INTERPOLACIJA

• Pretpostavimo da je neka funckija data tablično:

$$\begin{array}{llllll} x & x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \quad \text{čvorovi interpolacije} \\ y = f(x) & y_0 & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \quad \text{vrednosti funckije u čvorovima} \end{array}$$

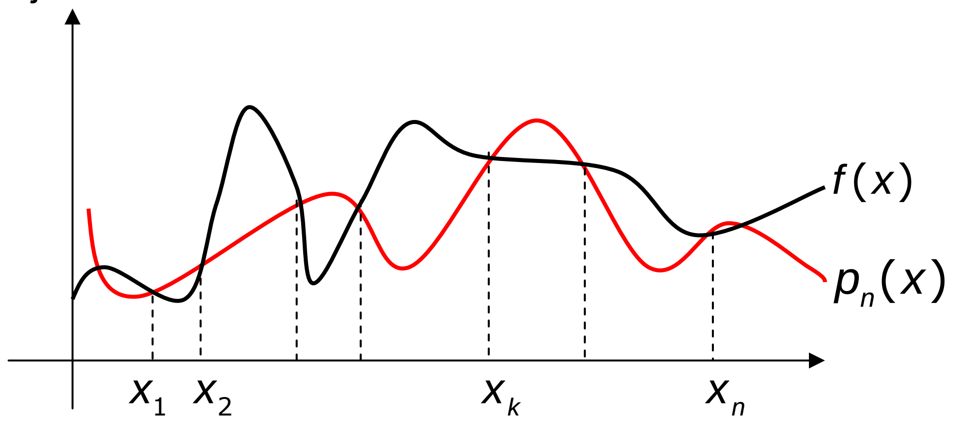
• INTERPOLACIJA je postupak nalaženja neke druge funkcije koja je bliska prvoj (u nekom smislu), odnosno nalaženje funkcije koja dobro aproksimira i koja je laka za račun.

Na primer, tražimo polinom n-tog stepena ako nam je data funkcija sa n+1 čvorova.

Dakle, tražimo polinom stepena n takav da važi: $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$

i nazivamo ga INTERPOLANTOM.

• Polinom i data funcija se poklapaju u čvorovima interpolacije dok u ostalim čvorovima to ne mora da bude slučaj.



Ako je rastojanje između čvorova jednako, čvorove nazivamo EKVIDISTANTNIM.
Ekvidistantni čvorovi čine ekvidistantnu mrežu.
Rastojanje između dva čvora naziva se KORAK INTERPOLACIJE i obeležavamo ga sa h,

$$h = d(x_i, x_{i+1})$$

Hoćemo da pokažemo da postoji polinom p(x) takav da je $f(x_i) = y_i, p_n(x_i) = y_i$

Polinomi mogu biti sledećeg oblika: $p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_i),\qquad l_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & , i = k \\ 0 & , i \neq k \end{cases}$

Mora da važi: $p_n(x_i) = y_i \quad p_n(x_i) = \sum y_k l_k(x_i) = \sum y_k \delta_{ik} = y_i, \qquad i = 0, \dots, n$

Da li postoje polinomi l_k ? $\quad l_k(x) = c(x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)$

l_k nazivamo BAZNIM POLINOMIMA

Neka je

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$$w'(x_k) = (x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)$$

Tada je

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

Polinom određen na ovaj način nazivamo **LAGRANŽOV POLINOM**:

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_i)w'_{n+1}(x_i)} f(x_i) \qquad w_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

• **GREŠKA LAGRANŽOVOG INTERPOLACIONOG POLINOMA:**

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)$$

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

•**ZADATAK 1:** Konstruisati polinom drugog stepena za funkciju $\sqrt{x}$ ako su čvorovi interpolacije

$$x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$$

Izračunati p(115) i oceniti grešku.

