ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Први двочас

1. Испитати регуларност кривих задатих параметризацијом

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in (-\pi, \pi), \qquad \beta(t) = (\cos t^3, \sin t^3),\ t \in (-\sqrt[3]{\pi}, -\sqrt[3]{\pi}).$$

Да ли су ове криве еквивалентне?

2. Доказати да су следећи скупови тачака слике (трагови, носачи) регуларних кривих:

а) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, $a, b > 0$;

б) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x > 0\}$, $a, b > 0$;

в) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$.

3. а) Доказати да је скуп $\{(t, 0) | t \in [0, 1)\} \cup \{(0, t) | t \in [0, 1)\}$ слика бесконачно глатке криве која није регуларна (тј. да та глатка параметризација није наслеђена из $\mathbb{R}^2$).

б) Доказати да скуп $\{(x, |x|) | x \in \mathbb{R}\}$ не може бити слика регуларне криве.

4. Доказати да је $\nabla F(x_0, y_0) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})\big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ довољан услов да скуп тачака датих условом $F(x, y) = 0$ буде локално, у некој околини тачке (x_0, y_0), траг регуларне криве. Да ли је тај услов и потребан?

5. Доказати да је дужина одсечка одређеног координатним осама тангентне линије астроиде задате једначином $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, константна.

6. Дате су регуларна раванска крива α и две тачке P и Q ван ње. Нека је M_0 тачка криве у којој збир $PM + QM$, $M \in \alpha$, достиже минимум. Доказати да је симетрала $\measuredangle PM_0Q$ нормална на тангенту криве α у тачки M_0.

ГЕОМЕТРИЈА 3
вежбе школске 2012/13 године
М и Н смер

Други двочас

Још неке познате криве

- права (у $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)
- криве другог реда (елипса, хипербола, парабола)
- ланчаница $y = a\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$
- трактриса (енг. dog curve) $a(\cos t + \ln(\mathrm{tg}\,(\frac{t}{2})), \sin t)$, $a > 0$, $t \in (0, \pi)$
- циклоиде $(at - b\sin t, a - b\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$
- епициклоиде $a((1+m)\cos(mt) - m\cos(t(m+1)), (m+1)\sin(mt) - m\sin(t(m+1)))$, $a, m > 0$, $t > 0$
  $m = 1$: кардиоида $2a(\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$, тј. $\rho = 2a(1+\cos\theta)$
- хипоциклоиде $a((m-1)\cos(mt) + m\cos(t(m-1)), (m-1)\sin(mt) - m\sin(t(m-1)))$, $a > 0$, $m \in (0, 1)$, $t > 0$
  астроида $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
- Архимедова спирала $\rho = a\theta$, $a > 0$
- логаритамска спирала $ae^{b\theta}$, $a > 0$
- Касинијеви овали $(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = c^4 - a^4$, $a, c > 0$;
  за $a = c$: Бернулијева лемниската $\left(\frac{a\cos t}{1+\sin^2}, \frac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$, тј. $\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$
- кружни хеликс (завојница) $(a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$
- конусни хеликс $(at\cos t, at\sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$
- Вивијанијева крива $a(1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$, $a > 0$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$

1. Израчунати дужине следећих кривих:

а) $y = \ln\cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$;
б) $x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t$, $y = 2\mathrm{ch}\,t$, $t \in [0, 2]$;
в) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$;
г) $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$.
д) $\rho = a\theta$, $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Наћи природну параметризацију кривих:

а) круга $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$, $t \in (0, 2\pi)$;
б) хеликса $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $t \in (0, 2\pi)$;
в) ланчанице $y = a\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $a > 0$; $(\mathrm{arsh}\,(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}))$
г) елипсе $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Трећи двочас

1. Одредити Френеов репер, кривину и торзију следећих кривих

а) $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$;

б) $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$.

