је $t < \frac{1}{2}$, а пресек та два интервала је мањи интервал)

$P\{1 - X \leq t | X > \frac{1}{2}\} = \frac{P\{1-X \leq t, X > \frac{1}{2}\}}{P\{X > \frac{1}{2}\}} = \frac{P\{X \geq 1-t, X > \frac{1}{2}\}}{P\{X > \frac{1}{2}\}} = \frac{P\{X \geq 1-t\}}{P\{X > \frac{1}{2}\}} = \frac{1-F(t)}{1-F(\frac{1}{2})} = \frac{1-1+t}{1-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$ (у трећој једнакости се користи да је интервал $[1-t, 1]$ подскуп интервала $[\frac{1}{2}, 1]$, јер је $t < \frac{1}{2}$, а пресек та два интервала је мањи интервал)

(б) Нека је Y случајна величина која представља дужину краћег од интервала $[0, X]$ и $[X, 1]$. Одредити функцију расподеле случајне величине Y.

$$Y = min\{X, 1 - X\}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\ &= P\{min\{X, 1 - X\} \leq y\} \\ &= 1 - P\{min\{X, 1 - X\} > y\} \\ &= 1 - P\{X > y, 1 - X > y\} \\ &= 1 - P\{X > y, X < 1 - y\} \\ &= 1 - F(1 - y) + F(y) \\ &= 1 - 1 + y + y \\ &= 2y, y \in [0, \tfrac{1}{2}] \end{aligned}$$

(y представља мининум дужина два интервала које у збиру дају 1, па тај минимум може највише да буде $\frac{1}{2}$)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2y, & y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

(в) Одредити густину расподеле случајне величине Y.

$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 2, & y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ (треба утврдити да ово заиста јесте густина расподеле, тај поступак је остављен читаоцу)

(г) Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине Y.

$EY = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2y dy = \frac{1}{4}$

$EY^2 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2y^2 dy = \frac{1}{12}$

$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{48}$