MATEMATIČKI FAKULTET

NELINEARNO PROGRAMIRANJE

- VEŽBE -

MARIJA IVANOVIĆ

BEOGRAD, 2013.

Primeri problema nelinearne optimizacije – formiranje modela

PRIMER 1

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo karton povšine A od koga želimo da napravimo kutiju maksimalne zapremine. Pretpostavimo da se stranice kutije posebno lepe nekom trakom, pa se karton dodatno ne troši za spojeve. Napraviti matematički model koji odgovara ovom problemu.

REŠENJE:

Obeležimo dužinu, širinu i visinu kutije sa *x, y* i *z.* Zapremina kutije dobija se pomoću formule $\mathrm{V} = xyz$. Površina ovako definisane kutije iznosi $P = 2xy + 2xz + 2yz$. Sve stranice treba da su veće od 0.

Konačno, imamo model:

$$\min V = xyz$$

Pri ograničenjima

$$2xy + 2xz + 2yz \leq A$$
$$x, y, z > 0$$

PRIMER 2

Razmotriti problem utvrđivanja lokacija za dve nove srednje škole u nekom gradu ako svi đaci žive u *P* blokova N_j, *j=1,..,P*. Iz svakog bloka đaci mogu da biraju da li žele da pohađaju školu A, odnosno školu B. Neka w_{1j} predstavlja broj đaka koji idu u školu A i w_{2j} broj đaka koji idu u školu B iz bloka N_j. Pretpostavimo da je kapacitet škole A c_1 dok je kapacitet škole B c_2 i da je ukupni broj đaka svakog bloka r_j. Želimo da minimiziramo rastojanje koje će svi đaci ukupno prelaziti dnevno. Moguće je konstruisati nelinearni problem koji će odrediti koordinate (*a,b*), (*c,d*) škola uz pretpostavku da je svaki blok N_i u modelu predstavljen tačkom čije su koordinate (x_i, y_i).

REŠENJE:

Izračunajmo ukupno rastojanje koje đaci prelaze:

Od bloka N_j do škole A, dnevno se prelazi $((a - x_j)^2 + (b - y_j)^2)^{1/2}$

Odnosno, od bloka N_j do škole B, dnevno se prelazi $((c - x_j)^2 + (d - y_j)^2)^{1/2}$

Dakle, pređeni put svih đaka iz svih blokova iznosi:

$$f(a, b, c, d) = \sum_{j=1}^{P} w_{1j} \left((a - x_j)^2 + (b - y_j)^2\right)^{1/2} + w_{2j} \left((c - x_j)^2 + (d - y_j)^2\right)^{1/2}$$

Pri čemu treba ispuniti uslove kapaciteta

$$\sum_j w_{ij} \leq c_j, \ j=1,..,P$$

$w_{1j} + w_{2j} = r_j$, *j=1,..,P*

Konačno, imamo model:

$$\text{Min } f(a,b,c,d)$$

Pri ograničenjima

$$\sum_j w_{ij} \le c_j$$
$$w_{1j} + w_{2j} = r_j$$

PRIMER 3

Ako neka kompanija naplaćuje svoj proizvod *p* i ako dnevno troši *a* na reklamiranje tog proizvoda, očekivan broj prodatih proizvoda iznosi $10{,}000 + 5\sqrt{a} - 100p$. Ako se za proizvodnju jednog proizvoda dnevno utroši 10eur, koliku cenu kompanija treba da zada kako bi maksimizirala svoj profit?

REŠENJE

Model:

$$\max f(p) = \left(10{,}000 + 5\sqrt{a} - 100p\right)(p - 10) - a$$

pri ograničenjima

$$10{,}000 + 5\sqrt{a} - 100p > 0$$
$$p > 10$$

PRIMER 4

Pera želi da otvori prodavnicu auto delova i sklopio je ugovor sa 4 najveća servisa automobila u kome se obavezuje da će im dopremati robu u najkraćem roku. Pozicija Perine prodavnice i servisa automobila data je preko (x,y) koordinata. Na osnovu nekih iskustava, Pera zna koliko će mu delova koji servis tražiti na nedeljnom nivou pa bi na osnovu toga izabrao svoju lokaciju. Njegov cilj je da mu vozač koji transportuje te delove prelazi najmanju kilometražu.

Perina statiskika o potražnji servisa i lokacija servisa dati su u tabeli.

Servis	x-koordinata	y-koordinata	Broj nedeljnih zahteva
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

REŠENJE

Model:

$$\min f(x,y) = 200\sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2} + 150\sqrt{(x-10)^2 + 5^2}$$
$$+200\sqrt{x^2 + (y-12)^2} + 300\sqrt{(x-12)^2 + y^2}$$

pri ograničenjima

$$x \ge 0, \;\; y \ge 0$$

PRIMER 5

Jedna agencija za marketing se bavi reklamiranjem fudbalskih utakmica i koncerata. U proseku se na jednu reklamu koncerta potroši 50,000 din a na jednu reklamu fudbalske utakmice 100,000 din. U nastavku će sve jedinice biti u milionima. Ako se koncert reklamira S puta, očekuje se da će je bar $5\sqrt{S}$ muškaraca posetiti, odnosno $20\sqrt{S}$ žena. Sa druge strane, ako se prikazalo F fudbalskih reklama, tada se očekuje da će tu utakmicu pogledati bar $17\sqrt{F}$ muškaraca i bar $7\sqrt{F}$ žena. Agencija bi volela da bar 40mil muškaraca i bar 60mil žena poseti njihove događaje. Formulisati NP problem koji će minimizirati troškove reklamiranja a opet zadovoljiti minimalan broj posetilaca.

REŠENJE

$$\min f(S,F) = 50{,}000S + 100{,}000F$$
$$5\sqrt{S}+17\sqrt{F} \geq 60$$
$$20\sqrt{S}+7\sqrt{F} \geq 40$$
$$S \geq 0, F \geq 0$$

PRIMER 6

Svako jutro, tokom jutarnje saobraćajne gužve, 10,000 Beograđana želi da stigne sa Vračara na Novi Beograd. Kako bi ovo postigli, mogu da koriste GSP ili da krenu svojim autom. Ukoliko se odluče za GSP, očekivano vreme trajanja puta iznosiće 40min. Ukoliko se x Beograđana odluči za vožnju autom, put do posla će trajati $20 + 5x$ minuta. Koliko ljudi treba da se odluči za vožnju autom kako bi minimizirali dužinu vremena provedenog u vožnji?

$$\min f(x) = x(20 + 5x) + (10{,}000 - x)40$$
$$0 \leq x \leq 10{,}000$$

PRIMER 7

Posmatramo problem:

$$\min \ (x-3)^2 + (y-2)^2$$

Pri ograničenjama $\quad x^2 - y - 3 \leq 0$

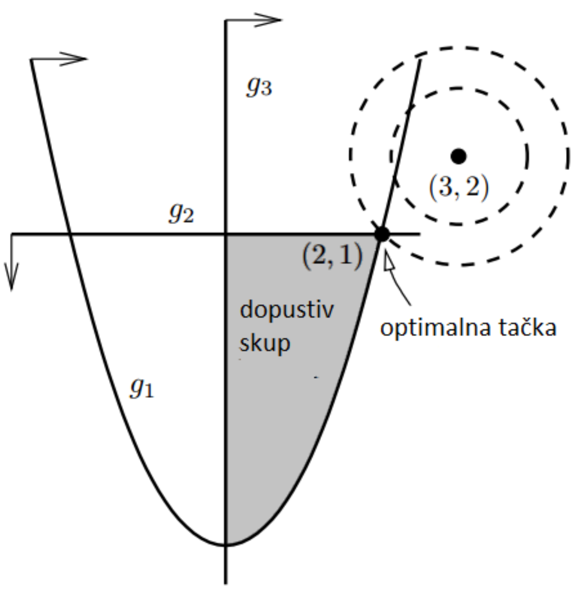
$$y - 1 \leq 0$$
$$-x \leq 0$$

Funkcija cilja i ograničenja su funkcije:

$$f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$$
$$g_1(x,y) = x^2 - y - 3$$
$$g_2(x,y) = y - 1$$
$$g_3(x,y) = -x$$

Nacrtćemo dopustiv skup.

Problem je da se odredi dopustiv region na kome izraz $(x-3)^2 + (y-2)^2$ ima najmanju vrednost. Primetimo da tačke (x,y) jednačine $(x-3)^2 + (y-2)^2 = c$ predstavljaju kružnicu poluprečnika $\sqrt{c}$ opisane oko centra $(3{,}2)$. Da bi pronašli c treba da nađemo krug najmanjeg poluprečnika koji će imati presečnu tačku sa dopustivim skupom.



