METODA SEČICE I REGULA FALSI

Zadatak: Naći nulu funkcije f na intervalu (a,b), odnosno naći x za koje je f(x)=0.

Rešenje: Prvo, tražimo interval (a,b) na kome je funkcija neprekidna, monotona i važi: f(a)f(b)<0.
Poželjno je da interval (a,b) bude, što je moguće manji.

Proizvoljno biramo tačku x_F (iz intervala (a,b)): // česta je situacija da su $x_0 = a$ i $x_F = b$
Koristimo formulu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_F) - f(x_n)}(x_F - x_n)$$

METODA REGULA FALSI

Ili formulu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}(x_{n-1} - x_n)$$

METODA SEČICE

Kod metode sečice se obično uzima da su $x_0 = a, x_1 = b$

Niz tačaka $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ konvergira ka rešenju x* , f(x*)=0.

OCENA GREŠKE

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_{n+1} - x_n|$$

$$M_1 = \max_{[a,b]}|f'(x)|$$

$$m_1 = \min_{[a,b]}|f'(x)|$$

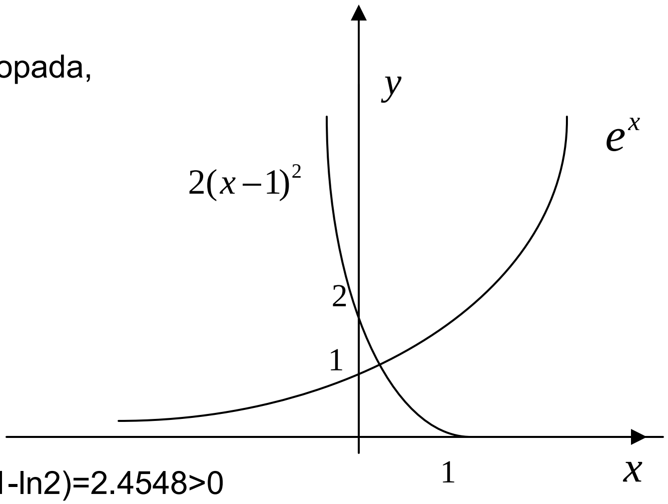
KRITERIJUM ZAUSTAVLJANJA

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{m_1}{M_1 - m_1}\varepsilon = r$$

Zadatak br1. Metodom *REGULA FALSI* odrediti sa tačnošću $\frac{1}{2}10^{-5}$ sva rešenja jednačine: $e^x - 2(x-1)^2 = 0$

Rešenje:

Analiziramo funkciju f(x). Zanima nas da li je funkcija monotona, da li raste/opada, da li je konveksna/konkavna..



$$f(x) = e^x - 2(x-1)^2 = 0$$

$$f'(x) = e^x - 4(x-1)$$

$$f''(x) = e^x - 4$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4$ prevojna tačka.

$$\begin{array}{l} x \in (-\infty, \ln 4) \Rightarrow f'' < 0 \\ x \in (\ln 4, \infty) \Rightarrow f'' > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f' \quad opada \quad za \quad x \in (-\infty, \ln 4) \\ f' \quad raste \quad za \quad x \in (\ln 4, \infty) \end{array}$$

funkcija je neprekidna, opada do x=ln4 i raste od x=ln4, a kako je f'(ln4)=8(1-ln2)=2.4548>0 zaključujemo da je f'>0 za svako x

$$\begin{array}{l} f(-\infty) < 0 \\ f(+\infty) > 0 \end{array} \quad i \quad f \; raste \quad na \, (-\infty, +\infty) \quad \Rightarrow \exists! nula$$

Dakle, uslovi su ispunjeni (nula funkcije postoji), ostalo je još da lociramo gde se ta nula nalazi.
Jedan način za rešavanje je da nacrtamo grafike funkcija $e^x, 2(x-1)^2$
i da odredimo presečnu tačku.

Sa grafika vidimo da presek postoji i da je negde između (0, 0.5). Ovaj interval uzimamo za početni interval (a,b)
Biramo tačke

$$x_F = 0.3$$

$$x_0 = 0.2$$

Kriterijum zaustavljanja je

$$M_1 = \max_{[0,0.5]} |f'(x)| = f'(0) = 5$$

$$m_1 = \min_{[0,0.5]} |f'(x)| = f'(0.5) = 3.65$$

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{3.65}{5-3.65}\frac{1}{2}10^{-5} \approx 1.4*10^{-5}$$

Radi bolje preglednosti, račun predstavljamo tablično:

br iteracije	x	f(x)
x_F	0.3	0.369859
0	0.2	-0.058597
1	0.213676	0.001612
2	0.212993	-0.001386
3	0.213317	0.000038
4	0.213308	-0.000001

