INVERZNA INTERPOLACIJA

- Pretpostavimo da je neka funckija data tablično:

$$
\begin{array}{cccccc}
x & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
y = f(x) & y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_n
\end{array}
$$

- **ZADATAK**: Naći nulu funkcije f(x), odnosno naći x* takvo da je f(x*)=0.
- **RAZLIKUJEMO DVA SLUČAJA**:
  - Tablica je ekvidistantna (koristimo Njutnov interpolacioni polinom)
  - Tablica nije ekvidistantna (invertujemo tablicu i koristimo Lagranžov interpolacioni polinom ili Njutnov sa podeljenim razlikama).

PRIMER: Naći x_1 i x_2 takvo da je $f(x_1) = 0.25$ i $f(x_2) = 0.8$ za tablično zadatu funkciju.

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	0.1763			
		0.1877		
20	0.3640		-0.0243	
		0.1634		0.1726
30	0.5274		0.1483	
		0.3117		
40	0.8391			

Rešenje:

$y(x_1) = 0.25 \Rightarrow 0.1763 < 0.25 < 0.3640$

$\Rightarrow$ koristimo I Njutnov int.polinom

$y(x_2) = 0.80 \Rightarrow 0.5274 < 0.80 < 0.8391$

$\Rightarrow$ koristimo II Njutnov int.polinom

I Njutnov interpolacioni polinom: $$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

Nama je nepoznato q !!!

$$q\Delta y_0 = y - y_0 - \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$q = \frac{1}{\Delta y_0}\left(y - y_0 - \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \right)$$

q se dobija METODOM ITERACIJE

Zamenimo vrednosti iz tablice, doićemo da je:

$$q = \frac{1}{0.1877}\left(0.25 - 0.1763 - \frac{q(q-1)}{2!}(-0.0243) - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}0.1726 \right)$$

$$q = 0.3926 + 0.0647q(q-1) - 0.1533q(q-1)(q-2)$$

Za početno q možemo uzeti bilo koju vrednost ali se najčešće uzima slobodni član. $q_1 = 0.3926$

$$q_{i+1} = 0.3926 + 0.0647q_i(q_i - 1) - 0.1533q_i(q_i - 1)(q_i - 2)$$

Kroz nekoliko iteracija dobićemo da je:

$$q_2 = 0.3184$$
$$q_3 = 0.3226$$
$$q_4 = 0.3223$$
$$q_5 = 0.3223$$

Dakle, traženo q je jednako 0.3223. Odnosno x = 10 + 0.3223*0.1 = 13.223

II Njutnov interpolacioni polinom: $y = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}$

Nama je nepoznato q !!!

$$q\Delta y_2 = y - y_3 - \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_1 - \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$q = \frac{1}{\Delta y_2}\left(y - y_3 - \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_1 - \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_0\right)$$

q se dobija METODOM ITERACIJE

Zamenimo vrednosti iz tablice, doićemo da je:

$$q = \frac{1}{0.3117}\left(0.8 - 0.8391 - \frac{q(q+1)}{2!}(0.1483) - \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}0.1726\right)$$

$$q = -0.1254 + 0.4758q(q+1) - 0.5537q(q-1)(q-2)$$

Za početno q možemo uzeti bilo koju vrednost ali se najčešće uzima slobodni član. $q_0 = -0.1254$

$$q_{i+1} = -0.1254 + 0.4758q_i(q_i - 1) - 0.5537q_i(q_i - 1)(q_i - 2)$$

Kroz nekoliko iteracija dobićemo da je:

$q_1 = -0.0637$

$q_2 = -0.0898$

$q_3 = -0.0778$

....

$q_9 = -0.0816$

$q_{10} = -0.0815$

$q_{11} = -0.0815$

Dakle, traženo q je jednako -0.0815
Odnosno x = 40 - 0.0815*0.1 = 39.185

PRIMER 2: Funkcija je data tablično. Naći nulu funkcije.

X	2	2.5	3.5	4
Y = f(x)	0.9093	0.5985	-0.3508	-0.7568

Mreža nije ekvidistantna !!! Koristimo Lagranžov interpolacioni polinom.

Prvo invertujemo tablicu i Y složimo u rastući raspored.

Y = f(x)	-0.7568	-0.3508	0.5985	0.9093
X	4	3.5	2.5	2

Sada je Y nepoznata a X poznata vrednost (X = 0).

Korsitićemo "trik" a možemo i postupno da nalazimo Lagranžov interpolacioni polinom.

