NUMERIČKA INTEGRACIJA

ZADATAK: Odrediti približnu vrednost integrala $\int_b^a f(x)dx$

Integral određujemo pomoću formule:

$$f(x) = p(x) + R(x) \qquad \int_b^a f(x)dx = I + R$$

I – vrednost integrala polinoma

R – ocena greške

Kvadraturne formule se dobijaju aproksimacijom podintegralne funkcije interpolacionim polinomom, a greška je jednaka integralu greške interpolacije.

Vrednost integrala najčešće se dobija pomoću kvadraturnih formula

–Njutn Kotesovog tipa

–Gausovog tipa

•NJUTN KOTESOVE KVADRATURNE FORMULE najčešće su oblika:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Zadatak br1. Izvesti kvadraturnu formulu oblika

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(\frac{1}{4}) + A_1 f(\frac{1}{2}) + A_2 f(\frac{3}{4})$$

- Koeficijente Ai biramo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.
- Broj nepoznatih koeficijenata određuje stepen funkcije za koju će formula biti tačna. U zadatku imamo 3 čvora, dakle formula mora da bude tačna za polinome stepena 0,1 i 2.
- Uzećemo da je funkcija $f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=x^2$

i za tako izabrano f(x) odrediti nepoznate koeficijente.

$$f(x)=1: \int_0^1 1dx = x|_0^1 = 1 = A_0 + A_1 + A_2$$

$$f(x)=x: \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{3}{4}A_2$$

$$f(x)=x^2: \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{16}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{9}{16}A_2$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = -\frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3}$$

Dakle, tražena formula je oblika:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3} f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3} f(\frac{3}{4})$$

Zadatak br2. Izvesti kvadraturnu formulu za numeričku integraciju oblika:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx Af(0) + Bf(\frac{1}{2}) + Cf(1)$$

- Koeficijente A,B,C biramo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.
- Broj nepoznatih koeficijenata određuje stepen funkcije za koju će formula biti tačna. U zadatku imamo 3 čvora, dakle formula mora da bude tačna za polinome stepena 0,1 i 2.
  - Uzećemo da je funkcija $f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=x^2$

i za tako izabrano f(x) odrediti nepoznate koeficijente.

$$f(x)=1: \int_0^1 1\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} = A+B+C$$

$$f(x)=x: \int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} = 0+\frac{1}{2}B+C$$

$$f(x)=x^2: \int_0^1 x^2\sqrt{x}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{7} = 0+\frac{1}{4}B+C$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$A=\frac{4}{105}, B=\frac{16}{35}, C=\frac{6}{35}$$

Dakle, tražena formula je oblika:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx \frac{4}{105}f(0)+\frac{16}{35}f(\frac{1}{2})+\frac{6}{35}f(1)$$

Zadatak br3. Izvesti kvadraturnu formulu za numeričku integraciju oblika:

$$\int_0^h f(x)dx \approx Af(0) + Bf(\frac{2h}{3}) + R(h)$$

oceniti grešku R(h)

- Koeficijente A,B biramo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.
- Broj nepoznatih koeficijenata određuje stepen funkcije za koju će formula biti tačna. U zadatku imamo 2 čvora, dakle formula mora da bude tačna za polinome stepena 0 i 1.
  - Uzećemo da je funkcija $f(x)=1,\ f(x)=x$

i za tako izabrano f(x) odrediti nepoznate koeficijente.

$$f(x)=1: \int_0^h 1dx = x|_0^h = h = A+B$$

$$f(x)=x: \int_0^h xdx = \frac{x^2}{2}|_0^h = \frac{h^2}{2} = 0 + \frac{2h}{3}B$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$A=\frac{h}{4}, B=\frac{3h}{4}$$

Dakle, tražena formula je oblika: $$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{4}(f(0)+3f(\frac{2h}{3}))+R(h)$$

Tražena formula je stepena 1, ostalo je da ocenimo grešku. Ocena greške će biti stepena 1.
Neka je p(x) polinom prvog stepena koji se poklapa sa funkcijom f(x) u datim čvorovima:.

