ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - ТЕСТ 1
16. АПРИЛ 2015.

1. Случајна величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ има закон расподеле $X : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Написати аналитички израз карактеристичне функције $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathscr{D}$, где је $\mathscr{D} = \{a + bi \mid a^2 + b^2 \leq 1,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. (2 поена)

2. Нека је $X : \Omega \to \mathbb{R}$ случајна величина и нека је φ_X њена карактеристична функција.

а) Написати аналитички израз карактеристичне функције случајне величине $Y = \dfrac{X}{2} + 1$. (1 поен)

б) Да ли је X произвољан елемент скупа $\mathbb{R}^\Omega$? (1 поен)

3. Нека је $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^\Omega$ низ случајних величина дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Написати дефиниције све четири врсте конвергенције низа T. (4×1 поен)

4. Формулисати слаби и јаки закон великих бројева за низ реалних случајних величина $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^\Omega$ дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. (2 поена)

Решења

1. Нека је $t \in \mathbb{R}$ произвољан реалан број, а $\mathscr{K} = \{a + ib \mid a^2 + b^2 = 1,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ јединични круг у комплексној равни. Тада је $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$, где је $e^{itX} : \Omega \to \mathscr{K}$ комплексна случајна величина са вредностима на јединичном кругу. Та случајна величина има закон расподеле:

$$e^{itX} : \begin{pmatrix} e^{-3it} & e^0 & e^{3it} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Њено очекивање је: $E\left(e^{itX}\right) = \dfrac{2}{5} \cdot e^{-3it} + \dfrac{1}{5} \cdot e^0 + \dfrac{2}{5} \cdot e^{3it} = \dfrac{1 + 4\cos(3t)}{5}$.

Самим тим, карактеристична функција случајне величине X је реална и $\varphi_X(t) = \dfrac{1 + 4\cos(3t)}{5}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. а) $\varphi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = E\left(e^{it\left(\frac{X}{2}+1\right)}\right) = E\left(e^{it} \cdot e^{i\frac{t}{2}X}\right) = e^{it} \cdot \varphi_X\left(\dfrac{t}{2}\right)$, за свако $t \in \mathbb{R}$.

б) Не. X мора бити P-мерљиво пресликавање у Бореловом смислу, односно:

$$(\forall B \in \mathscr{B}_\mathbb{R})\ X^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

Напомена: Случајна величина X је дефинисана на простору вероватноћа $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, док је $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ Борелова σ-алгебра подскупова скупа $\mathbb{R}$. Подразумева се да је $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$.

3.
- **Конвергенција у расподели.**
- **Конвергенција у вероватноћи.**
- **Скоро сигурна конвергенција.**
- **Конвергенција у средње-квадратном смислу.**

4. Дефинишимо низ парцијалних сума низа X са: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, за $n \in \mathbb{N}$.

Уколико важи: $\dfrac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$, када $n \to \infty$, онда за низ X важи **слаби** закон великих бројева.

Уколико важи: $\dfrac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{c.c.} 0$, када $n \to \infty$, онда за низ X важи **јаки** закон великих бројева.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - КОЛОКВИЈУМ 1
16. АПРИЛ 2015.

1. Нека је $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\Omega}$ низ независних, равномерно расподељених, случајних величина, такав да:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ X_n \in \mathscr{U}\left[2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\right].$$

Нека је $Y = S_{400}$ случајна величина која представља збир првих 400 чланова низа X.

а) Израчунати математичко очекивање и дисперзију случајне величине Y. (2 поена)

б) Израчунати вероватноћу догађаја $F = \{\omega \in \Omega \mid 760 < Y(\omega) \leq 820\}$. (5 поена)

в) Нека је $M : \Omega \to \mathbb{R}$ случајна величина која представља максимум вредности $X_1, X_2, \ldots, X_{400}$; односно, $(\forall \omega \in \Omega)\ M(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_{400}(\omega)\}$.
Израчунати вероватноћу догађаја $G = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; M(\omega) > \sqrt{5}\right\}$. (3 поена)

Напомена: Ако је $Z \in \mathscr{N}(0,1)$, онда је $P\{|Z| < 1\} = 68.27\%$, док је $P\{|Z| < 2\} = 95.45\%$.

