ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - КОЛОКВИЈУМ 1
6. ДЕЦЕМБАР 2014.

1. Вероватноће независних догађаја A и B при истом експерименту су $P(A) = \frac{2}{7}$ и $P(B) = \frac{3}{7}$. Случајна величина X представља број изведених експеримената до прве реализације догађаја A. Случајна величина Y представља број изведених експеримената до прве реализације догађаја B. Случајна величина Z представља број реализација догађаја $C = A \cup B$ у првих осам експеримената. Извођења различитих експеримената су независни догађаји.

а) Коју расподелу вероватноћа имају случајне величине X, Y, односно Z? (2 поена)

б) Испитати независност случајних величина X и Y. (3 поена)

в) Израчунати очекивања $E(X)$, $E(Y)$ и $E(Z)$ и дисперзије $D(X)$, $D(Y)$ и $D(Z)$. (2 поена)

г) Ако случајна величина W представља број изведених експеримената до седме реализације догађаја $F = AB$, одредити расподелу вероватноћа и израчунати математичко очекивање случајне величине W. (3 поена)

Решење

а) X и Y имају геометријску расподелу, и то $X \in \mathscr{G}\left(\frac{2}{7}\right)$, а $Y \in \mathscr{G}\left(\frac{3}{7}\right)$.
Да бисмо одредили расподелу вероватноћа случајне величине Z, морамо да одредимо вероватноћу догађаја $C = A \cup B$. На овом месту је важно истаћи да су догађаји A и B независни.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{29}{49}.$$

Дакле, случајна величина Z има биномну расподелу, и то $Z \in \mathscr{B}\left(8, \frac{29}{49}\right)$.

б) Случајне величине X и Y су независне ако:

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad P\{X = m, Y = n\} \; = \; P\{X = m\} \cdot P\{Y = n\}.$$

Морамо раздвојити следеће случајеве ($k \in \mathbb{N}$):

i) Догађаји A и B се по први пут реализују у истом експерименту ($m = n$).
ii) Догађај A се реализује пре догађаја B ($n = m + k$).
iii) Догађај A се реализује после догађаја B ($m = n + k$).

i) У првих $n-1$ експеримената се нису догодили ни A, ни B (сваки пут се десио догађај $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$), а у $n-$том су се догодила оба (догодио се догађај $F = AB$). Стога је:

$$\begin{aligned} P\{X = n, Y = n\} &= [(1 - P(A))(1 - P(B))]^{n-1} \cdot P(A)P(B) \\ &= (1 - P(A))^{n-1}P(A) \, \cdot \, (1 - P(B))^{n-1}P(B) \\ &= P\{X = n\} \cdot P\{Y = n\}. \end{aligned}$$

ii) У првих $n-1$ експеримената се нису догодили ни A, ни B (сваки пут се десио догађај $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$). У n-том експерименту се десио A, али не и B, дакле десио се догађај $A \setminus B$, вероватноће $P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = P(A)(1 - P(B))$. У наредних $k-1$ експеримената након n-тог се није догодио догађај B, док се у $n+k-$том догађај B догодио.

$$\begin{aligned} P\{X = n, Y = n + k\} &= [(1 - P(A))(1 - P(B))]^{n-1} \cdot P(A)(1 - P(B)) \cdot (1 - P(B))^{k-1} \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A))^{n-1}P(A) \, \cdot \, (1 - P(B))^{n+k-1}P(B) \\ &= P\{X = n\} \cdot P\{Y = n + k\}. \end{aligned}$$

iii) Случај симетричан случају *ii)*.

Дакле, случајне величине X и Y јесу независне.

в) $E(X) = \frac{7}{2}$; $E(Y) = \frac{7}{3}$; $E(Z) = \frac{8 \cdot 29}{49}$. $D(X) = \frac{1-\frac{2}{7}}{\left(\frac{2}{7}\right)^2}$; $D(Y) = \frac{1-\frac{3}{7}}{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$; $D(Z) = 8 \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{20}{49}$.

г) $P(F) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{6}{49}$. Случајна величина W има негативну биномну $\mathscr{NB}\left(7, \frac{6}{49}\right)$ расподелу. Стога је математичко очекивање случајне величине W једнако: $E(W) = \frac{7 \cdot 49}{6}$.

2. На пословном састанку је било осам људи. Свако од њих је пре састанка оставио капут у гардероби. Непажљиви гардеробер је заборавио да им подели бројеве када су оставили капуте и након састанка је свакоме вратио случајно изабран капут. Случајна величина X представља број људи којима је враћен њихов (одговарајући, прави) капут.

а) Израчунати вероватноћу догађаја $\{X = 0\}$. (5 поена)

б) За сваки природан број $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, израчунати вероватноћу догађаја $\{X = k\}$. (4 поена)

в) Записати расподелу вероватноћа случајне величине X. (1 поен)

Решење

а) Нека је догађај да је i-та особа добила свој капут означен са A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Тада је $A = \bigcup_{i=1}^{8} A_i$ догађај да је бар једна особа добила свој капут, односно $\{X = 0\} = \overline{A}$.
Приметимо да је, на пример, A_4A_6 догађај да су четврта и шеста особа добиле свој капут. Сада можемо израчунати следеће вероватноће:

$P(A_i) = \frac{1}{8} = \frac{7!}{8!}$, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.
$P(A_iA_j) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6!}{8!}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, $i \neq j$.
$\vdots$
$P(A_1A_2 \ldots A_8) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{8!}$.

$$\begin{aligned}
P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{8} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{8} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 8} P(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{8-1} P(A_1A_2 \ldots A_8) \\
&= 8 \cdot \frac{1}{8} - \binom{8}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} + \binom{8}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdots \frac{1}{1} = \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots \frac{1}{8!}.
\end{aligned}$$

Дакле, закључујемо да је: $P\{X = 0\} = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}$.

б) Догађај $\{X = k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ представља случај да је тачно k особа добило свој капут. Тада знамо да тачно $8 - k$ особа није добило свој капут. Означимо са B_0^n догађај да од n лица ниједно није добило свој капут. У делу а) смо видели да је $P(B_0^8) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} = \frac{|B_0^8|}{|\Omega_8|}$.
Обзиром да капуте можемо људима поделити на $8!$ начина, можемо да закључимо:

$$|B_0^8| = 8! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!}\right),$$

а затим и $|B_0^n| = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$.

Сада приметимо да је $P\{X=k\} = \dfrac{\binom{8}{k}\cdot|B_0^{8-k}|}{8!}$, где прво изаберемо k особа које су добиле свој капут, а од осталих $8-k$ особа сигурно нико није добио свој капут, $k\in\{1,2,\ldots,6\}$.

Даље следи да је: $P\{X=k\} = \dfrac{\frac{\cancel{8!}}{k!\cancel{(8-k)!}}\cdot\cancel{(8-k)!}\cdot\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{8-k}}{(8-k)!}\right)}{\cancel{8!}} = \dfrac{1}{k!}\cdot\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^{8-k}}{(8-k)!}\right)$, за $k\in\{1,2,\ldots,6\}$. Приметимо да је $P\{X=7\}=0$ (не могу сви осим једног добити прави капут), док је $P\{X=8\}=\dfrac{1}{8!}$.

в) Означимо са $p_k = P\{X=k\}$, $k\in\{0,1,\ldots,8\}$ (израчунато у деловима а) и б)). Тада је закон расподеле случајне величине X дат са :

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & 7 & 8 \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & 0 & p_8 \end{pmatrix}.$$