$$p(x) = f(0)$$

$$p(\frac{2h}{3}) = f(\frac{2h}{3})$$

$$f(x) = p(x) + R(x)$$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$f(0) = a_0$$

$$f(\frac{2h}{3}) = f(0) + a_1(\frac{2h}{3} - 0)$$

$$p(x) = f(0) + x\frac{f(\frac{2h}{3}) - f(0)}{\frac{2h}{3} - 0}$$

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}|(x-x_0)(x-x_1)| = \frac{M_2}{2!}|(x-0)(x-\frac{2h}{3})|$$

I konačno, ocena greške kvadraturne formule je:

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h p(x)dx + \int_0^h R_1(x)dx$$

$$R \le \int_0^h R_1(x)dx \le \int_0^h \frac{M_2}{2!}|(x-0)(x-\frac{2h}{3})dx$$

$$R \le \frac{M_2}{2!}\int_0^{\frac{2h}{3}} x(\frac{2h}{3}-x)dx + \frac{M_2}{2!}\int_{\frac{2h}{3}}^{h} x(x-\frac{2h}{3})dx = \frac{4M_2h^3}{81}$$

Zadatak br4. Izvesti kvadraturnu formulu oblika:

$$\int_0^1 f(x)dx = c_0 f(\frac{1}{4}) + c_1 f(\frac{1}{2}) + c_2 f(\frac{3}{4}) + R$$

Oceniti grešku. Pomoću dobijene formule izračunati integral: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$

- Koeficijente Ci biramo tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.
- Broj nepoznatih koeficijenata određuje stepen funkcije za koju će formula biti tačna. U zadatku imamo 3 čvora, dakle formula mora da bude tačna za polinome stepena 0,1 i 2.
  - Uzećemo da je funkcija $f(x) = x^k, k = 0,1,2$

i za tako izabrano f(x) odrediti nepoznate koeficijente.

$$f(x)=1:\int_0^1 1dx = x|_0^1 = 1 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$f(x)=x:\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}C_0 + \frac{1}{2}C_1 + \frac{3}{4}C_2$$

$$f(x)=x^2:\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{16}C_0 + \frac{1}{4}C_1 + \frac{9}{16}C_2$$

Rešimo sistem, dobićemo da je

$$C_0 = \frac{2}{3}, C_1 = -\frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}$$

Ocenimo grešku:

NAPOMENA: Ovo je formula NjutnKotesovog tipa sa tri čvora, pri čemu čvorovima koji su simetrični u odnosu na sredinu intervala odgovaraju jednaki koeficijenti. Red greške povećava se za jedan stepen, pa će ova formula biti tačna i za polinome trećeg stepena.

$$R = \frac{1}{4!}\int_0^1 f^4(\xi)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{4})dx$$

Uvodimo oznaku $M_4 = \max_{[0,1]}|f^{(4)}(x)|$

$$|R| \le \frac{1}{4!}M_4\int_0^1 |(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{4})|dx$$

$$\int_0^1 |(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{4})|dx = 0.007292$$

$$R \le \frac{1}{4!}M_4 * 0.007292 = 0.0003M_4$$

Dakle, tražena formula je oblika:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}(2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})) + 0.0003M_4$$

Ostalo je da izračunamo vrednost integrala.
Prvo, moramo da pomerimo granice integrala, koristićemo smenu x=at+b

$$x = \frac{(t+1)\pi}{4}$$

Sada rešavamo inegral: $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin\frac{(t+1)\pi}{4}}{t+1} dt$$

$$R = 0.0003M_4$$

Ostalo je da se oceni greška R

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{3}\left(2\frac{\sin\frac{5\pi}{16}}{\frac{5}{4}} - \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{\sin\frac{7\pi}{16}}{\frac{7}{4}}\right) + R = 0.61178$$