Rešenje:

x_i	100	121	144
y_i	10	11	12

Tablično zadata funkcija $f(x) = \sqrt{x}$

Tražimo polinom: $p_2(x)$

Tražimo grešku: $R_2(x)$

Formiramo interpolacioni polinom:

$$p_2(x) = \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}10 + \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}11 + \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}12$$

$$p_2(x) = 4.14568 + 0.06752x - 0.00009x^2$$

$$p_2(115) = 10.72023$$

$$\sqrt{115} = 10.72381$$

•Ostalo je da ocenimo grešku:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'' = -\frac{1}{4x^{3/2}}, f''' = \frac{3}{8x^{5/2}}$$

$$M_3(x) = \max_{[100,144]} |f'''(x)| = \frac{3}{8 \cdot 100^{5/2}} = \frac{3}{8} 10^{-5}$$

uzimamo da je x=100 zato što je 3.izvod opadajuća funkcija.

Greška polinoma je:

$$|R_2(115)| \le \frac{3/8 \cdot 10^{-5}}{3!} |(115-100)(115-121)(115-144)| = 1.63 \cdot 10^{-3}$$

$$|R_2(115)| \le 1.63 \cdot 10^{-3}$$

Greška je velika. Koeficijente polinoma je trebalo računati na 8 decimala:

$$L_2(115) = -0.00009411x^2 + 0.06842171x + 4.0993788$$

$$L_2(115) = 10.723270$$

SKALIRANJE: Koristimo skaliranje kako bi smanjili grešku. Uvodimo smenu

x = at + b .

Dobićemo polinom $\tilde{p}_2(t) = p_2(x)$ smena: x = 50 t + 100

Nova tablica:

x_i	100	121	144
t_i	0	0.42	0.88
y_i	10	11	12

•Formiramo polinom na isti način kao malo pre, samo što je ovaj polinom u funkciji od *t*.

$$p_2(t) = \frac{(t-0.42)(t-0.88)}{(0.42-0)(0.88-0)}10 + \frac{(t-0)(t-0.88)}{(0.42-0)(0.42-0.88)}11 + \frac{(t-0)(t-0.44)}{(0.88-0)(0.88-0.42)}12$$

$$p_2(t) = 10.0000 + 2.47977t - 0.23527t^2$$

• Dobili smo tačniji rezultat od prethodnog. $p_2(115) = \tilde{p}_2(0.30) = 10.72276$

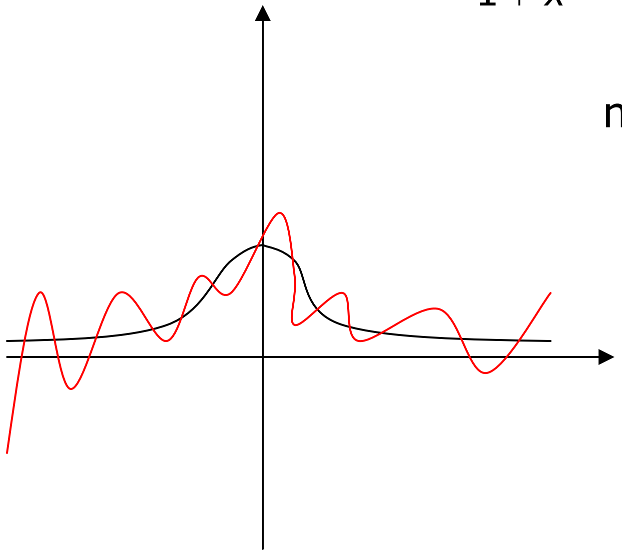
• Bolje rešenje dobijamo ako radimo sa više decimala.

•Da li bi nam veći broj čvorova omogućio bolji rezultat?

Posmatramo interval [a, b] = [-5, 5] sa ekvidistantnim čvorovima

$$x_k = -5 + \frac{10}{n}k, k = 0,1,\ldots,n$$

i funkciju $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



$$\max |f(x) - p_n(x)| \to +\infty, n \to \infty$$

U ovom slučaju, grečka se povećava sa brojem čvorova (veću tačnost imamo ako je broj čvorova manji).