$$
\left|\begin{array}{ccccc} y-y_0 & y_0-y_1 & y_0-y_2 & \dots & y_0-y_n \\ y_1-y_0 & y-y_1 & y_1-y_2 & \dots & y_1-y_n \\ y_2-y_0 & y_2-y_1 & y-y_2 & \dots & y_2-y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n-y_0 & y_n-y_1 & y_n-y_2 & \dots & y-y_n \end{array}\right| \begin{array}{c} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \\ D_n \end{array}
\qquad w_n
$$

$$
\left|\begin{array}{cccc} 0.7568 & -0.4060 & -1.3553 & -1.6661 \\ 0.4060 & 0.3508 & -0.9493 & -1.2601 \\ 1.3553 & 0.9493 & -0.5985 & -0.3108 \\ 1.6611 & 1.2601 & 0.3108 & -0.9093 \end{array}\right| \begin{array}{l} D_1 = -0.693815 \\ D_2 = 0.170370 \\ D_3 = 0.239323 \\ D_4 = -0.593327 \end{array}
$$

$$
w = 0.14448
$$

$$
p_3(x) = w(y)\left[\frac{x_1}{D_1} + \frac{x_2}{D_2} + \frac{x_3}{D_3} + \frac{x_4}{D_4}\right]
$$

$$
p_3(y) = 0.14448\left[-\frac{4}{0.693815} + \frac{3.5}{0.170370} + \frac{2.5}{0.239323} - \frac{2}{0.593327}\right]
$$

$$
p_3(0) = 3.1644
$$

Računali smo na 6 decimala zbog deljenja a rešenje ćemo zaokružiti na 4 decimale zato što su podaci u tablici dati na 4 decimale.

NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

Za aproksimaciju funkcije (izvoda funkcije) koristimo izvod njenog interpolacionog polinoma.

$$f^{(k)}(x) = L_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x)$$

L_n Interpolacioni polinom

R_n Greška interpoalcionog polinoma

Ako uzmemo da je funkcija interpolirana I Njutnovim interpolacionim polinomom, onda se izvod te funkcije dobija diferenciranjem I Njutnovog interpolacionog polinoma:

$$y' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots\right] \qquad q = \frac{x-x_0}{h}$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right] \qquad q' = \frac{1}{h}$$

Greška numeričkog diferenciranja je:

$$|R_n^{(k)}(x)| \le \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} \max |f^{(n+j-1)}(\xi)|\,|w_{n+1}^{(k-j)}(x)|$$

Odnosno

$$|R_n^{(k)}(x)| \le \left(\frac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!}\,|q(q-1)\ldots(q-n)|\right)_q^{(k)}$$

k-ti izvod po q

PRIMER: Koristimo tablicu iz primera 1. Naći y’(10), y’(16), y’’(16).

X	Y	deltaY	delta2Y	delta3Y
10	0.1763			
		0.1877		
20	0.3640		-0.0243	
		0.1634		0.1726
30	0.5274		0.1483	
		0.3117		
40	0.8391			

Dakle, h=10.
q = (16-10)/10 = 0.6
Koristimo I Njutnov interpolacioni polinom.

$$y' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]$$

$$x = 16 \Rightarrow q = 0.6$$

$$y'(16) = \frac{1}{10}\left[0.1877 + \frac{0.2}{2!}(-0.0243) + \frac{-0.52}{3!}0.1726\right] = 0.0170$$

$$y''(16) = \frac{1}{100}\left[-0.0243 + (0.6-1)\cdot 0.1726\right] = -0.0009$$

$$x = 10 \Rightarrow q = 0$$

$$y'(10) = \frac{1}{10}\left[0.1877 - \frac{1}{2}(-0.0243) + \frac{2}{3!}0.1726\right] = 0.0257$$

Zadatak: Sa tačnošću 0.0001 odrediti koordinate tačke ekstrema funkcije date tabelom:

X	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
Y=f(x)	1.2431	1.1486	1.2095	1.4606	1.9391	2.6846

Ekstremne vrednosti funkcije dobijamo u nulama prvog izvoda, odnosno y'(x) = 0.
Dakle, imamo da je y'=0, ostalo je da pronađemo x.
Forimarmo prvo tablicu konačnih razlika obzirom da je tablica ekvidistantna.

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.3	1.2431				
		-0.0945			
1.4	1.1486		0.1544		
		0.0609		0.0348	
1.5	1.2095		0.1902		0.0024
		0.2511		0.0372	
1.6	1.4606		0.2274		0.0024
		0.4785		0.0396	
1.7	1.9391		0.2670		
		0.7455			
1.8	2.6846				

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$x = x_0 + qh$$

$$y' = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!}\Delta^4 y_0\right]$$

Primetimo da konačne razlike prvog reda menjaju znak u okolini tačke x = 1.4. Pretpostavljamo da je tu ekstremna vrednost. Uzećemo da se traženo x nalazi na intervalu [1.3 1.4].

$$y' = 0 = \frac{1}{0.1}\left[-0.0945 + \frac{2q-1}{2!}0.1554 + \frac{3q^2-6q+2}{3!}0.0348 + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!}0.0024\right]$$

$$q = 0.0945 + 0.5 * 0.1554 - \frac{3q^2-6q+2}{3!}0.0348 - \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{4!}0.0024$$

$$q_1 = -0.0094$$

$$q_2 = 0.1625$$

$$q_3 = 0.1272$$

$$q_4 = 0.1345$$

$$q_5 = 0.133$$

$$q_6 = 0.1333$$

$$q_7 = 0.1333$$

q dobijamo metodom iteracije. q=0.1333.

Dakle, x = 1.3 + 0.1333*0.1 = 1.31333.

f(1.31333) se dobija korišćenjem I Njutnovog interolacionog polinoma, y ~ 1.3.