Dakle, u četvrtoj iteraciji dobili smo nulu funkcije f
x*=0.2133

Računali smo na 6 decimala, kriteriju zaustavljanja je ispunjen

$$|x_4 - x_3| = 0.000009$$

Zadatak br2. Metodom *SEČICE* sa tačnošću 10^{-5} naći sva pozitivna rešenja jednačine

$$\sin x = x^2 - 1$$

Pokušaćemo da lociramo tačno rešenje. Pokušaćemo grafički da pronađemo nulu ove funkcije!
Nula pripada intervalu (0,3.14). Funkcija je neprekidna na R.

f'(x)=cosx-2x   f''(x)=-sinx-2<0 za svako x (konkavna)

Kako bi izbegli veliki broj iteracija, pokušaćemo da smanjimo interval:

$$f(0.5) = 1.2294255$$
$$f(1) = 0.8414710$$
$$f(1.5) = -0.2525050$$

Nulu tražimo u intervalu (1,1.5)

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 1.5$$

Radi bolje preglednosti, zadatak rešavamo tablično. Obzirom da je data tačnost, radićemo sa 7 decimala (zbog deljenja).

br iteracije	x	f(x)
0	1.0000000	0.8414710
1	1.5000000	-0.2525050
2	1.3845930	0.0656165
3	1.4083971	0.0032598
4	1.4096415	-0.0000465
5	1.4096240	0.0000000
6	1.4096240	0.0000000

Dakle, nula funkcije je $x^*=1.40962$

NJUTNOVA METODA (METODA TANGENTE)

Ova metoda je najpoznatija.
Brže konvergira od prehodne ali ima više uslova.

Zadatak: Naći nulu funkcije f na intervalu (a,b), odnosno naći x za koje je f(x)=0.

Dovoljni uslovi konvergencije:
1. Naći interval (a,b) takav da je f(a)f(b)<0
2. $f'(x) \neq 0$ na (a,b)
3. *f''(x)* ne menja znak na (a,b)
4. Pronaći početnu tačku x_0 na (a,b) za koju je $f(x_0)f''(x_0) > 0$

Dakle, početni vektor biramo proizvoljno ali tako da važi uslov 4..
Proveravamo da li je funkcija:
monotna,
da li je f(a)f(b)<0 (dokaz da je rešenje unutar tog intervala)
da li drugi izvod ne menja znak (svuda je funkcija ili konveksna ili konkavna) a zatim, koristimo formulu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Koristeći gore navadenu formulu dobijamo niz tačaka $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ koji konvergira ka rešenju x*, f(x*)=0.

OCENA GREŠKE $$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

$$M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$$

$$m_1 = \min_{[a,b]}|f'(x)|$$

KRITERIJUM ZAUSTAVLJANJA

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = r$$

Zadatak br3. Njutnovom metodom, sa tačnošću 10^{-5} naći sva rešenja jednačine: $e^{x}+e^{-3x}-4=0$

$$f(x)=e^{x}+e^{-3x}-4$$

Rešenje: Ove funkcije možemo i da nacrtamo grafički i da lociramo nulu funkcije.

Sa grafka vidimo da ova funkcija ima 2 rešenja.
Mi ćemo tražiti pozitivno rešenje (analgono se traži negativno rešenje).

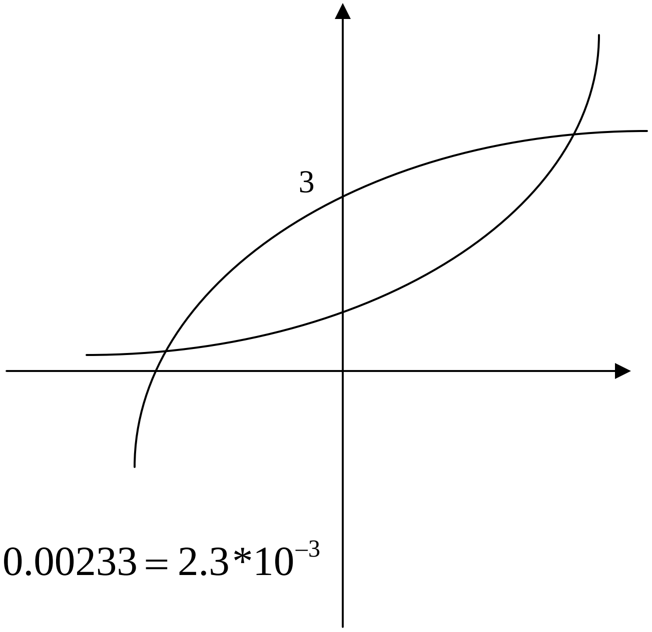
$f(0)=-2<0$

$f(1)=-1.2379<0$ $\quad\Rightarrow x_1^{*}\in(1,2)$

$f(2)=3.3915>0$

$f(1.7)=1.48$

$f''(1.7)<0$



Sada proveravamo da li važe uslovi za primenu ove metode:

1) $f(1)\,f(2)<0 \qquad \Rightarrow ispunjeno$

2) $f'(x)=e^{x}-3e^{-3x}>0 \qquad na(1,2) \qquad \Rightarrow x_0=1.7 \qquad f(x_0)\,f''(x_0)>0$

3) $f''(x)=e^{x}-9e^{-3x}>0 \qquad na(1,2)$

Kriterijum zaustavljanja:

$$M_2=\max_{[1,2]}|f''(x)|=|f''(2)|=7.4113$$

$$m_1=\min_{[1,2]}|f'(x)|=|f'(1)|=2.5689$$

$$|x_n-x_{n-1}|\le\sqrt{\frac{2*2*0.00001}{7.36675}}=0.00233=2.3*10^{-3}$$

Zadatak rešavamo tablično:

br iteracije	x	f(x)	f'(x)
0	1.7000000	1.4800441	5.4556572
1	1.4287139	0.1870862	4.1320546
2	1.3834371	0.0043467	3.9413086
3	1.3823342	0.0000025	3.9367556
4	1.3823336	0.0000000	3.9367529

X*=1.38233

KOMBINOVANA METODA SEČICE I TANGENTE

Kombinovana metoda se dobija kada se umesto vrednosti x_{n-1} u metodi Sečice koriste vrednosti dobijene Njutnovom metodom, tj.

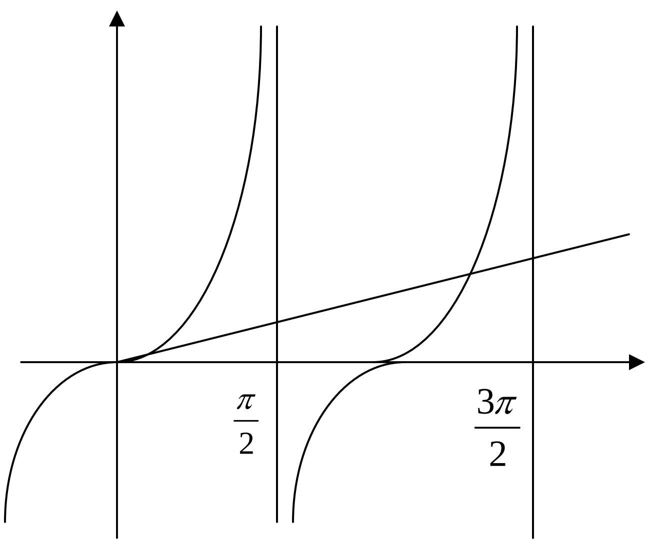
$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x_n} - \frac{f(\overline{x_n})}{f'(\overline{x_n})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\overline{x_n}) - f(x_n)}(\overline{x_n} - x_n)$$

Važe isti uslovi kao kod Njutnove metode tangente!

Zadatak br4. Kombinovanom metodom odrediti najmanje pozitivno rešenje jednačine **tgx=x** sa tačnošću 10^{-5}

Nacrtaćemo grafike funkcija f(x)=tgx i g(x)=x.
U preseku grafika nalaze se nule funkcije.



Najmanje pozitivno rešenje se nalazi na intervalu $(\pi, 3\pi/2)$

Proveravamo da li važe uslovi Njutnove metode:

$$M_2 = \max_{[3,\ 4.7]} \left| f''(x) \right| = \left| f''(4.7) \right| = 4$$

$$m_1 = \min_{[3,\ 4.7]} \left| f'(x) \right| = \left| f'(3) \right| = 0.02032$$

$$\left| x_n - x_{n-1} \right| \le \sqrt{\frac{2*0.02032*0.0001}{4}} = 1.07*10^{-3}$$

$$F(x) = tgx - x$$

$$F(\pi) \approx F(3) = -3.142546$$

$$F_{-}(3\pi/2) \approx F(4.7) = 76.012763$$

1) $F(3)F(4.7) < 0 \quad \Rightarrow ispunjeno$

2) $F'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \quad na(3, 4.7) \quad \Rightarrow x_0 = 4.5 \quad f(x_0) f''(x_0) > 0$