TRIK: Ako nas zanima vrednost polinoma samo u jednoj tačkia ne interesuje nas kako taj polinom izgleda, formiramo tabelu:

$$\left|\begin{array}{ccccc} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 & \dots & x_0-x_n \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 & \dots & x_1-x_n \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 & \dots & x_2-x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-x_0 & x_n-x_1 & x_n-x_2 & \dots & x-x_n \end{array}\right| \begin{array}{l} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \\ D_n \end{array}$$

D_0 — proizvod elemenata 1. vrste

D_n — proizvod elemenata n. vrste

w_n — proizvod elemenata glavne dijagonale

$$D=(x-x_0)w'(x)$$

$$p_n(x)=w(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{D_i}$$

x_i	100	121	144
y_i	10	11	12

$$\left|\begin{array}{ccc} 15 & -21 & -44 \\ 21 & -6 & -23 \\ 44 & 23 & -29 \end{array}\right| \begin{array}{l} D_0=13860 \\ D_1=2898 \\ D_2=-29484 \end{array}$$

$$w_3=2610$$

$$p_2(115)=2610\cdot\left(\frac{10}{13860}+\frac{11}{2898}-\frac{12}{29848}\right)=10.7276$$

ZADATAK 2: Neka je $M_2 = \max\limits_{[a,b]} | f''(x) |$

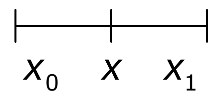
Dokazati da se funkcija f na segmentu [a, b] može interpolirati sa korakom h, gde je $h \le \sqrt{\dfrac{8\varepsilon}{M_2}}$ tako da greška **linearne interpolacije** R_1 nije veća od ε .

Rešenje:

Uzećemo da je $x \in [x_i, x_{i+1}]$ i posmatramo samo ta dva čvora (pravimo polinom na osnovu dva čvora interpolacije). Transliraćemo interval tako da $x_i \to x_0$

$$M_2 = \max_{[a,b]} | f''(x) |$$

$$R_1 \le \frac{M_2}{2!} | (x - x_0)(x - x_1) |$$



Neka je, npr:

$$x = x_0 + \frac{h}{2}, \qquad x_{i+1} - x_i = h$$

$$R_1(x) \le \frac{M_2}{2!} | (x_0 + \frac{h}{2} - x_0)(x_0 + \frac{h}{2} - x_1) | = \frac{M_2}{2!} \frac{h^2}{4}$$

$$R_1(x) \le \frac{M_2 h^2}{2!} < \varepsilon \qquad (h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}})$$

h nazivamo KORAK LINEARNE INTERPOLACIJE

ZADATAK 3: Neka je $M_3 = \max\limits_{[a,b]} | f'''(x) |$

Dokazati da se na funkcija f na segmentu [a, b] može tabelirati sa korakom h, gde je $h \le \sqrt[3]{\dfrac{16\varepsilon}{M_3}}$ tako da greška **kvadraturne interpolacije** nije veća od ε

Rešenje:

Uzećemo da je $x \in [x_0, x_2]$ i posmatramo sva tri čvora (pravimo polinom na osnovu tri čvora interpolacije). Pretpostavićemo (bez umanjenja opštosti) da se x nalazi između drugog i trećeg čvora.

$$x = x_1 + \frac{h}{2}, \quad x_0 = x_1 - h, \quad x_2 = x_1 + h$$

Obzirom da su nam paznata tri čvora, formiramo polinom drugog stepena (pa je i greška 2. stepena)

$$M_3 = \max_{[x_0, x_2]} | f'''(x) |$$

$$R_2 \leq \frac{M_3}{2!} | (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) |$$

$$R_2(x) \leq \frac{M_3}{3!} | (x_1 + \frac{h}{2} - (x_1 - h))(x_1 + \frac{h}{2} - x_1)(x_1 + \frac{h}{2} - (x_1 + h)) | = \frac{M_3}{3!} \frac{3h^3}{8}$$

$$R_2(x) \leq \frac{M_3 h^3}{16} < \varepsilon \qquad (h \leq \sqrt[3]{\frac{16\varepsilon}{M_3}})$$

Ovako zadato h nazivamo KORAKOM KVADRATNE INTERPOLACIJE.