Sa slike vidimo da najmanjem krugu odgovara poluprečnik $c = \sqrt{2}$ i da se presek ostvaruje u tački $(2{,}1)$. Dakle, optimalno rešenje dostižemo u tački $(2{,}1)$ i iznosi $\sqrt{2}$.

PRIMER 8

Posmatramo sledeći NP problem:

$$\min f(x,y,z) = x^2 - 2y + y^2 - z^3 + 2z$$

Pri ograničenjima $\quad x - y + 2z = 2$

REŠENJE

Koristimo metod eliminacije. Promenljiva *x* se može izraziti preko promenljivih *y* i *z* iz ograničenja, $x = y - 2z + 2$. Zamenom u funkciju cilja, dobijamo

$$\min f(y,z) = 2y^2 + 3z^3 - 4yz + 2y$$

Sada smo broj promenljivih smanjili za 1. Dalje možemo da rešimo problem grafičkom metodom. Dobijamo da je:

$y = -1{,}5,\ \ z = -1$, odnosno $(x*, y*, z*) = (2{,}5, -1{,}5, -1)^T, f(x*, y*, z*) = -1{,}5$.

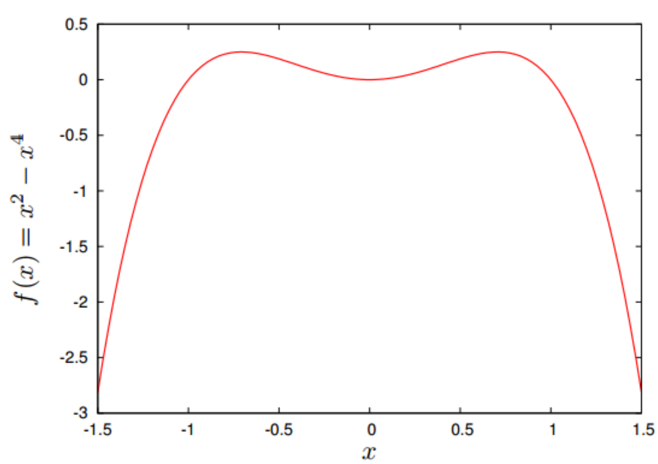
PRIMER 9

Rešiti sledeći problem:

$$\min \ \ f(x) = x^2 - x^4$$

REŠENJE

Imamo da je $\nabla f(x) = 2x - 4x^3$ a nula gradijenta se postiže za $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Zamenom u funkciju cilja, dobijamo da je $f(x_1) = 0$ najmanja vrednost funkcije. Ipak, ne možemo da tvrdimo da je to globalni minimum. Zato što ne znamo da li globalni minimum funkcije postoji.



PRIMER 10

Posmatramo sledeći problem

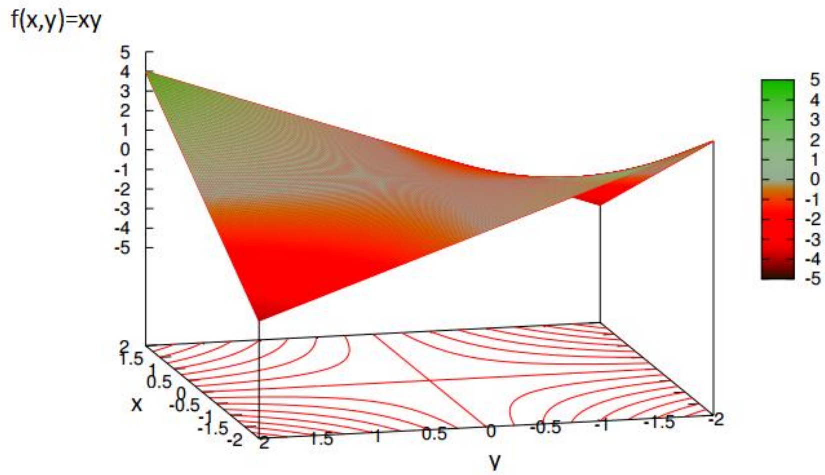
$$\min \ f(x,y) = xy$$

REŠENJE

Funkcija je definisana za celo R^2. Gradijent funkcije iznosi $\nabla f(x,y) = [y \ x]^{\mathrm{T}}$. Jedina stacionarna tačka u R^2 je $(x,y) = (0,0)$. Sada posmatramo Hesijanovu matricu funkcije cilja u tački $(x,y) = (0,0)$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ono što možemo da primetimo je da je Hesijanova matrica negativno definitna i da su joj minori različitog znaka, stoga, sledi da stacionarna tačka (0,0) nije lokalni minimum, niti je lokalni maksimum. Naša stacionarna tačka jeste sedlasta tačka.



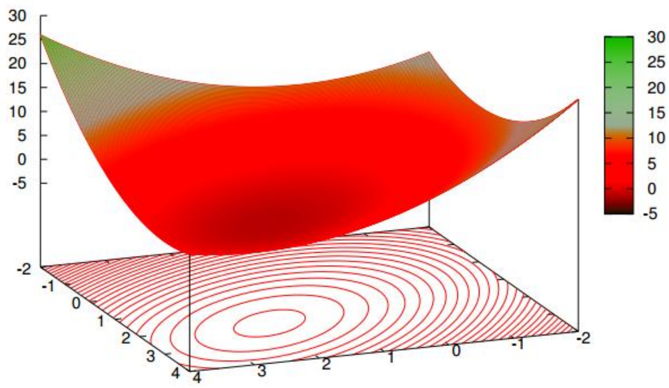
PRIMER 11

Posmatramo sledeći problem

$$\min \ f(x,y) = (x-1)^2 - xy + (y-1)^2$$

REŠENJE

Odredimo gradijent i Hesijan funkcije $\nabla f(x,y) = [2(x-1) - y \quad 2(y-1) - x]^T$
$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Stacionarna tačka je $(x,y) = (2,2)$.
Kako je Hesijan pozitivno definitan, sledi da je tačka $(2,2)$ lokalni minimum funkcije f. Medjutim, obzirom da je f konveksna funkcija, sledi da je tačka $(2,2)$ ujedno i globalni minimum (slika).



Neki primeri iz knjige Nelinearno programiranje.

Zadatak 1:

Uzećemo da je $X = (x_1, x_2)$, zapisaćemo i funkciju f u funkciji od (x_1, x_2).

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 + 7$$

a) Izvod u tački $X = (0,1)^T$ u pravcu vektora $d = (1,0)^T$ se traži po formuli:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(X + \alpha d) - f(X)}{\alpha}$$

Tražićemo rešenje u opštem obliku, a kasnije ćemo izračunati vrednost izvoda za konkretno dato X i d. Uzećemo da je $d = (d_1, d_2)$ i zamenimo $f(x_1 + \alpha d_1, x_2 + \alpha d_2)$, dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\alpha^2\left(d_1^2 + \frac{1}{2}d_2^2 + 2d_1d_2\right) + \alpha(4d_1x_1 + 4d_2x_1 + 4d_1x_2 + 2d_2x_2 + 3d_1 + 4d_2)}{\alpha} =$$
$$= 4d_1x_1 + 4d_2x_1 + 4d_1x_2 + 2d_2x_2 + 3d_1 + 4d_2$$

I za konkretne vrednosti

$$\frac{\partial f}{\partial d}((0,1)^T) = 7.$$

b) Tačke koje zadovoljavaju NUPR:

Tražimo tačku (x_1^*, x_2^*) koja za svaki vektor dopustivog prvca *d* zadovoljava $\frac{\partial f}{\partial d}(X*) \geq 0$, odnosno

$$4d_1x_1 + 4d_2x_1 + 4d_1x_2 + 2d_2x_2 + 3d_1 + 4d_2 \geq 0$$

$d_1(4x_1 + 4x_2 + 3) + d_2(4x_1 + 2x_2 + 4) \geq 0$ da bi ovo važilo za svaki pravac, uzećemo da su zagrade jednake nuli.

Time dobijamo samo jednu tačku $X* = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

c) Funkcija je definisana na čitavom R^2, stoga su sve tačke unutrašnje. Tačka koja bi mogla da bude minimalna jeste nula prvog izvoda funkcije:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 + 3 & 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{bmatrix} = 0$$

Rešavanjem sistema dobijamo $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$.

Za tačku $X* = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ važi $\nabla f(X*) = 0$ i ona zadovoljava NUPR.

Zadatak 2 za domaći !!