2. Доказати да Дарбуов вектор $X = \tau T + \kappa B$ задовољава систем: $T' = X \times T$, $N' = X \times N$, $B' = X \times B$. (Дарбуов вектор је вектор угаоне брзине криве, па његов интензитет даје угаону брзину.)

3. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. Доказати следеће једнакости:

а) $[T, B, B'] = \tau$;

б) $[B', B'', B'''] = \tau^5(\frac{\kappa}{\tau})'$, $\kappa, \tau \neq 0$;

в) $[T', T'', T'''] = \kappa^5(\frac{\tau}{\kappa})'$, $\kappa \neq 0$.

4. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива. Ако је $\kappa(s) = 0$, тада је α део праве. Доказати.

5. Ако све тангентне линије регуларне параметризоване криве садрже фиксирану тачку, тада слика те криве припада некој правој. Доказати.

6. Ако све нормалне линије регуларне параметризоване криве садрже фиксирану тачку, тада је слика те криве садржана у кругу. Доказати.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Четврти двочас

1. Нека је $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ природно параметризована крива и $\kappa(s) \neq 0$. Доказати да су следећии ставови еквивалентни:

- α је раванска крива;
- B је константан вектор;
- $\tau(s) = 0$ за све $s \in I$.

2. Доказати да је следећа крива раванска $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$, $t \in (-1, 1)$, и наћи раван у којој лежи.

3. Доказати да важе уопштене Френеове формуле за регуларну криву $\alpha(t)$, $\kappa \neq 0$, параметризовану произвољним параметром t ($v = s' = \|\alpha'\|$):

$$\begin{aligned} T'(t) &= & & v\kappa(t)N(t) & & \\ N'(t) &= & -v\kappa(t)T(t) & & & +v\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= & & -v\tau(t)N(t) & & . \end{aligned}$$

4. Доказати да важе следеће формуле за регуларну криву α параметризовану произвољним параметром:

- $\alpha' = vT$, $\alpha'' = v'T + v^2\kappa N$;
- $T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$;
- $B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$;
- $N = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|\alpha'\| \cdot \|\alpha' \times \alpha''\|}$;
- $\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$;
- $\tau = \frac{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$.

5. Доказати да је кривина криве:

а) $\rho = \rho(\theta)$ дата формулом $\kappa(\theta) = \frac{|2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2|}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$;

б) $(x(t), y(t), 0)$ дата формулом $\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Нека је $\alpha(s) : I \to \mathbb{R}^3$, $0 \in I$, $\kappa \neq 0$ природно параметризована крива. Доказати да је $[x - \alpha(0), \alpha'(0), \alpha''(0)] = 0$ једначина оскулаторне равни у тачки $\alpha(0)$.

7. Доказати да се све оскулаторне равни неке регуларне криве са кривином различитом од нуле секу у једној тачки акко је та крива раванска.

8. Сферна крива константне кривине је део круга. Доказати.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Пети двочас

1. Одредити равански криву (до на изометријску трансформацију) ако је дата кривина:

а) $\kappa(s) = \frac{1}{as+b}$, $a, b \neq 0$;

б) $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$.

2. Дата је крива $\alpha(t) = (\sqrt{2}\cos t + \sin t + 1, -\sqrt{2}\sin t + 2, -\sqrt{2}\cos t + \sin t + 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

а) Израчунати кривину и торзију криве.

б) Детаљно описати криву.

3. Уопштена завојна линија (хеликс) је просторна крива чији тангентни вектор заклапа константан угао са фиксираном правом која се назива оса хеликса. Доказати да је крива уопштена завојна линија акко важи неки од услова:

- нормале су нормалне на осу;
- бинормале граде константан угао са осом;
- $\frac{\kappa}{\tau} = \text{const}$.

4. (пример испитног задатка) Нека је α крива дата својом поларном параметризацијом $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$, $a > 0$.

а) Скицирати криву α на највећем интервалу I на којем је регуларна. Одредити њену природну параметризацију, дужину лука између тачака $\theta = 0$ и $\theta = t$ и кривину $\kappa(t)$ као функцију од t.