ZADATAK 4: Funkcija je zadata tablično.

Naći Lagranžov polinom koji interpolira datu funkciju i približno izračunati a) f(0) b) f(1.16).

a)

x_i	-3	-1	1	2
y_i	-2.28	-1.68	3.68	4.82

b)

x_i	1.1275	1.1503	1.1735	1.1972
y_i	0.11971	0.13957	0.15931	0.17902

Rešenje a)

$$p_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-3+1)(-3-1)(-3-2)}(-2.28) + \frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{(-1+3)(-1-1)(-1-2)}(-1.68)$$

$$+\frac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(1+3)(1+1)(1-2)}3.68 + \frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(2+3)(2+1)(2-1)}4.82 =$$

$$p_3(x) = -0.2217x^3 - 0.0700x^2 + 2.9017x + 1.0700$$

$$p_3(0) = 1.0700$$

b) za domaći

NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM SA PODELJENIM RAZLIKAMA

•Posmatramo tablično zadatu funkciju:
(čvorovi ne moraju biti ekvidistantni)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	....	y_n

• Podeljene razlike definišemo na sledeći način:

$$\textit{reda}\ \ 0 \qquad f[x_0] = f(x_0)$$

$$\textit{reda}\ \ 1 \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\textit{reda}\ \ 2 \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots$$

$$\textit{reda}\ \ n \qquad f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

• Nad skupom od (n+1) interpolacionih čvorova može se konstruisati interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama koji je najviše stepena n !!!

Tablica podeljenih razlika:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & y_i = f[0] & f[1] & f[2] & & f[n] \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & y_1 & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & & \\
x_2 & y_2 & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \ldots & f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
x_3 & y_3 & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM SA PODELJENIM RAZLIKAMA je oblika:

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Greška:

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n] w_{n+1}(x)$$

$$R_n \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | w(x) |$$

ZADATAK 5: Izračunati f(1.16) za tablično zadatu funkciju.

x_i	1.1275	1.1503	1.1735	1.1972
y_i	0.11971	0.13957	0.15931	0.17902

Formiramo tablicu podeljenih razlika:

x_i	y_i	$f[1]$	$f[2]$	$f[3]$
1.1257	0.11971			
		0.871053		
1.1503	0.13957		−0.438935	
		0.850862		0.418978
1.1735	0.15931		−0.409732	
		0.831646		
1.1972	0.17902			

Interpolacioni polinom je oblika:

$$p_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Odnosno:

$$p_3(x) = 0.1197 + 0.8711(x - 1.1257) - 0.4389(x - 1.1257)(x - 1.1503) + \\ + 0.4190(x - 1.1257)(x - 1.1503)(x - 1.1735)$$

$$p_3(1.16) = 0.14788$$

NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM SA KONAČNIM RAZLIKAMA

• Koristi se isključivo na ekvidistantnim mrežama !!!

•**DEFINICIJA:** Konačna (centralna) razlika je $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$

$\Delta y(x)$ linearni operator po y

$\Delta^{k+1} y(x)$ linearni operator po y (kao kompozicija linearnih operatora) $\Delta^{k+1} y(x) = \Delta(\Delta^k y(x))$

• Formiramo tablicu konačnih razika

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & y_i & \Delta y_i & \Delta^2 y_i & \Delta^3 y_i & \Delta^4 y_i \\
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \Delta y_0 & & & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \,\ldots\ldots \\
 & & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & \ldots & \Delta^4 y_1 \\
 & & \Delta y_3 & \ldots & & \ldots \\
x_4 & y_4 & \ldots & & & \\
\ldots & \ldots & & & &
\end{array}
$$

mora da važi:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i)$$

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Koristimo modifikovani Lagranžov polinom:

$$p_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

Uvođenjem određenih smena dobijamo Njutnove interpolacione polinome i to:

Smenom $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ dobijamo **I NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM**

$$p_n{}^{I}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\cdots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

Smenom $q = \dfrac{x - x_n}{h}$ dobijamo **II NJUTNOV INTERPOLACIONI POLINOM**

$$p_n{}^{II}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\cdots(q+(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

I Njutnov interpolacioni polinom se koristi za $x \in [x_0, x_1]$ kao i za $x < x_0$
II Njutnov interpolacioni polinom se koristi za $x \in [x_{n-1}, x_n]$ kao i za ekstrapolaciju $x > x_n$

Greška: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x), \quad f^{(n+1)}(\xi) = h^{n+1}\Delta^{n+1} f$

I Njutnov int.polinom: $R_n(x) \approx \dfrac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} \,|\, q(q-1)\ldots(q-n) \,|$

II Njutnov int.polinom: $R_n(x) \approx \dfrac{\Delta^{n+1} y}{(n+1)!} \,|\, q(q+1)\ldots(q+n) \,|$

Ove ocene greške ne važe za ekstrapolaciju pa je nju potrebno izbegavati !!

ZADATAK 6: Funkcija je zadata tablično. Odrediti y(18), y(53), y(12).

X	Y	deltaY	delta2Y	delta3Y	delta4Y
15	0.2588				
		0.0832			
20	0.342		-0.0026		
		0.0806		-0.0006	
25	0.4226		-0.0032		0
		0.0774		-0.0006	
30	0.5		-0.0038		0
		0.0736		-0.0006	
35	0.5736		-0.0044		0.0001
		0.0692		-0.0005	
40	0.6428		-0.0049		0
		0.0643		-0.0005	
45	0.7071		-0.0054		0.0002
		0.0589		-0.0003	
50	0.766		-0.0057		
		0.0532			
55	0.8192				

Rešenje:

Formiramo tablicu konačnih razlika.

u poslednje kolone možemo da zapisujemo samo značajne cifre (kako bi izbegli pisanje nula.

Koliko je kolona potrebno računati?

Zaustavljamo se kada je

$$\left|\Delta^n y\right| \leq 2^n$$

Formiraćemo posebne polinome za svaku tačku.

X = 18 (x se nalazi između prva dva čvora naše tablice => koristimo I Njutnov int.polinom)

$$p_3^{I}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$p_3^{I}(x) = 0.2588 + q \cdot 0.0832 + \frac{q(q-1)}{2!}(-0.0026) + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}(-0.0006)$$

$$h = 5 \quad q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{18-15}{5} = 0.6$$

$$p_3^{I}(x) = 0.2588 + 0.6 \cdot 0.0832 + \frac{0.6 \cdot (-0.4)}{2!}(-0.0026) + \frac{0.6 \cdot (-0.4) \cdot (-1.4)}{3!}(-0.0006)$$

$$p_3^{I}(18) = 0.3090$$

X = 53 (x se nalazi između poslednja dva čvora naše tablice => koristimo II Njutnov int.polinom)

$$p_3^{II}(x) = y_0 + q\Delta y_8 + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_7 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_6$$

$$p_3^{II}(x) = 0.8192 + q \cdot 0.0532 + \frac{q(q+1)}{2!}(-0.0057) + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}(-0.0003)$$

$$h = 5 \quad q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{53-55}{5} = -0.4$$

$$p_3^{II}(x) = 0.8192 - 0.4 \cdot 0.0532 + \frac{0.6 \cdot (-0.4)}{2!}(-0.0057) + \frac{0.6 \cdot (-0.4) \cdot (1.6)}{3!}(-0.0003)$$

$$p_3^{II}(53) = 0.7986$$

X = 12 (ekstrapolacija, koristimo I Njutnov int.polinom obzirom da je 12<15)