Zadatak 3

a) d je vektor dopustivog pravca ako $\exists \alpha_0 > 0$ tako da su sve tačke $x + \alpha d$ iz S za svako $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.
Da li je βd dopustivog pravca? $\beta > 0$
$\rightarrow \ \exists \alpha_0 \quad x + \alpha\beta d \in S \quad \forall 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$
Biramo α_0 tako da za svako $\alpha\beta$ važi $0 \leq \alpha\beta \leq \alpha_0$, stoga je $\alpha\beta$ dopustivog skupa.

b) $S = \{x \in R^n | \ Ax = b\}$, d je dopustivog pravca $x \in S$ akko $Ad = 0$
=> da je $\forall x + \alpha d \in S \ 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$

$$A(x + \alpha d) = Ax + A\alpha d = b$$

$$Ax + \alpha Ad = b$$

sledi da je $\alpha Ad = 0$

<= $Ad = 0 \quad \backslash * \alpha$

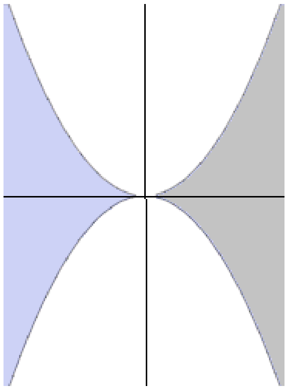
$\alpha Ad = 0 \quad \backslash + Ax$

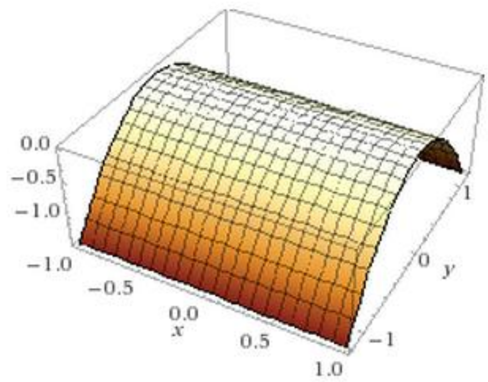
$\alpha Ad + Ax = Ax = b$

- ⇨ $\alpha Ad + Ax = b$
- ⇨ $A(x + \alpha d) = b$
- ⇨ $x + \alpha d \in S$
- ⇨ d je dopustivog pravca.

Zadatak 4

a) Dopustiv skup i funkcija su prikazani na slikama:





Tražimo minimum funkcije $f(X) = -x_2^2$ na dopustivom skupu.
Da li tačka (0,0) zadovoljava NUPR?
Gradijent funkcije:

$$\nabla f(X) = [0 \quad -2x_2]^T$$

Neka je tačka X* minimum funkcije, tada za svaki dopustiv pravac *d* važi:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X*) \geq 0$$

Neka je naš vektor dopustivog pravca $d = (d_1, d_2)^T$.

Dakle, imamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X*) = \frac{f(x_1+\alpha d_1, x_2+\alpha d_2) - f(x_1, x_2)}{\alpha} = \frac{-(x_2+\alpha d_2)^2 + x_2^2}{\alpha} = -2x_2 d_2 \geq 0,$$

x_1 proizvoljno.

Da li je tačka A(0,0) zadovoljava NUPR?

Da bi vektor bio dopustivog pravca, mora da važi $d_1 \geq 0$. Dalje, postoji α_0 takvo da za svako α, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ važi $|d_2| \leq (\alpha d_1)^2$. Zamenom u gornji izraz, dobijamo da je $\frac{\partial f}{\partial d}((0,0)) = 0$ I da zadovoljava NUPR za svaki dopustiv pravac *d.* Zadovoljava.

b) tačka je lokalni maksimum, važi $F(X^*) \leq 0$.

Obzirom da je (0,0) na granici, proveravamo sledeće

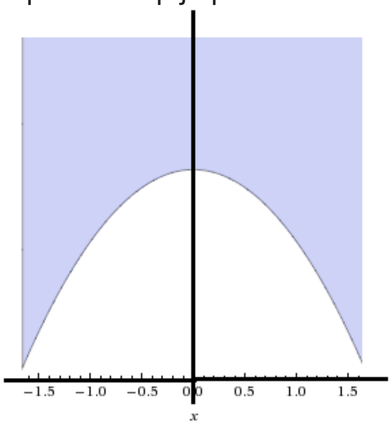
Neka je $N_\epsilon = \{x |\, d(x,(0,0)) < \epsilon\}$

Neka je npr $x = (\alpha, \beta)$ takvo da važi da je $\alpha^2 + \beta^2 < \epsilon^2$. Iz početnih uslova imamo da je $|\beta| \leq \alpha^2$, tj. $f(x) = -\beta^2 < f(0,0)$ pa je dobijena tačka (0,0) LOKALNI MAKSIMUM.

Zadatak 5

a) $\nabla f(X) = [0 \quad 5]^T$

Dopustiv skup je prikazan na slici



Neka je tačka X* minimum funkcije, tada za svaki dopustiv pravac *d* važi:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X*) \geq 0$$

Neka je naš vektor dopustivog pravca $d = (d_1, d_2)^T$. Dalje, imamo da je

$5d_2 \geq 0$, d_1 proizvoljno.

a) Da li tačka A(0,1) zadovoljava NUPR?

Vektor d je dopustivog pravca, dakle α_0 tako da važi

$$\begin{pmatrix} 0 + \alpha d_1 \\ 1 + \alpha d_2 \end{pmatrix} \in S \quad => \quad (\alpha d_1)^2 + (1 + \alpha d_2) \geq 1$$

....

$$\alpha d_1^2 + d_2 \geq 0$$

⇨ $d_2 \geq -\alpha d_1^2$, d_1 proizvoljno, $\forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$

NUPR uslov je zadovoljen za tačku A ukoliko važi $d^T f(X^*) \geq 0$: $[d_1 \quad d_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 5d_2 \geq 0$.

b) Da li tačka A zadovoljava NUDR?

Kako za tačku A važi $d^T \nabla f(X^*) = 0$ ako je $d_2 = 0$.

Da bi tačka A zadovoljavala NUDR treba da važi $d^T F(X^*) d \geq 0$ gde je F Hesijan funkcije f.

Odredimo matricu F:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d^T F(X^*) d = 0$

Matrica H je nedefinitna. …

Zadatak 6

a) Hesijan i gradijent:

$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1 + 6x_2 + 3 \quad 6x_1 + 14x_2 + 5]$, $\quad \nabla f(1,1) = [11 \quad 25]$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

b) Izvod tražimo po formuli

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(X + \alpha d) - f(X)}{\alpha}$$

$$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^2 (d_1^2 + d_2^2 + 6d_1 d_2) + \alpha(2d_1 x_1 + 6d_2 x_1 + 6d_1 x_2 + 14d_2 x_2 + 3d_1 + 5d_2)}{\alpha} =$$

$$= 2d_1 x_1 + 6d_2 x_1 + 6d_1 x_2 + 14d_2 x_2 + 3d_1 + 5d_2$$

$\frac{\partial f}{\partial d}((1,1)) = 11d_1 + 25d_2$, $\|d\| = 1$ => $d_1^2 + d_2^2 = 1$ … $11d_1 + 25d_2 \geq 0$

$$d = (\frac{25}{\sqrt{746}}, -\frac{11}{\sqrt{746}})$$

c) Odrediti tačku X koja zadovoljava NUPR za f.

$\frac{\partial f}{\partial d}(X) \geq 0 \ \leftrightarrow \ (2x_1 + 6x_2 + 3)d_1 + (6x_1 + 14x_2 + 5)d_2 \geq 0$

za svaki vektor proizvoljnog pravca.

Funkcija je definisana na celom $R \times R$ pa su svi vektori dopustivog pravca.

Sledi da mora da važi

$2x_1 + 6x_2 + 3 = 0$ i

$6x_1 + 14x_2 + 5 = 0$

čime dobijamo tačku $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -1$.

Da li ista tačka zadovoljava NUDR?

Posmatramo neophodne uslove drugog reda

$$\nabla f\left(-9, \frac{5}{2}\right) = [0 \quad 0]$$

$$d^T F(X^*) d = [d_1 \quad d_2] \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2{d_1}^2 + 14{d_2}^2 + 12d_1 d_2$$

$$= 2({d_1}^2 + 7{d_2}^2 + 6d_1 d_2)$$

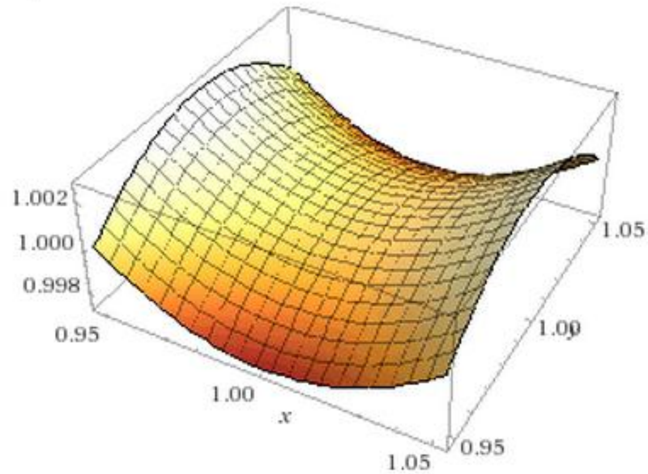
$$= 2\left((d_1 + 3d_2)^2 - {d_2}^2\right)$$

$$= 2(d_1 + 4d_2)(d_1 + 2d_2) \geq 0$$

Kako je funkcija definisana na R svi vektori su dopustivog pravca, a kako je poslednji izraz zadovoljen samo za dopustive vektore za koje važi $d_1 \geq -2d_2$ odnosno za $d_1 \leq -2d_2$ sledi da tačka X ne zadovoljava i NUDR.