б) Доказати да произвољна полуправа из координатног почетка одсеца на кривој α дужи чије дужине чине геометријску прогресију, док са тангентама у пресечним тачкама са кривом заклапа фиксиран угао.

в) Одредити Френеов репер, кривину и торзију криве $\beta(t) = (e^{-5t}\cos 5t, -e^{-5t}\sin 5t, e^{-5t})$ која представља репараметризацију конусног хеликса задатог стандардном параметризацијом, над раванском кривом α.

г) Одредити углове које заклапају тангента, нормала и бинормала у произвољној тачки криве са $z-$осом.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Шести двочас

1. а) Параметризовати јединичну полусферу, сферу без једног меридијана и сферу без једне тачке. Да ли су параметризације регуларне? Да ли је цела сфера слика регуларне површи?

б) Наћи једначину тангентне равни на јединичну сферу у тачки $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

2. Доказати да запремина тетраедра који се добија у пресеку координатних оса и тангентне равни површи $xyz = a^3$, $a > 0$, не зависи од избора тачке површи у којој је се разматра тангентна раван.

3. Доказати да је скуп решења једначине $f(x, y, z) = x^5 + x^3 + y^3 + y^2 + z^3 + z^2 + 1 = 0$ локално слика регуларне површи и наћи њену тангентну раван у произвољној тачки (x_0, y_0, z_0) слике површи.

4. Доказати да горња половина кружног конуса $z^2 = x^2 + y^2$ није слика регуларне површи.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Седми двочас

1. Доказати да су површи чије су слике графици глатких функција регуларне.

2. Нека је $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $a < t < b$, регуларна $1-1$ крива класе C^k и $f > 0$.

а) Доказати да је слика површи $r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, $a < u < b$, $0 < v < 2\pi$, добијена ротацијом слике криве α око $z-$осе.

б) Доказати да је r регуларна елементарна површ.

в) Одредити координатне криве површи r и углове које оне заклапају.

г) Примери ротационих површи: сфера, катеноид, једнограни хиперболоид, торус, цилиндар, конус.

3. а) Нека је $\alpha(u)$ регуларна крива и нека је $\beta(u) \neq 0$ векторско поље дуж криве α. Одредити под којим условима је $f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ регуларна елементарна површ.

б) Примери праволинијских површи: конус, цилиндар, хеликоид, једнограни хиперболоид, хиперболички параболоид, Мебијусова трака.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Осми двочас

1. Испитати да ли је површ $r(u,v) = ((1+u\sin\frac{v}{2})\cos v, (1+u\sin\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2})$, $-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $-\pi < v < \pi$, регуларна. Израчунати нормално векторско поље $n(0,v)$. Доказати да је $\lim\limits_{v\to-\pi} r(0,v) = \lim\limits_{v\to\pi} r(0,v)$ и $\lim\limits_{v\to-\pi} n(0,v) = -\lim\limits_{v\to\pi} n(0,v)$.

2. Доказати да је једнограни хиперболоид двострука линијска површ, тј. да садржи две фамилије мимоилазних правих тако да свака тачка хиперболоида припада тачно једној правој из сваке фамилије.

3. Израчунати коефицијенте прве фундаменталне форме

а) конуса $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$;

б) произвољне ротационе површи.

4. Дата је површ $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$. Одредити угао између кривих $v = u+1$ и $v = 3-u$.

5. Одредити угао између кривих $v = 2u$ и $v = -2u$ на површи чија је метрика дата са $ds^2 = du^2 + 2dv^2$.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Девети двочас

1. Израчунати површину торуса.

2. Нека је $\mathcal{U} = \{(\theta, \varphi) \,|\, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\} \in \mathbb{R}^2$ и $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ параметризација дела сфере $\mathbb{S}^2$ дата са $f(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$.

а) Израчунати површину дела јединичне сфере између два меридијана и две паралеле.