$$q = \frac{12-15}{5} = -0.6 \qquad p_3^{I}(12) = \ldots = 0.2079$$

Ostalo je da ocenimo grešku:

$$|R_3(x)| \leq \frac{\Delta^{n+1} y}{4!} |q(q \pm 1)(q \pm 2)(q \pm 3)|$$

$$x = 18 \quad \Rightarrow \quad R_3(18) \leq \frac{(0 + 2^4) \cdot 10^{-4}}{4!}(0.6 \cdot 0.4 \cdot 1.4 \cdot 2.4) = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$x = 53 \quad \Rightarrow \quad R_3(53) \leq \frac{(2 + 2^4) \cdot 10^{-4}}{4!}(0.4 \cdot 0.6 \cdot 1.6 \cdot 2.6) = 8 \cdot 10^{-5}$$

Kod ocene greške za x = 18 imamo izraz $(0 + 2^4) \cdot 10^{-4}$ koji se dobija na sledeći način:

$$(0 + 2^4) \cdot 10^{-4} = (\Delta^4 y_0 + \text{greška pri izračunavanju kon.razlika}) \cdot (\text{broj decimala})$$

Grešku ne proveravamo za ekstrapolaciju.

ZADATAK 7: Integral verovatnoće $f(x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

dat je sledećom tabelom.

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25
f(x)	0.68269	0.70628	0.72867	0.74986	0.76986	0.78870

Izračunati f(1.235) i oceniti grešku reltata.

Rešenje:

Formiramo tablicu konačnih razlika za zadatu funkciju.

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.00	0.68269			
		0.02359		
1.05	0.70628		-0.00121	
		0.02239		0.00001
1.10	0.72867		-0.00120	
		0.02119		0.00002
1.15	0.74986		-0.00118	
		0.02000		0.00002
1.20	0.76986		-0.00117	
		0.01884		
1.25	0.78870			

Tačka u kojoj se traži približna vrednost integrala verovatnoće pripada intervalu koji je određen sa poslednja dva čvora u tabeli.

Koristimo II Njutnov interpolacioni polinom.

Kako je x = 1.235 uzećemo da je $x_0 = 1.25$

Korak h = 0.05.

$$p_n^{II}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\cdots(q+(n-1))}{n!}\Delta^n y_0$$

$$p_n^{II}(1.235) = 0.78317$$

$$R_3(1.235) \le \frac{\Delta^4 y_{sr}}{24}\,|\,q(q+1)..(q+3)\,|$$

$$R_3(1.235) \approx 1.6\cdot 10^{-7}$$

GAUSOV INTERPOLACIONI POLINOM

Neka je funkcija y = f(x) zadata vrednostima $y_i = f(x_i)$ u 2n+1 jednako razmaknutim čvorovima $x_0, x_{\pm 1}, x_{\pm 2} \dots x_{\pm n}$

Problem: Naći polinom p(x) spena najviše 2n takav da je $p_{2n}(x_i) = y_i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \dots + a_{2n-1}(x - x_{-n+1})(x - x_{-n+2})\dots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_{n-1}) +$$
$$+ a_{2n}(x - x_{-n+1})(x - x_{-n+2})\dots(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_n)$$

Tražimo koeficijente a_i koje određujemo iz uslova da je $p(x_i) = f(x_i)$

$$x = x_0 \qquad p(x_0) = a_0 \qquad a_0 = f(x_0)$$
$$x = x_1 \qquad p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \qquad \Rightarrow \quad a_1 = \Delta y_0 \,/\, (1!h)$$
$$x = x_2 \qquad p(x_2) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \qquad a_2 = \Delta^2 y_{-1} \,/\, (2!h^2)$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3},\ a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4}, \dots$$
$$a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!h^{2n-1}},$$
$$a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}$$

Uvodimo oznaku: $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ i vraćamo u početni polinom, dobićemo:

$$p(x_0 + hq) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots$$
$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \dots +$$
$$+ \frac{q(q-1)(q+1)\dots(q-(n-1))(q+(n-1))(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

<u>I GAUSOV INTERPOLACIONI POLINOM</u>

-ovim polinomom se tačnost prebacuje malo unapred i nazivamo ga interpolacionim polinomom za Interpolaciju unapred.