3) $F''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0 \quad na(3, 4.7)$

Zadatak rešavamo tablično:

br iteracije	X (Njutn)	X (metoda secice)	F(x) (Njutn)	F(x) (Secica)	F'(x)
0	4.5000000	3.0000000	0.1373321	-3.1425465	21.5048486
1	4.4936139	4.4371934	0.0041319	-0.8956127	20.2297171
2	4.4934097	4.4933548	0.0000040	-0.0011032	20.1907661
3	4.4934095	4.4934095	0.0000000	0.0000000	20.1907286
4	4.4934095	4.4934095	0.0000000	0.0000000	20.1907286

Dakle, nula funkcije je x*=4.49341

METODA ITERACIJE I NJENA MODIFIKACIJA

Rešavamo zadatak f(x)=0, odnosno tražimo nulu funkcije f

Metodom iteracije se početni zadatak prevodi u sledeći problem: $x = \vartheta(x)$

1. Naći interval [a,b] unutar kojeg se nalazi rešenje
2. $\vartheta(x)$ mora biti kontrakcija, odnosno $|\vartheta'(x)| \leq q < 1$
3. $\vartheta([a,b]) \subset [a,b]$ (ne proveravamo)

OCENA TAČNOSTI GREŠKE:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

KRITERIJUM ZAUSTAVLJANJA:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Za početno x se uzima proizvoljna tačka iz intervala (a,b)

Zadatak br5 Naći sva rešenja jednačine: $$e^{-x}-(x-1)^2=0$$

Nacrtaćemo grafike ovih funkcija, traženo rešenje nalazi se u preseku grafika funkcija.

Već možemo da pretpostavimo da je jedna nula x*=0

Tražimo interval za drugu nulu: $F(1)=0.367879$

$F(2)=-0.864665$ $\qquad x_2^* \in [1,2]$

Dakle, drugu nulu tražimo na intervalu (1,2)

$$F(x)=e^{-x}-(x-1)^2$$

$$(x-1)^2=e^{-x} \Rightarrow \quad |x-1|=e^{-1/2x} \Rightarrow \quad x=e^{-1/2x}+1$$

$$Q(x)=e^{-1/2x}+1$$

$$Q'(x)=\frac{-1}{2}e^{-1/2x} \Rightarrow \quad |Q'(x)|=\frac{1}{2e^{1/2x}} \le \frac{1}{2e^{1/2*1}}=0.30327=q<1$$

Kriterijum zaustavljanja:

$$r=\frac{1-q}{q}\varepsilon=\frac{1-0.30327}{0.30327}10^{-4}=2.3*10^{-4}$$

br iteracije	x	x(n)-x(n-1)
0	1.00000	
1	1.60653	0.60653
2	1.44786	0.15867
3	1.48484	0.03698
4	1.47596	0.00888
5	1.47808	0.00212
6	1.47757	0.00051
7	1.47769	0.00012
8	1.47766	0.00003
9	1.47767	0.00001

Zadatak rešavamo tablično radi bolje preglednosti:

$$x_0=1$$

$$x_1=e^{-1/2x_0}+1$$

$$x_2=e^{-1/2x_1}+1$$

Tražena druga nula funkcije je x*=1.47767

Tražimo i treću nulu funkcije:

$$F(-3) = 4.085534 \qquad x_3^* \in [-3,-2]$$
$$F(-2) = -1.610944$$

Ponavljamo postupak (moramo da tražimo novu funkciju Q zato što na intervalu [-4,-3] funkcija Q koju smo malo pre pronašli nije kontrakcija!!:

$$F(x) = e^{-x} - (x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = e^{-x} \Rightarrow \qquad x-1 = e^{-x/2} \Rightarrow \quad \ln(1-x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow \quad x = -2\ln(1-x)$$

$$Q(x) = -2\ln(1-x)$$

$$Q'(x) = \frac{2}{1-x} \Rightarrow \quad |Q'(x)| = \frac{2}{1-x} \le \frac{2}{1+2} = 2/3 = q < 1$$

Zadatak rešavamo tablično radi bolje preglednosti.

Kriterijum zaustavljanja:

$$r = \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-2/3}{2/3}10^{-4} = 0.5*10^{-4}$$

Poslednja nula je x*=-2.51282

br iteracije	x	x(n)-x(n-1)
0	-2.00000	
1	-2.19722	0.19722
2	-2.32457	0.12734
3	-2.40268	0.07811
4	-2.44913	0.04645
5	-2.47624	0.02712
6	-2.49190	0.01566
7	-2.50089	0.00899
8	-2.50604	0.00514
9	-2.50897	0.00294
10	-2.51065	0.00167
11	-2.51160	0.00095
12	-2.51214	0.00054
13	-2.51245	0.00031
14	-2.51263	0.00018
15	-2.51273	0.00010
16	-2.51279	0.00006
17	-2.51282	0.00003