б) Показати да су криве (локсодроме) на сфери које заклапају константан угао α са меридијанима дате једначинама $\ln\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \pm(\varphi + C)\mathrm{ctg}\,\alpha$, $C \in \mathbb{R}$.

в) Израчунати дужину једне од тих кривих.

3. Доказати да криве фамилија $u_1(v) = C_1 e^{\frac{v}{\sqrt{2}}}$ и $u_2(v) = C_2 e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}}$, $C_1, C_2 > 0$, полове углове између координатних линија површи $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u > 0$.

4. а) Доказати да су локалне координате на сфери добијене из стереографске пројекције конформне, тј. да су раван и сфера без тачке конформно еквивалентне.

б) Показати да су локсодроме на сфери слике одговарајућих логаритамских спирала из карте при стереографској пројекцији.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Десети двочас

1. Дат је једнограни хиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

а) Одредити бар две параметризације (дела) хиперболоида.

б) Израчунати Гаусову и средњу кривину.

в) Израчунати Кристофелове симболе друге врсте.

2. Нека је друга фундаментална форма површи $f = f(u, v)$ идентички једнака нули. Доказати да слика површи припада некој равни.

3. Нека је $\alpha = \alpha(u)$ природно параметризована крива чија је кривина $\kappa = \kappa(u) \neq 0$ и торзија $\tau = \tau(u) \neq 0$. Израчунати Гаусову и средњу кривину тангентне површи $f(u, v) = \alpha(u) + vT(u)$, $v > 0$, при чему је $T = T(u)$ тангентни вектор криве α.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Једанаести двочас

1. Одредити геодезијску и нормалну кривину координатних линија хеликоида $r(u;v) = (u\cos v, u\sin v, hv)$, $u > 0$, $v \in \mathbb{R}$, $h = \mathrm{const} > 0$.

2. Нека је γ природно параметризована крива чији траг припада слици елементарне површи r. Означимо са κ, κ_n, κ_g редом кривину, нормалну кривину и геодезијску кривину криве γ, са N и n нормално векторско поље криве и површи и са θ угао између њих, дуж криве γ. Доказати:

а) $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$;

б) $\kappa_n = \kappa\cos\theta$ (у тачкама дуж криве где је вектор N дефинисан, тј. где је $\kappa \neq 0$);

в) ако је крива γ у нормалном сечењу (у свим тачкама), тада је $\kappa_n = \pm\kappa$ и $\kappa_g = 0$.

3. а) Израчунати нормалну кривину сфере полупречника R у произвољној тачки и у правцу произвољног тангентног вектора.

б) Доказати да за кривину κ природно параметризоване криве α чији траг лежи на јединичној сфери полупречника R важи неједнакост $\kappa \geqslant \dfrac{1}{R}$.

4. а) Одредити геодезијске линије међу паралелама торуса.

б) Одредити елиптичке, параболичке, хиперболичке и планарне тачке на торусу.

5. Доказати да у хиперболичким тачкама елементарне површи постоје тачно два асимптотска правца, као и да су они симетрични у односу на главне правце у тој тачки.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Дванаести двочас

1. Одредити геодезијске линије цилиндра.

2. Доказати да је свака паралела ротационе површи геодезијска линија.

3. Доказати да су координатне линије параметризације површи где важи $f \neq 0$ уједно и асимптотске линије ако и само ако је $e = g = 0$.

4. а) Доказати да су координатне линије параметризације површи без умбиличких тачака уједно и главне линије (линије кривине) ако и само ако важи $F = f = 0$.

б) Доказати да су меридијани и паралеле ротационих површи линије кривине.

5. Одредити главне и асимптотске линије на Енеперовој површи $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ дате са $r(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2)$.