Решење

а) $$E(Y) = E(S_{400}) = E\left(\sum_{k=1}^{400} X_k\right) = \sum_{k=1}^{400} E(X_k) = 400 \cdot \frac{(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})}{2} = 800.$$

$$D(Y) = D(S_{400}) = D\left(\sum_{k=1}^{400} X_k\right) = \sum_{k=1}^{400} D(X_k) = 400 \cdot \frac{\left[(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})\right]^2}{12} = 400.$$

б) $$P\{760 < Y \leq 820\} = P\{-40 < Y - E(Y) \leq 20\} = P\left\{-2 < \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq 1\right\} = \cdots = 81.86\%.$$

в) Вероватноћа догађаја G је:

$$\begin{aligned}
P\left\{M > \sqrt{5}\right\} &= P\left\{\max\{X_1, X_2, ..., X_{400}\} > \sqrt{5}\right\} \\
&= 1 - P\left\{\max\{X_1, X_2, ..., X_{400}\} \leq \sqrt{5}\right\} \\
&= 1 - P\left\{X_1 \leq \sqrt{5},\ X_2 \leq \sqrt{5}, \ldots,\ X_{400} \leq \sqrt{5}\right\} \\
&= 1 - P\left\{X_1 \leq \sqrt{5}\right\} \cdot P\left\{X_2 \leq \sqrt{5}\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{X_{400} \leq \sqrt{5}\right\} \\
&= 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})}\right)^{400}
\end{aligned}$$

2. Случајна величина $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, дефинисана на $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, има равномерну $\mathscr{U}[1,3]$ расподелу. Низови догађаја $A, B : \mathbb{N} \to \mathscr{A}$ су задати својим општим члановима:

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; 1 + \frac{1}{n} < Y(\omega) < 3 - \frac{1}{n}\right\} \text{ и } B_n = \Omega \setminus A_n, \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

Означимо са $I_A,\ I_B : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\Omega}$ низове индикатора низова догађаја A, односно, B.

Низ случајних величина $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\Omega}$ се дефинише са: $(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n = Y \cdot I_{A_n} + b_n \cdot I_{B_n}$.

а) Одредити реалан низ $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, тако да буде $E(T_n) = 2$, за све $n \in \mathbb{N}$. (2 поена)

б) За тако одређен низ b, испитати све четири врсте конвергенције низа T. (4×2 поена)

Решење

а) Прво, приметимо да је $E(I_{A_n}) = P(A_n) = \dfrac{\left(3 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{3 - 1} = 1 - \dfrac{1}{n}$, док је $E(I_{B_n}) = P(B_n) = \dfrac{1}{n}$.
Затим, $E(T_n) = E(Y \cdot I_{A_n}) + E(b_n \cdot I_{B_n})$. Случајне величине Y и I_{A_n} **нису независне** и због тога се очекивање производа те две случајне величине не може израчунати као производ њихових очекивања.
Сада рачунамо: $E\left(Y \cdot I_{A_n}\right) = E\left(Y \cdot I\left\{1 + \dfrac{1}{n} < Y < 3 - \dfrac{1}{n}\right\}\right) = \displaystyle\int_1^3 t \cdot \chi\left\{t \in \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]\right\} \cdot f_Y(t)\, dt =$

$$\int_{1+\frac{1}{n}}^{3-\frac{1}{n}} \frac{t}{2}\, dt = \frac{t^2}{4}\Bigg|_{1+\frac{1}{n}}^{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = 2 - \frac{2}{n}\ .$$

Даље је: $E(T_n) = \left(2 - \dfrac{2}{n}\right) + b_n \cdot \dfrac{1}{n} = 2$. Јасно се види да је $b_n = 2$, за $n \in \mathbb{N}$.

б) Одредили смо низ $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и за произвољно $n \in \mathbb{N}$ је $T_n = Y \cdot I_{A_n} + I_{B_n}$, односно:

$$T_n(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) & , \quad \omega \in A_n \\ 2 & , \quad \omega \in B_n \end{cases}.\ A_n = Y^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right),\ B_n = \Omega \setminus A_n.$$

Сада је важно приметити да (када $n \to \infty$) $A_n \to \Omega$, а $B_n \to \varnothing$, као и да се случајне величине T_n и Y поклапају на скупу A_n. Другим речима, $P\{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) = Y(\omega)\} = P(A_n) \to 1$, када $n \to \infty$. Из претходне чињенице следи да низ T **скоро сигурно конвергира** ка случајној величини Y.

Остаје још да испитамо конвергенцију у **средње-квадратном смислу** (обзиром да **скоро сигурна конвергенција** имплицира **конвергенцију у вероватноћи** и **конвергенцију у расподели**).

Означимо са $V_n = |T_n - Y|^2$. Треба да испитамо да ли важи: $E(V_n) \to 0$, када $n \to \infty$.

$$V_n(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \in A_n \\ |2 - Y(w)|^2 & , \quad \omega \in B_n \end{cases}.$$

Приметимо да је $0 \le V_n(\omega) \le 1$ (јер је $Y(\omega) \in \left[1, 1 + \dfrac{1}{n}\right] \cup \left[3 - \dfrac{1}{n}, 3\right]$, за $\omega \in B_n$). Самим тим је:

$$E(V_n) = \int_{\Omega} V_n\, dP = \int_{B_n} V_n\, dP \ \le\ 1 \cdot P(B_n) = \frac{1}{n}\ .$$

Сада је јасно да заиста $E(V_n) \to 0$, када $n \to \infty$ и закључујемо да низ T и у **средње-квадратном смислу конвергира** ка случајној величини Y.