UOPŠTENA TRAPEZNA FORMULA

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

$$a = x_0, b = x_n$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

Greška trapezne formule:

$$R \leq \left|\frac{b-a}{12} h^2 y''(\xi)\right|, \xi \in [a,b]$$

UOPŠTENA SIMPSONOVA FORMULA

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}))$$

Greška simpsonove formule:

$$R \leq \left|\frac{b-a}{180} h^4 y^{(4)}(\xi)\right|, \xi \in [a,b]$$

Ova ocena greške je nepraktična zato što je potrebno oceniti 4.ti izvod, zato koristimo drugu ocenu greške.

$$I(f) = I_h(f) + M_1 h^k$$

$$I(f) = I_H(f) + M_2 H^k$$

$I_h(f), I_H(f)$

Integral sa korakom h,H dobijen Simpsonovom ili Trapeznom formulom

Ako pretpostavimo da je $M_1 = M_2$ (što ne mora da znači) oduzimanjem dobijamo

$$I_h(f) - I_H(f) = M(H^k - h^k)$$

Odnosno:

$$|I(f) - I_H(f)| \approx \frac{|I_H(f) - I_h(f)|}{2^k - 1}$$

Rungeova ocena greške

Kada je u pitanju uopštena Trapezna formula uzimamo da je **k=2**, dok je kod uopštene Simpsonove formule **k=4**. Ova ocena nije uvek pouzdana zato što M1 ne mora da uvek bude jednako M2.

Zadatak br5. Izračunati integral Simpsonovom kvadraturnom formulom sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x + \cos x}$$

Za Simpsonovu kvadraturnu formulu potreban nam je **neparan** broj čvorova, na primer n=5.
Računamo sa 5 decimala zbog ocene greške.

x	*1	*4	*2
0	1.00000		
pi/4		0.67001	
pi/2			0.63662
3pi/4		0.60640	
pi	0.46694		
suma	1.46694	1.27641	0.63662

Obzirom da je za ocenu greške pomoću formule za ocenu greške koju imamo kod Simsponove kvadrturne formule potreban 4ti izvod, grešku ćemo oceniti Rungeovom ocenom.
Tražimo vrednost integrala sa korakom h i sa duplo manjim korakom.

$$h = \frac{\pi}{4}$$

$$I_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3*4}(1.46694 + 4*1.27641 + 2*0.63662) = 2.05403$$

x	*1	*4	*2
0	1.00000		
pi/8		0.75954	
pi/4			0.6700
3pi/8		0.6407	
pi/2			0.63662
5pi/8		0.63259	
3pi/4			0.60640
7pi/8		0.54794	
pi	0.46694		
suma	1.46694	2.58077	1.91303

Kada dopunimo staru tablicu novim podacima, primetićemo da su nam sada svi novi elementi u drugoj tablici na neparnim mestima. Njih množimo sa brojem 2.

$$I_{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{3*8}(1.46694 + 4*2.58077 + 2*(1.27641 + 0.63662))$$

$$I_{\frac{\pi}{8}} = 2.04414$$

Ocena greške:

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{8}}(f)| \approx \frac{|I_{\frac{\pi}{8}}(f) - I_{\frac{\pi}{4}}(f)|}{2^4 - 1} = \frac{|2.04414 - 2.05403|}{15}$$

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{8}}(f)| \approx 0.00066 > 10^{-4}$$

Kako je greška veća od tražene, ponovo ćemo poloviti interval i formirati novu tablicu.

$$h = \frac{\pi}{16}$$

x	*4
pi/16	0.84952
3pi/16	0.70397
5pi/16	0.65048
7pi/16	0.63713
9pi/16	0.63611
11pi/16	0.62333
13pi/16	0.58103
15pi/16	0.50905
suma	5.19062

$$I_{\frac{\pi}{16}} = \frac{\pi}{3*16}(1.46694 + 4*5.190621 + 2*(2.58077 + 1.91303))$$

$$I_{\frac{\pi}{16}} = 2.04293$$

Ocenimo grešku:

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{16}}(f)| \approx \frac{|I_{\frac{\pi}{16}}(f) - I_{\frac{\pi}{8}}(f)|}{2^4 - 1} = \frac{|2.04315 - 2.04293|}{15}$$

$$|I(f) - I_{\frac{\pi}{16}}(f)| \approx 0.0000147 < 10^{-4}$$

Dakle, traženo rešenje je I = 2.0429

Zadatak br6. Neka su Yi i=0,1,2..,2n Yi=f(Xi) dati sa tačnošću δ i neka je R greška nastala u Simpsonovoj Formuli zaokruživanjem vrednosti.
Dokazati da je R ≤ (b-a)δ

Uzećemo da je svaka promenljiva Y data sa apsolutnom greškom δ

$$A_{Y_i} \le \delta, I_h = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + .. + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + .. + y_{2n-2}))$$

$$R \le \frac{h}{3}(Ay_0 + Ay_n + 4(Ay_1 + Ay_3 + .. + Ay_{2n-1}) + 2(Ay_2 + Ay_4 + .. + Ay_{2n-2}))$$

$$R \le \frac{h}{3}\delta(1+1+4(1+1+..+1)+2(1+1+..+1))$$

$$R \le \delta\int_a^b dx = \delta(b-a)$$

Ovo u zagradi liči na Simpsonovu formulu kada je f(x)=1

Zadatak br7. Odrediti optimalni korak i izračunati integral koristeći Simpsonovu kvadraturnu formulu tako da greška rezultata ne bude veća $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Ukupna greška $R = R_M + R_Z \le 10^{-4}$

Uzećemo da je: $R_M \le \frac{1}{2}10^{-4}$ — R_M Greška metode

$R_Z \le \frac{1}{2}10^{-4}$ — R_Z Greška zaokruživanja

$$R_M \le \frac{(b-a)}{180}h^4 M_4$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(4)} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

$$R_M \le \frac{24}{180}h^4$$

$$h \le \sqrt[4]{\frac{90R_M}{24}} \le 0.139 \Rightarrow h = 0.1$$

δ je izabrano tako da i greška zaokruživanja bude manja od $\frac{1}{2}10^{-4}$

$$R_Z = \delta(b-a) \leq \frac{1}{2}10^{-4}$$

$$\delta \leq \frac{1}{2}10^{-4}$$

Zbog greške zaokruživanja radićemo sa 4 sigurne cifre u užem smislu. Formiramo tabelu:

x	*1	*4	*2
0	1.0000		
0.1		0.9091	
0.2			0.8333
0.3		0.7692	
0.4			0.7143
0.5		0.6667	
0.6			0.6250
0.7		0.5882	
0.8			0.5556
0.9		0.5263	
1	0.5000		
suma	1.5000	3.4595	2.7282

$$I_{0.1} = \frac{0.1}{3}(1.5000 + 4*3.4595 + 2*2.7282)$$

$$I_{0.1} = 0.6931$$

Integral smo izračunali sa zadatom tačnošću.

Zadatak br8. Izračunati integral sa tačnošću 10^{-5}

$$\int_1^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}\,dx$$

Integral rešavamo Simpsonovom kvadraturnom formulom.
Granice integrala ćemo namestiti tako da gornja granica bude konačna vrednost.

$$\int_M^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}\,dx \le \int_M^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_M^{\infty} = \frac{1}{2}e^{-M^2} \le \frac{1}{2}10^{-5}$$

$-1 \le |\sin x| \le 1,$

Smena: $-x^2 = t$

$$e^{M^2} \le 10^{-5} \Rightarrow M^2 \ge 5\ln 10 \Rightarrow M \ge 3.39$$

Uzećemo da je M=3.4. Integral posmatramo na interrvalu [1, 3.4]. Za početak radimo sa 3 čvora.

x	*1	*4	*2
1.000000	0.129468		
2.200000		0.006194	
3.400000	0.000019		
suma	0.129487	0.006194	

$$I_{1.2} = \frac{1.2}{3}(0.129487 + 4*0.006194)$$

$$I_{1.2} = 0.061705$$

Za Rungeovu ocenu greške potrebno je prepoloviti korak (inače računamo 4.izvod i ocenjujemo Simpsonovom ocenom greške.