ГЕОМЕТРИЈА 3

вежбе школске 2012/13 године

М и Н смер

Тринаести двочас

1. Ако је $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ природна параметризација геодезијске линије на површи $f = f(u, v)$ за коју је $E = E(u)$, $F = 0$, $G = G(u)$, доказати да је $\sqrt{G}\cos\theta = \text{const}$ при чему је θ угао између геодезијске линије и $v-$параметарске криве $u = \text{const}$.

2. Нека је $f = f(u, v)$ део површи на којем су $u-$ и $v-$параметарске криве ортогоналне и коефцијенти прве основне форме зависе само од једног параметра. Тада се геодезијске линије увек могу наћи интеграцијом, тј. тада важи:

а) $u-$параметарске криве ($v = \text{const}$) су геодезијске;

б) $v-$параметарске криве ($u = \text{const} = u_0$) су геодезијске линије акко је $G_u(u_0) = 0$;

в) крива облика $\alpha(u) = r(u, v(u))$ је геодезијска линија акко је $v = \displaystyle\int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - C^2}}du$, $C = \text{const}$.

3. Површ $f = f(u, v)$ назива се Лиувилова површ ако је $E = G = U + V$ и $F = 0$, при чему је U функција само по u и V функција само по v. Ако је $\alpha(s) = f(u(s), v(s))$ природно параметризована геодезијска линија на овој површи, доказати да је $U\sin^2\theta - V\cos^2\theta = \text{const}$, при чему је θ угао између геодезијске линије и $u-$параметарске криве $v = \text{const}$.

4. Дата је ротациона површ $r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$. Доказати:

- сваки меридијан ($u-$параметарска крива) је геодезијска линија;
- паралела ($v-$параметарска крива) је геодезијска линија акко су тангенте меридијана паралелне оси ротације у свим тачкама паралеле.

5. Нека је $\alpha(s) = r(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ природно параметризована крива чија слика припада трагу површи $r = r(u, v)$. Посматрајући $n(s) = n(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ дуж слике криве α, доказати да векторска поља T, S, n чине ортонормирану базу векторског простора $\mathbb{R}^3$ дуж слике криве α, као и да важе формуле аналогне Френеовим формулама:

- $T' = \mathrm{II}(T, T)n + \kappa_g S$;
- $S' = -\kappa_g T + \mathrm{II}(T, S)n$;
- $n' = -\mathrm{II}(T, T)T - \mathrm{II}(T, S)S$.

ГЕОМЕТРИЈА 3
вежбе школске 2012/13 године
М и Н смер

Четрнаести двочас

1. Оператор облика $S : T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$ представља негативни диференцијал Гаусовог пресликавања $g(p) = n(p)$ елементарне површи $r = r(u, v)$, тј. $S = -dg_p$. Као самоадјунгован линеарни оператор у коресподенцији је са другом фундаменталном (билинеарном) формом на следећи начин:

$$\mathrm{II}(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p\rangle = \langle v_p, S(w_p)\rangle,$$

па су главне кривине у тачки p регуларне површи сопствене вредности оператора облика површи, а главни правци његови сопствени вектори.

Доказати да важе формуле

$$S(r_u) = -n_u = -\frac{Ff - Ge}{EG - F^2}r_u - \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}r_v,$$
$$S(r_v) = -n_v = -\frac{Fe - Ef}{EG - F^2}r_u - \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}r_v.$$

У случају $F = f = 0$, претходне формуле се своде на $S(r_u) = \dfrac{e}{E}r_u$ и $S(r_v) = \dfrac{g}{G}r_v$, одакле следи да су тада нормалне кривине $u-$ и $v-$параметарских кривих редом $\dfrac{e}{E}$ и $\dfrac{g}{G}$.

2. Доказати да су хеликоид и катеноид (на одговарајући начин параметризовани) изометричне површи.

3. а) Доказати да су раван (без тачке) и конус $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ (без врха) дифеоморфне површи.

б) Доказати да су раван и конус $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ локално изометрични.

в) Одредити растојање између тачака $A(0, 1, \sqrt{3})$ и $B(0, -1, \sqrt{3})$ на конусу.