Zadatak 7

Funkcija je sledećeg oblika:



a) Tražimo tačke koje zadovoljavaju NUPR za lokalni minimum funkcije *f*:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 4(x_1 - x_2)^3 + 2x_1 - 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -4(x_1 - x_2)^3 - 2x_2 + 2$$

$$(4(x_1 - x_2)^3 + 2x_1 - 2)d_1 + (-4(x_1 - x_2)^3 - 2x_2)d_2 \geq 0$$

$A = (1,0) \quad 4d_1 - 2d_2 \geq 0 \quad d_1 \geq \frac{1}{2}d_2$

$B = (0,1) \quad -6d_1 + 4d_2 \geq 0 \quad d_1 \leq \frac{2}{3}d_2$

$C = (0,0) \quad -2d_1 + 2d_2 \geq 0 \quad d_1 \leq d_2$

b) Da li tačke pod a) zadovoljavaju NUDR za lokalni minimum

$$\frac{\partial^2 y}{\partial {x_1}^2} = 12(x_1 - x_2)^2 + 2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial {x_1}^2} = -12(x_1 - x_2)^2 - 2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = -12(x_1 - x_2)^2$$

$$H = \begin{bmatrix} 12(x_1 - x_2)^2 + 2 & -12(x_1 - x_2)^2 \\ -12(x_1 - x_2)^2 & -12(x_1 - x_2)^2 - 2 \end{bmatrix} =..= -4$$

Hajde da proverimo uslove za DUDR:

$(d_1 \quad d_2)\begin{pmatrix} -4d_1 \\ -4d_2 \end{pmatrix} = -4{d_1}^2 - 4{d_2}^2 \leq 0$ dakle, ne zadovoljavaju.

Zadatak 8

Pretpostavimo da je tačka O(0,0) minimum, to znači da $\forall d$ važi $d^T \nabla f \geq 0$.
Hajde da proverimo:

$$(d_1 \quad d_2)\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \cdots = 0$$ ovo je moguće samo kada su d_1 i d_2 različitog znaka .

Kako $O \in int(S)$ svaki vektor treba da je dopustivog pravca. Dolazimo do kontradikcije!

Bezuslovna optimizacija

Neki primeri iz knjige Nelinearno programiranje.

Zadatak 1:

Stacionarne tačke:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 14x - 15 = 0 \ldots x_{1/2} = \frac{-14 \pm \sqrt{736}}{18}, x_1 = 0.7294, \quad x_2 = -2.2830$$

Drugi izvod

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x + 14,$$ proveravamo da li su stacionarne tačke minimum ili maksimum:

$\nabla^2 f(x_1) = 27.1292 \geq 0$ lokalni minimum

$\nabla^2 f(x_2) = -27.094 \leq 0$ lokalni maksimum

Zadatak 2:

Stacionarne tačke

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2cx_1 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1 - 2 = 0 \qquad \nabla f(x*) = 0 \iff c = \frac{(1+x_1)}{x_1}, x_1 \neq 0$$

Ako je $x_1 \neq 0$ => stacionarna tačka je $(x_1, 1 + x_1)$

Ako je $x_1 = 0$ => ne postoji stacionarna tačka

Proveravamo prirodu stacionarne tačke:

$$\nabla^2 f(x*) = \begin{pmatrix} 2c & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$ ako je $c = 0$ sledi da je $\nabla^2 f(x*) < 0$

ako je $c > 0$ sledi da je $\nabla^2 f(x*) = 4c - 4$

razlikujemo

$c = 1$ => $\nabla^2 f(x*) = 0$ ni minimum, ni maksimum

$c > 1$ => $\nabla^2 f(x*) \geq 0$ lokalni minimum

$c < 1$ => $\nabla^2 f(x*) < 0$ lokalni maksimum

Zadatak 3:

AKo je $A(1,0)$ lokalni minimum, onda sledi da je $\nabla f(A) = 0$

Izračunajmo gradijent funkcije:

$$\nabla f(x*) = \begin{pmatrix} \alpha^3 e^{x_2} + \frac{2\alpha^2}{x_1 + x_2} - (\alpha + 2) + 16x_2 \\ \alpha^3 x_1 e^{x_2} + \frac{2\alpha^2}{x_1 + x_2} + 8\alpha + 16x_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(A) = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

Proveravamo prirodu stacionarne tačke:

$$\nabla^2 f(A)=\begin{pmatrix} -\frac{2\alpha^2}{(x_1+x_2)^2} & \alpha^3 e^{x_2}-\frac{2\alpha^2}{(x_1+x_2)^2}+16 \\ \alpha^3 e^{x_2}-\frac{2\alpha^2}{(x_1+x_2)^2}+16 & \alpha^3 x_1 e^{x_2}-\frac{2\alpha^2}{(x_1+x_2)^2} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{(x_1+x_2)^2} & -8e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}+16 \\ -8e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}+16 & -8x_1 e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2} \end{pmatrix}=$$

$$-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}\left(-8x_1 e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}\right)-\left(-8e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}+16\right)\left(-8e^{x_2}-\frac{8}{(x_1+x_2)^2}+16\right)=\cdots$$

$$=-256\leq 0$$

Dakle, tačka A je lokalni minimum.

Zadatak 4:

a) Da li $O(0,0)$ zadovoljava NUPR i NUDR

$$\nabla f(x*)=\begin{pmatrix} 8x_1^3-16x_1x_2 \\ -3x_1^2+2x_2 \end{pmatrix}=0 \;\leq>$$

$$3x_1^2=2x_{2,},\dots,x_1*=0 \;=> x_2*=0$$

NUPR zadovoljen

Ako je x* lokalni minimum, tada je $\nabla f(x*)=0$ i $\nabla^2 f$ je pozitivno semidefinitna

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 24x_1-16x_2 & -16x_1 \\ -6x_1 & 2 \end{bmatrix}=12(x_1^2-x_2)$$

Ako zamenimo tačku O, dobijamo sledeće

$\nabla^2 f(O)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda(2-\lambda)\geq 0$ ako je $\lambda_1\geq 0, tj. \lambda_2\geq 2$, pa matrica nije pozitivno semidefinitna, tačka O ne zadovoljava NUDR.

b) Da li je tačka O lokalni minimum funkcije duž svake prave koja prolazi kroz koodrinatni početak?

Neka je $d=(d_1,md_1)$ vektor traženog pravca, tada važi

$[d_1 \quad md_1]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ md_1 \end{bmatrix}=2m^2\, d_1^2\geq 0$ O je lokalni minimum

c) na predavanjima.

Zadatak 5:

Tražimo stacionarne tačke:

$\nabla f(x)=\begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-3) \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=4\geq 0$ matrica je pozitivno semidefinitna

$\nabla f(x*)=0 \quad => x_1^*=2, x_2^*=3$ ova tačka je lokalni minimum.

Zadatak 6:

Na času, isto se radi kao zadatak 5 !!!!

Zadatak 7:

a) NUPR za zadatu funkciju:

Ako je x^* loklani minimum, tada je $\nabla f(x^*) = 0$

Odnosno, $\nabla f(x^*) = Qx^* - c = 0$ tj. stacionarna tačka postoji ako je Q pozitivno definitna, pa se jednačina $Qx^* - c = 0$ može jedinstveno rešiti, tj. $x^* = Q^{-1}b$

b) Lokalni minimum:

$\nabla^2 f(x^*) = Q$

Akoje Q pozitivno semidefinitna, postoji loklani minimum

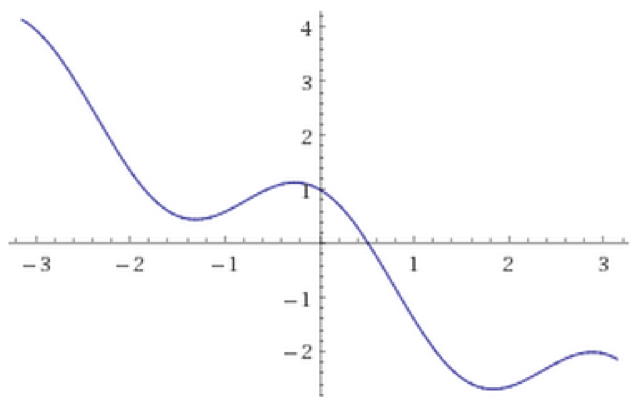
c) za vežbu, sami

Zadatak 8, 9,10: za domaći

Zadatak 11:

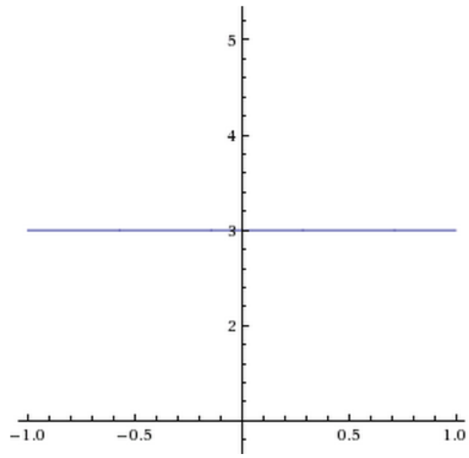
a) f ima tačku lokalnog minimuma ali ne I globalnog minimuma

primer: funkcija $f(x) = cos(2x) - x$



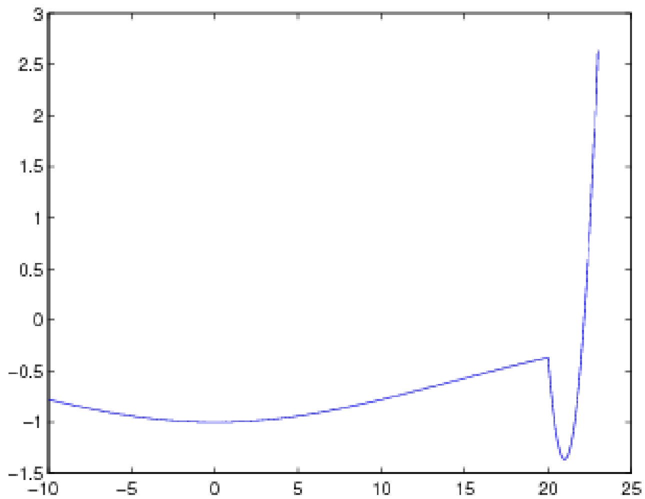
b) f nema ni loklani ni globalni minimum

primer: funkcija $f(x) = c, c = const$



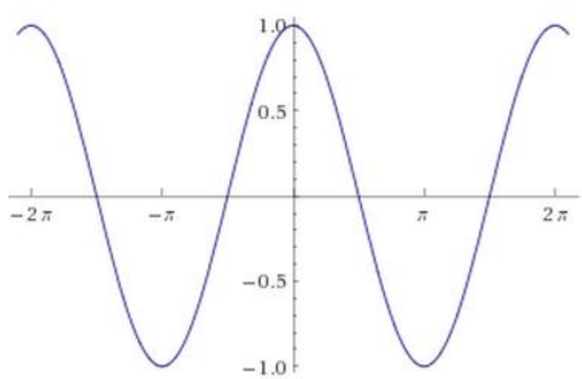
c) f ima I lokalni I globalni minimum

primer: funkcija $f(x) = \begin{cases} -e^{-\left(\frac{x}{20}\right)^2}, & x \leq 20 \\ -e^{-1} + (x-20)(x-22), & x > 20 \end{cases}$



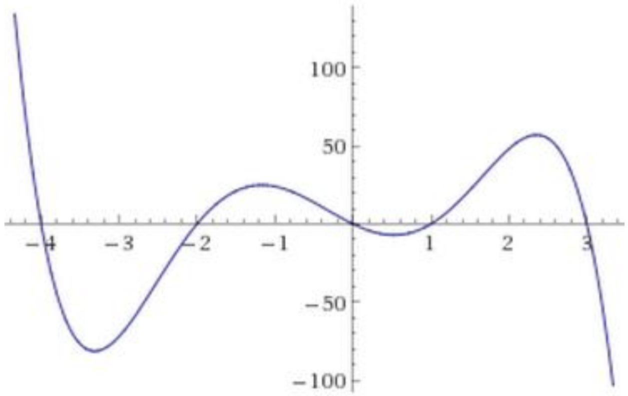
d) f ima više tačaka globalnog mimimuma

primer: funkcija $f(x) = cos(x)$

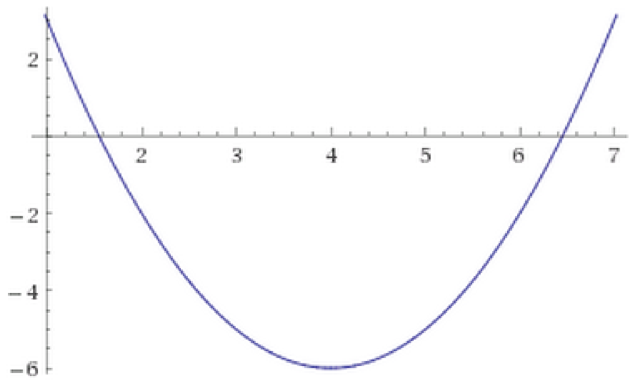


Još neke funkcije, diskutovati na času:

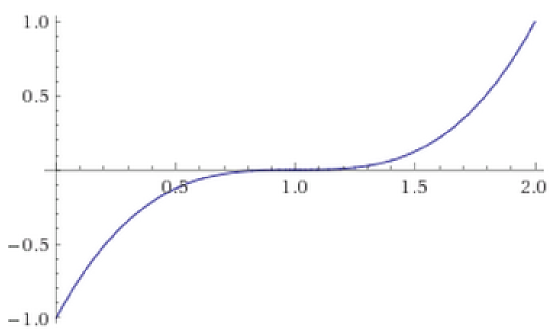
1. $f(x) = -x(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)$ (ima lokalne minimume I lokalne maximume samo)



2. $f(x) = x^2 - 8x + 10$
   (lokalni i globalni minimum)



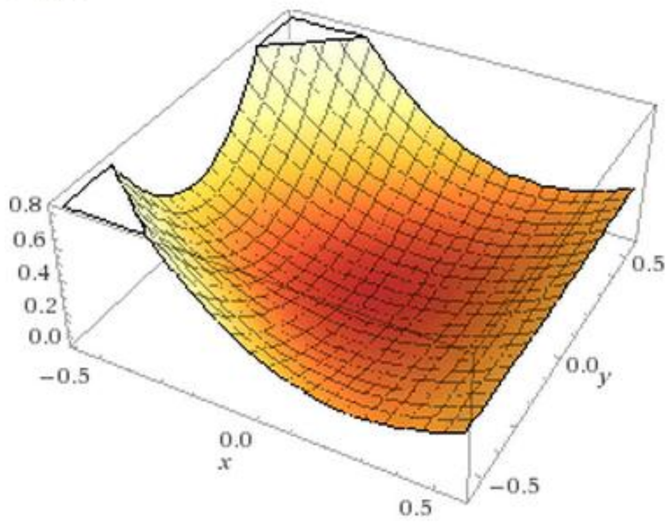
3. $f(x) = (x-1)^3$
   funkcija ima globalni i minimum i maksimum, ali nema lokalne extreme.



Zadatak 12:

a)

b) $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)^3$ lokalni minimum u tački (0,0) ali ne i globalni!



4. ČAS

Gradijentne metode

Neki primeri iz knjige Nelinearno programiranje.

Zadatak 1:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)$$

$$f(x^{k+1}) = f(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k))$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2) + q_{12}x_1x_2 - b_1x_1 - b_2x_2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 - b_1 \\ q_{12}x_1 + q_{22}x_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1 \\ -q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left(q_{11}\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right)^2 + q_{22}\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right)^2 \right) \\ & + q_{12}\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right)\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right) \\ & - b_1\left((1 - \alpha_k q_{11}) \quad x_1^{(k)} - q_{12}x_2^{(k)} + \alpha_k b_1\right) - b_2\left(-q_{12}x_1^{(k)} + (1 - \alpha_k q_{22})x_2^{(k)} + \alpha_k b_2\right) \Bigg\} \end{aligned}$$

tražimo minimum funkcije $g(\alpha)$ tako što računamo izvod funkcije po α:

$$g'(\alpha) = 0$$

Odavde dobijamo da je

$$\begin{aligned} g(\alpha_k) = {} & \frac{1}{2} q_{11}\, {x_1^{(k)}}^2 - \alpha_k q_{11}^2 {x_1^{(k)}}^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 q_{11}^3 {x_1^{(k)}}^2 + \frac{1}{2} q_{11} q_{12}^2 {x_2^{(k)}}^2 + \frac{1}{2} q_{11}\alpha_k^2 b_1^2 - q_{11}q_{12}x_1^{(k)}x_2^{(k)} + \alpha_k q_{11}^2 q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} \\ & + \alpha_k b_1 q_{11} x_1^{(k)} - \alpha_k^2 b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} - \alpha_k b_1 q_{11} q_{12} x_2^{(k)} + \\ & + \frac{1}{2} q_{22} {x_2^{(k)}}^2 - \alpha_k q_{22}^2 {x_2^{(k)}}^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 q_{22}^3 {x_2^{(k)}}^2 + \frac{1}{2} q_{22} q_{12}^2 {x_1^{(k)}}^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 b_2^2 q_{22} - q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + \alpha_k q_{12} q_{22}^2 x_1^{(k)} x_2^{(k)} \\ & - \alpha_k b_2 q_{12} q_{22} x_1^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{22} x_2^{(k)} - \alpha_k^2 b_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)} \\ & - q_{12}^2 {x_1^{(k)}}^2 - {q_{12}}^2 {x_2^{(k)}}^2 + \alpha_k q_{11} q_{12}^2 {x_1^{(k)}}^2 + \alpha_k q_{12}^2 q_{22} {x_2^{(k)}}^2 + q_{12}^3 x_1^{(k)} x_2^{(k)} - \alpha_k b_1 {q_{12}}^2 x_1^{(k)} - \alpha_k b_2 {q_{12}}^2 x_2^{(k)} + \\ & q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - \alpha_k q_{11} q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - \alpha_k q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + \alpha_k b_1 q_{12} x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{12} x_1^{(k)} + \alpha_k^2 q_{11} q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} \\ & - \alpha_k^2 b_1 q_{12} q_{22} x_2^{(k)} - \alpha_k^2 b_2 q_{11} q_{12} x_1^{(k)} + {\alpha_k}^2 b_1 b_2 q_{12} - b_1 x_1^{(k)} + \alpha_k b_1 q_{11} x_1^{(k)} + b_1 q_{12} x_2^{(k)} \\ & - \alpha_k b_1^2 + b_2 q_{12} x_1^{(k)} - b_2 x_2^{(k)} + \alpha_k b_2 q_{22} x_2^{(k)} - \alpha_k b_2^2 \end{aligned}$$

$$g'(\alpha_k) = -q_{11}^2 {x_1^{(k)}}^2 + \alpha_k\, q_{11}^3 {x_1^{(k)}}^2 + q_{11}\alpha_k\, b_1^2 + q_{11}^2 q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + b_1 q_{11} x_1^{(k)} - 2a_k\, b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} - b_1 q_{11} q_{12} x_2^{(k)} +$$

$$-q_{22}^2\, {x_2^{(k)}}^2 + \alpha_k\, q_{22}^3 {x_2^{(k)}}^2 + \alpha_k\, b_2^2 q_{22} + q_{12} q_{22}^2 x_1^{(k)} x_2^{(k)} - b_2 q_{12} q_{22} x_1^{(k)} + b_2 q_{22} x_2^{(k)} - 2\alpha_k b_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)}$$
$$+q_{11} q_{12}^2 {x_1^{(k)}}^2 + q_{12}^2 q_{22} {x_2^{(k)}}^2 - b_1 {q_{12}}^2 x_1^{(k)} - b_2 {q_{12}}^2 x_2^{(k)} - q_{11} q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + b_1 q_{12} x_2^{(k)}$$
$$+ b_2 q_{12} x_1^{(k)} + 2\alpha_k\, q_{11} q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - 2\alpha_k\, b_1 q_{12} q_{22} x_2^{(k)} - 2\alpha_k\, b_2 q_{11} q_{12} x_1^{(k)} + 2\alpha_k\ \ b_1 b_2 q_{12}$$
$$+ b_1 q_{11} x_1^{(k)} - b_1^2 + b_2 q_{22} x_2^{(k)} - b_2^2 = 0$$

$$\alpha_k (q_{11}^3 {x_1^{(k)}}^2 + q_{11} b_1^2 - 2 b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} + q_{22}^3 {x_2^{(k)}}^2 + b_2^2 q_{22} - 2 b_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)} + 2 q_{11} q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - 2 b_1 q_{12} q_{22} x_2^{(k)}$$
$$- 2 b_2 q_{11} q_{12} x_1^{(k)} + 2 b_1 b_2 q_{12})$$
$$-q_{11}^2 {x_1^{(k)}}^2 - q_{22}^2\, {x_2^{(k)}}^2 + q_{11}^2 q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + q_{12} q_{22}^2 x_1^{(k)} x_2^{(k)} + b_1 q_{11} x_1^{(k)} + b_2 q_{22} x_2^{(k)} - b_1 q_{11} q_{12} x_2^{(k)} - b_2 q_{12} q_{22} x_1^{(k)} +$$
$$+q_{11} q_{12}^2 {x_1^{(k)}}^2 + q_{12}^2 q_{22} {x_2^{(k)}}^2 - b_1 {q_{12}}^2 x_1^{(k)} - b_2 {q_{12}}^2 x_2^{(k)} - q_{11} q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - q_{12} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} + b_1 q_{12} x_2^{(k)}$$
$$+ b_2 q_{12} x_1^{(k)} + b_1 q_{11} x_1^{(k)} + b_2 q_{22} x_2^{(k)} - b_1^2 - b_2^2 = 0$$

Konačno,

$$\alpha_k = \frac{\left(q_{11}^2 {x_1^{(k)}}^2 + q_{22}^2\, {x_2^{(k)}}^2 \right) - \left(q_{11}^2 - q_{11} + q_{22}^2 - q_{22} \right) q_{12} x_1^{(k)} x_2^{(k)} \ldots}{q_{11}^3 {x_1^{(k)}}^2 + q_{22}^3 {x_2^{(k)}}^2 + q_{11} b_1^2 + q_{22} b_2^2 - 2(b_1 {q_{11}}^2 x_1^{(k)} + b_2 {q_{22}}^2 x_2^{(k)}) + \cdots}$$
$$+ \frac{\ldots - (2 b_1 q_{11} - b_2 q_{12} q_{22} - b_1 {q_{12}}^2 + b_2 q_{12})\, x_1^{(k)} - \left(2 b_2 q_{22} - b_1 q_{11} q_{12} - b_2 {q_{12}}^2 + b_1 q_{12} \right) x_2^{(k)} + (b_1^2 + b_2^2)}{\ldots + 2 q_{12} (b_1 b_2 + q_{11} q_{22} x_1^{(k)} x_2^{(k)} - b_2 q_{11} x_1^{(k)} - b_1 q_{22} x_2^{(k)})}$$

Analogno bi se rešavao slučaj za $n = 3$ samo što bi račun bio znatno obimniji.

Zadatak 2

a) Provera zadatka 1:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = 0$$

Dobijamo da je $\alpha_k = \frac{4x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)}}{8x_1^{(k)} + 8x_2^{(k)}} = .. = \frac{1}{2}$

Odnosno $\alpha_k = \frac{1}{2}$.

b) Provera zadatka 1:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = 0$$

Dobijamo da je $\alpha_k = \frac{\frac{4}{25} x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)}}{\frac{8}{125} x_1^{(k)} + 8x_2^{(k)}} = .. = \frac{5}{2} \frac{x_1^{(k)} + 25 x_2^{(k)}}{x_1^{(k)} + 125 x_2^{(k)}}$

Zadatak 3

$f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_1 \quad, X^0 = (2,2)$

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 - 3 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

k=0

$\nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} \quad X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 21\alpha_0 \\ 2 - 16\alpha_0 \end{pmatrix}$

$$f(X^1) = 4(2 - 21\alpha_0)^2 + 2(2 - 16\alpha_0)^2 + 4(2 - 21\alpha_0)(2 - 16\alpha_0) - 3(2 - 21\alpha_0) =..$$
$$= 3620\alpha_0^2 - 760\alpha_0 + 40$$

$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)\right) = \min_{\alpha \geq 0} 3620\alpha_0^2 - 760\alpha_0 + 40$

$g'(\alpha) = 7240\alpha_0 - 760 = 0 \quad \dots . \alpha_0 = 0.1050$

$X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.1050 \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2050 \\ 0.3200 \end{pmatrix}$

$\nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_2 - 3 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.36 \\ 0.46 \end{pmatrix}$

$X^2 = \begin{pmatrix} -0.205 - \alpha 3.36 \\ 0.32 - \alpha 0.46 \end{pmatrix},$

$g'(\alpha) = -49249 \frac{\alpha}{625} - \frac{28753}{2500} = 0 \quad \dots \quad \alpha_1 = 0.1460$

$X^3 = \begin{pmatrix} 0.0937 \\ 0.25286 \end{pmatrix}, .., X^4 = \begin{pmatrix} 1.4022 \\ -0.3083 \end{pmatrix}, \dots$ programirati na času!!!!

Zadatak 4

$f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \gamma x_2^2 + \gamma^2 x_3^2) - x_1 - x_2 - x_3$

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ \gamma x_2 - 1 \\ \gamma^2 x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Problem se rešava isto kao i 3.zadatak.

Napisati novi program (ili proširiti program iz 3.zadaka) i posmatrati rešenja za različite parametre γ.