x	*1	*4	*2
1.000000	0.129468		
1.600000		0.041235	
2.200000			0.006194
2.800000		0.000472	
3.400000	0.000019		
suma	0.129487	0.041707	0.006194

$$I_{0.6} = \frac{0.6}{3}(0.129487 + 4 * 0.0041707 + 2 * 0.006194)$$

$$I_{0.6} = 0.061741 \approx 0.06174$$

$$|I(f) - I_{0.6}(f)| \approx \frac{|I_{0.6}(f) - I_{1.2}(f)|}{2^4 - 1} = 0.24 * 10^{-5}$$

Ukupna greška = greška metode + greška odsecanja + greška zaokruživanja + zaokruživanje rešenja:

$$R = R_M + R_O + R_Z + R_R$$

$$R = 0.24 * 10^{-5} + \frac{1}{2}10^{-5} + 2.4 * \frac{1}{2}10^{-6} + \frac{1}{2}10^{-5} \leq 10^{-5}\,!$$

2.4 = (b-a)

Rezultat nije tačan zato što na ovom primeru Rungeova ocena greške ne radi ;(
Ali probaćemo Rungeovu ocenu još jednom sa duplo manjim intervalom:

$$I_{0.3} = 0.062667$$

$$I_{0.15} = 0.062724$$

$$|I(f) - I_{0.15}(f)| \approx \frac{|I_{0.3}(f) - I_{0.15}(f)|}{2^4 - 1} = 0.38 * 10^{-5}$$

Primetićemo da je sada Rungeova ocena greške VEĆA nego malo pre!!!

Ovo je primer gde Rungeova ocena greške ne radi.. Moraćemo da koristimo Simpsonovu forumulu za ocenu greške.

Zadatak br9. Naći x za koje važi:
Raditi sa 4 decimale.

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt = 2$$

Primetimo, prvo da je podintegralna funkcija pozitivna i da možemo da pronađemo rešenje za x>0.
Osnovnom Simpsonovom formulom nalazimo koliko je, npr F(1) i F(1.5).
Potreban nam je neparan broj čvorova, uzećemo da je prvo n=5

x	*1	*4	*2
0.0000	1.0000		
0.2500		1.0645	
0.5000			1.2840
0.7500		1.7551	
1.0000	2.7183		
suma	3.7183	2.8195	1.2840

$$F(1)_{0.25} = \frac{0.25}{3}(3.7183 + 4 * 2.8195 + 2 * 1.2840)$$

$$F(1)_{0.25} = 1.4637$$

x	*1	*4	*2
0.0000	1.0000		
0.3750		1.1510	
0.7500			1.7551
1.1250		3.5453	
1.5000	9.4877		
suma	10.4877	4.6963	1.7551

$$F(1.5)_{0.375} = \frac{0.375}{3}(10.4877 + 4 * 4.6963 + 2 * 1.7551)$$

$$F(1.5)_{0.375} = 4.0979$$

Očigledno je rešenje negde između 1 i 1.5 .. Izračunaćemo vrednost integrala za x=1.25

x	*1	*4	*2
0.0000	1.0000		
0.3125		1.1026	
0.6250			1.4779
0.9375		2.4083	
1.2500	4.7707		
suma	5.7707	3.5109	1.4779

$$F(1.25)_{0.3125} = \frac{0.3125}{3}(5.7707 + 4*3.5109 + 2*1.4779)$$

$$F(1.25)_{0.3125} = 2.3719$$

Sada imamo 2 tačke (tačnije imamo 3 ali radićemo samo sa dve) i imamo vrednosti funkcije u tim tačkama. Funkciju interpolišemo polinomom prvog stepena.

$$L_1(x) = \frac{x-1.25}{1-1.25} * F(1) + \frac{x-1}{1.25-1} * F(1.25)$$

$$L_1(x) = 3.6328x - 2.1691$$

Približno rešenje jednačine F(x)=2 dobijamo kao rešenje jednačine L(x)=2.

$$L_1(x) = 3.6326x - 2.1687 = 2$$

$$x = 1.1476$$