Zadatak 5, 8, 9

Raspisati formulu na času.

Zadatak 6, 7, 10. – za domaći !!!

Zadatak 12

Metodom najbržeg spusta rešiti problem minimizacije:

$f: R^2 \to R$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

a) $X^{(0)} = (2,1)$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} - \alpha_k \begin{pmatrix} 2x_1^{(k)} \\ 4x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} - 2\alpha_k x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} - 4\alpha_k x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(1 - 2\alpha_k) \\ x_2^{(k)}(1 - 4\alpha_k) \end{pmatrix}$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = {x_1^{(k)}}^2 (1 - 2\alpha_k)^2 + 2x_2^{(k)}(1 - 4\alpha_k)^2$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha \geq 0} {x_1^{(k)}}^2 (1 - 2\alpha)^2 + 2x_2^{(k)}(1 - 4\alpha)^2 = \cdots$$

$$= \min_{\alpha \geq 0} 4(1 - 2\alpha)^2 + 2 * 1(1 - 4\alpha)^2 =$$

$$= \min_{\alpha \geq 0} 6 - 32\alpha + 40\,\alpha^2$$

$$g'(\alpha) = 48\alpha - 24 = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ 1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_1) = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{9}\left(4(1 - 2\alpha)^2 + 2 * 1(1 - 4\alpha)^2\right) = \cdots \to \alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ -1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_2) = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{81}\left(4(1 - 2\alpha)^2 + 2 * 1(1 - 4\alpha)^2\right) = \cdots \to \alpha_2 = \frac{1}{3}$$

$$X^{(3)} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 2\left(1 - 2\frac{1}{3}\right) \\ 1\left(1 - 4\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\to X^{(k)} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

b) $\alpha_k = -\frac{1}{3}$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^{(k)}}{3} \\ \frac{-x_2^{(k)}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ -x_2^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = {x_1^{(k)}}^2 \frac{1}{9} + 2x_2^{(k)}\frac{1}{9} = \frac{1}{9}\left(x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right) = \frac{f\left(X^{(k)}\right)}{9}$$

c) α_k je konstantna za početno $X^{(0)} = (2,1)$

Očekivana brzina konvergencije je

$$\left|f\left(X^{(k)}\right)-f(X^*)\right| = ?$$

$$X^* = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}2\\(-1)^{(k)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|f\left(X^{(k)}\right)-f(X^*)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9}f\left(X^{(k-1)}\right)-0\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9}f\left(X^{(k-1)}\right)\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{9^k}f\left(X^{(0)}\right)\right| \lim_{k\to\infty}\frac{1}{9^k}|2^2-2*1^2| = 0$$

Red konvergencije:

$$\|x^{k+1}-x^*\| = O(\|x^k-x^*\|^p)$$

$$\|x^{k+1}-x^*\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\(-1)^k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\(-1)^k\end{pmatrix}\right\|$$

$\frac{|x^{(k+1)}|}{|x^{(k)}|^2} = \ldots = 3^{k-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = +\infty$ dakle, red divergira!

Zadatak 13

Metodom najbržeg spusta rešiti problem minimizacije:

$f: R^2 \to R$

$$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$$

$X \;= [x_1,x_2]^T$

a) $X^{(0)} = (1,4)^T$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\end{pmatrix} - \alpha_k\nabla f\left(x^{(k)}\right) = \begin{pmatrix}x_1^{(k)}-8\alpha_k x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}-2\alpha_k x_2^{(k)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{(k)}(1-8\alpha_k)\\x_2^{(k)}(1-2\alpha_k)\end{pmatrix}$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = 4x_1^{(k)^2}(1-8\alpha_k)^2 + x_2^{(k)}(1-2\alpha_k)^2$$

$$g(\alpha) = \min_{\alpha\geq 0} x_1^{(k)^2}4(1-8\alpha)^2 + x_2^{(k)}(1-2\alpha)^2 = \cdots$$

$$= \min_{\alpha\geq 0} 4(1-8\alpha)^2 + 16(1-2\alpha)^2 =$$

$$= \min_{\alpha\geq 0} 6 - 32\alpha + 40\,\alpha^2$$

$$g'(\alpha) = 640\alpha - 128 = 0$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix}\left(1-\frac{8}{5}\right)\\4\left(1-\frac{2}{5}\right)\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_1) = \min_{\alpha\geq 0}\frac{1}{25}(4(1-8\alpha)^2 * 9 + (1-2\alpha)^2 * 144) = \cdots \to \alpha_1 = \frac{1}{5}$$

$$X^{(2)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\left(1-8\frac{1}{5}\right)\\12\left(1-2\frac{1}{5}\right)\end{pmatrix} = \cdots = \left(\frac{3}{5}\right)^2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_2) = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{81}(4(1-2\alpha)^2 + 2 * 1(1-4\alpha)^2) = \cdots \to \alpha_2 = \frac{1}{3}$$

$$\ldots . \to \ \alpha_k = \frac{1}{5} \quad \to \quad X^{(k)} = \left(\frac{3}{5}\right)^k \begin{pmatrix} (-1)^k \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $X^* = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k \begin{pmatrix} (-1)^k \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Očekivana brzina konvergencije je

$$\{f\left(X^{(k)}\right) - f(X^*)\} = \cdots = \{f\left(X^{(k)}\right)\}?$$

$$Q = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 \ldots \quad \lambda_{min} = 1, \lambda_{max} = 4$$

$$G\left(X^{(k+1)}\right) \leq \frac{4-1}{4} G\left(X^{(k)}\right) = \frac{3}{4} G\left(X^{(k)}\right)$$

$r = 3/4$ radijus konvergencije.

Zadatak 14

Data je funkcija $f: R^2 \to R$ definisana sa

$$f(X) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4x_1x_2 + 5x_1 + 6x_2 + 7, X = [x_1, x_2]^T$$

Neka je niz $\{X^{(k)}\}$ dobijen metodom konstantnog spusta pri minimizaciji funkcije f oblika

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)})$$

Odrediti najveću vrednost α za koju je metoda globalno konvergentna.

Rešenje

Za proizvoljno izabranu početnu tačku $X^{(0)}$ algoritam generiše niz tačaka koji konvergira ka tački koja zadovoljava NUPR! $\nabla f(X^*) = 0$.

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Niz $\{X^{(k)}\}$ konstruisan metodom sa konstantnim α konvergira ka X^* za svako početno $X^{(0)}$ akko

$$0 < \alpha < \frac{2}{\alpha \cdot \max(Q)}$$

Dakle,

$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)^2 - 4 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \lambda = 4, \quad \lambda = 8$$

Obzirom da tražimo λ_{max} sledi da je $\lambda = 8$, odnosno $0 < \alpha < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Zadatak 15

Data je funkcija $f: R^2 \rightarrow R$ definisana sa

$$f(X) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 + a)x_1x_2 - x_1 - x_2 + b, X = [x_1, x_2]^T$$

gde su a i b parametri.

a) zapisati funkciju f u obliku kvadratne forme.
b) odrediti najveće vrednosti parametra a i b za koje postoji jednistvena tačka globalnog minimuma posmatrane funkcije f.
c) naći tačku globalnog minimuma X^* u funkciji od a i b.

Rešenje

a)

$$f(X) = \frac{1}{2}X^T \begin{bmatrix} 3 & 1+a \\ 1+a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T X + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Analogno prethodnom zadatku, globalni minimum se dobija za

$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1+a \\ 1+a & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - (1+a)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 - a$$

$$\lambda_2 = 4 + a$$

Dakle, za $a \in (-\infty, -1)$ sledi da je $\lambda_{max} = \lambda_1$,

$$0 < \alpha < \frac{2}{2-a} \quad \rightarrow \quad a_{max} = -1$$

za $a \in (-1, +\infty)$ $\lambda_{max} = \lambda_2$

$$0 < \alpha < \frac{2}{4+a}$$

Odnosno, za $a = -1$ segment za α je najveći ($\alpha \in (0, \frac{2}{3})$).

c) za domaći.

Zadatak 16

Data je funkcija $f: R^2 \rightarrow R$ definisana sa

$$f(X) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1 + a)x_1x_2 - x_1 - x_2 + b, X = [x_1, x_2]^T$$

gde su a i b parametri.

Neka je niz $\{X^{(k)}\}$ dobijen gradijentnom metodom sa konstantnim korakom $\alpha = 2/5$. Odrediti najveće vrednosti parametara tako da algoritam konvergira ka jedinstvenom globalnom minimumu funkcije f za proizvoljni izbor početne tačke.

Rešenje

$$\det(Q - \lambda E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1+a \\ 1+a & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - (1+a)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 - a$$

$$\lambda_2 = 4 + a$$

Kako je $\alpha = 2/5$ sledi

$$\lambda_{max} = \begin{cases} 4+a & a > 0 \\ 4+a & -1 \le a \le 0 \\ 2-a & a < -1 \end{cases} \rightarrow \quad 0 < \alpha < A = \begin{cases} \frac{2}{4+a} & -1 \le a \\ \frac{2}{2-a} & a < -1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{4+a}, a \ge -1$$

$$4 + a > 5$$

$$a > 1$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{2-a}, a < -1$$

$$2 - a < 5, a < -1$$

$$a > -3, a < -1 \quad \rightarrow a \in (-3, -1)$$

Zadatak 17

Posmatramo problem minimizacije $f: R \rightarrow R$ definisana sa $f(X) = \frac{1}{2}(X-c)^2$ gde je c realni parametar. Primenimo gradijentnu metodu kojom se konstruiše iterativni niz $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k f'(X^{(k)})$ gde je f' izvod funkcije f, a α_k korak koji zadovoljava uslov $0 < \alpha_k < 1$.

a) Napisati formulu koja povezuje $f\left(X^{(k+a)}\right)$, $f\left(X^{(k)}\right)$ i α_k.

b) dokazati da je algoritam globalno konveregentan za porizviljan izbor početnog vektora akko $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$.

Rešenje

a)

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k f'\left(X^{(k)}\right)$$

$$\nabla f(X) = X - c$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k\left(X^{(k)} - c\right)$$

$$= X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c$$

$$f\left(X^{(k+1)}\right) = f\left(X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c\right) = \frac{1}{2}\left(X^{(k)}(1-\alpha_k) + \alpha_k c - c\right)^2 = \frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2\left(X^{(k)} - c\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2 f\left(X^{(k)}\right).$$

b) Koristimo teoremu 3.1 i lemu 3.3.

Njutnova metoda

Neki primeri iz knjige Nelinearno programiranje.

Zadatak 1:

Konstruisati Njutnov iterativni niz za minimizaciju funkcije

$$f : R \to R, f(x) = x^4 - 1$$

$X^{(0)} = 4$

a) Metoda:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{f^{(k)}}{F\left(X^{(k)}\right)}$$

$\nabla f_k = 4{X^{(0)}}^3$

$\nabla^2 f_k = 12{X^{(k)}}^2$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{1}{3}X^{(k)} = \frac{2}{3}X^{(k)}$$

$$X^{(0)} = 4, X^{(1)} = \frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}, X^{(2)} = \frac{4}{9}4 = \frac{19}{9}, \dots, X^{(k)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} X^{(0)}$$

b) Dokazati da niz konvergira ka globalnom minimumu $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k 4 = 0 = x^*$

globalni minimum f-je $f(x) = -1$.

c) Odrediti stopu konvergencije

$$\left\|\frac{1}{\nabla^2 f_k}\right\| = \left\|\frac{1}{12x^{(k)}}\right\| < \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x^*\right\| = \lim_{k\to\infty} \left\|\left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} X^{(0)} - x^*\right\| = \lim_{k\to\infty} \left\|\left(\frac{2}{3}\right)^{(k)} 4 - 0\right\| = 0$$

dakle, $\{x_k\}$ konvergira.

Zadatak 2:

a) Njutnovom metodom minimizovati funkciju. Da li je tačka dobijena kao granična vrednost Njutnovog iterativnog niza globalni minimum?

$f: R \to R \quad f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ globalni minimum je 0

$$\nabla f = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\nabla f_k}{F(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{\frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}}} = x^{(k)} - 3x^{(k)} = -2x^{(k)} = (-2)^k x^{(0)}$$

$\lim_{k\to\infty} x^{(K+1)} = \lim_{k\to\infty} (-2)^k x^{(0)} \quad -> \quad x*$ je lokalni minimum.

b) Diskutovati konvergeciju u zavisnosti od izbora početne tačke

$x^0 = 1 \quad \to \quad x^{(1)} = -2, \quad x^{(2)} = 4, \quad x^{(3)} = 8, \ldots.$

$x^0 = \frac{1}{2} \quad \to \quad x^{(1)} = -1, \quad x^{(2)} = 2, \quad x^{(3)} = -4, \ldots.$

$x^0 = \frac{1}{4} \quad \to \quad x^{(1)} = -\frac{1}{2}, \quad x^{(2)} = 1, \quad x^{(3)} = -2, \ldots.$

Zadatak 3:

Pokazati da je tačka (1,1) globalni minimum

$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

a) Da li je $X(1,1)$ je globalni minimum?

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 200(x_2 - x_1^2)(-2x_1) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{f_k}{F(X^{(k)})}$$

$F(x^{(k)}) d_k = -f_k \qquad \to$

$$\begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix}$$

$(1200x_1^2 - 400x_2 + 2)d_1 - 400x_1d_2 = -400x_1^3 + 400x_1x_2 - 2x_1 + 2$

$-400x_1d_1 + 200d_2 = -200x_1^2 + 200x_2$

$200d_2 = -200x_1^2 + 200x_2 + 400x_1d_1$

$d_2 = -x_1^2 + x_2 + 2x_1d_1$

….

$d_1 = \frac{-800x_1^3 - 2x_1 + 2}{40x_1^2 - 400x_2 + 2}, \; d_2 = -x_1^2 + x_2 + 2x_1d_1$

b) Konstruisati Njutnov iterativni niz počevši od tačke (0,0)

Npr. $x^{(0)} = (0,0) \rightarrow \quad d_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\nabla f = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 200\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

$$d_1 = 1, d_2 = 0$$

$\nabla f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix}400\\-200\end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix}1202 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1202 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}400\\-200\end{pmatrix}$

$$d_1 = 0, d_2 = -1$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix}1602 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}$,

$\nabla f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix}-800\\400\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1602 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-800\\400\end{pmatrix}$

$$d_1 = 0, d_2 = 2$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(x^{(3)}) = \begin{pmatrix}802 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}802 & -400\\-400 & 200\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$d_1 = 0, d_2 = 0$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = x^*$$

c) Konstruisati niz sa konstantnim korakom:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \nabla f\left(x^{(k)}\right)$$

$$\alpha_k = 0.05$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix}400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2\\-200x_1^2 + 200x_2\end{pmatrix},$$

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}, \nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix}-1.4\\-2\end{pmatrix},$$

$$\nabla f\left(x^{(2)}\right) = \begin{pmatrix}-6.4948\\14.22\end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = (0,0)^T$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - 0.05\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.1\\0\end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.05 \begin{pmatrix} -1.4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.1 \end{pmatrix} - 0.05 \begin{pmatrix} -6.4948 \\ 14.22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 217.811 \\ -171.1456 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = \cdots = \begin{pmatrix} -10.395 \\ 7.94667 \end{pmatrix}$$ programirati…

Zadatak 4:

Konstruisati Njutnov iterativni niz za minimizaciju funkcije i izračunati prve tri iteracije.

$$f: R^2 \to R, f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$

$X^{(0)} = (0,1)^T$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 4x_1^3 + 4x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 12x_1 + 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

…. $x^{(1)} = (0,0)^T, x^{(2)} = (0,0), \dots, x^* = (0,0)$

Zadatak 5, 6 - za domaći

Zadatak 7:

Konstruisati Njutno iterativni niz $\{x^{(k)}\}$ za minimizaciju funkije f

$$f: R \to R \quad f(x) = (x - x_0)^4 \qquad x_0 = const \in R$$

$\nabla f(x) = 4(x - x_0)^3$

$\nabla^2 f(x) = 12(x - x_0)^2$

a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{4(x^{(k)} - x_0)}{12(x^{(k)} - x_0)}$

$$= x^{(k)} - \frac{1}{3}\left(x^{(k)} - x_0\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{(k)} + \frac{1}{3}x_0$$

$$x^{(k+1)} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^{(k-1)} + \frac{1}{3}x_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^{(k-1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}x^{(k-2)} + \frac{1}{3}x_0\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 x^{(k-2)} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) x_0 + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0 = \ \dots = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} x_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right) x_0 + \cdots + \frac{2}{3}\frac{1}{3}x_0$$

b) Pokazati da niz konvergira ka x_0

c) $\{x^{(k)}\}$ $\nabla f(x^*) = 0 \quad x^* = x_0$

Zadatak 8:

$$f: R \to R \quad f(x) = (x - x_0)^4 \qquad x_0 = const \in R$$

$$x^{(k+1)} = \frac{2}{3}x^{(k)} + \frac{1}{3}x_0$$

$$y_k = \left|x^{(k)} - x_0\right| = \left|\frac{2}{3}x^{(k-1)} - \frac{2}{3}x_0\right|$$

$$y_{k+1} = \left|\frac{2}{3}x^{(k)} + \frac{1}{3}x_0 - \frac{2}{3}x_0\right| = \cdots = \frac{2}{3}y_k$$

red konvergencije: na času!

Zadataci 9-15 za domaći!