Ako polinom p(x) tražimo u sledećem obliku:

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_{-1})(x-x_0)+a_3(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$$
$$+\ldots+a_{2n-1}(x-x_{-n+1})(x-x_{-n+2})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-1})+$$
$$+a_{2n}(x-x_{-n})(x-x_{-n+1})\ldots(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-1})$$

Analogno prethodnom postupku, dobijamo polinom

$$p(x_0+hq)=y_0+q\Delta y_{-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q-1)(q+1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}+$$
$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)}{5!}\Delta^5 y_{-2}+\ldots+$$
$$+\frac{q(q-1)(q+1)\ldots(q+(n-1))(q-(n-1))(q+n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

II GAUSOV INTERPOLACIONI POLINOM

Drugi Gausov interpolacioni polinom se još naziva interpolacionom polinomom za interpolaciju unazad i on vraća vrednost funkcije koja je malo manja od stvarne vrednosti.

GREŠKA

$$R_{2n}(x)=f(x)-p_{2n}(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\Pi_{2n+1}(x)$$
$$\Pi_{2n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)\ldots(x-x_{-n})(x-x_n)$$

STIRLINGOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Ako uzmemo aritmetičke sredine I i II Gausove interpolacione formule, dobićemo Stirlingovu interpolacionu formulu:

$$p(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q-1)(q+1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)}{5!}\frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots$$

$$+\frac{q(q-1)(q+1)\ldots(q-(n-1))(q+(n-1))}{(2n-1)!}\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q-1)(q+1)\ldots(q-(n-1))(q+(n-1))}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

GREŠKA:

$$R_n(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} q(q-1)(q+1)\ldots(q-n)(q+n),\ x \in [x_{-n}, x_n]$$

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q-1)(q+1)\ldots(q-n)(q+n)$$

BESELOVA INTERPOLACIONA FORMULA

Beselovu interpolacionu formulu dobijamo pomoću II Gausove interpolacione formule.
Neka je fukcija y = f(x) zadata vrednostima $y_i = f(x_i)$ za $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, n+1$ sa 2n+2 ekvidistanta čvora. Iz II Gausove interpolacione formule, uzimajući x_0, y_0 i x_1, y_1 za početne vrednosti.
Njihova aritmetička sredina daje Beselovu interpolacionu formulu:

$$P(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2!} + \frac{q(q-\frac{1}{2})(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$

$$+ \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \ldots + \frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)\ldots(q-(n-1))(q+(n-1))(q-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}$$

GREŠKA:

$$R(x) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} q(q-1)(q+1)\ldots(q-n)(q+n)(q-n+1),\ x \in [x_{-n}, x_{n+1}]$$

$$R_{2n}(x) = \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q-1)(q+1)\ldots(q-n)(q+n)(q-n-1)$$

Ako je $|q| \leq 0.25$ koristimo Stirlingovu interpolacionu formulu, dok za $0.25 \leq q \leq 0.75$ koristimo Beselovu Interpolacionu formulu.

ZADATAK 8: Na segmentu [0, 1] sa korakom h = 0.1 tabelirati funkciju $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ a zatim približno izračunati vrednosti funkcije u tačkama 0.585 i 0.715 Beselov i Stirlingov int polinom.

Napomena:
Računati sa 4 decimale i izračunati tablicu konačnih razlika zaključno sa 4. redom.

Rešenje:
Formiramo tablicu konačnih razlika za zadatu funkciju.

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	Δy
0	1.0000				
		0.1107			
0.1	1.1107		0.0248		
		0.1355		0.0064	
0.2	1.2462		0.0312		0.0024
		0.1667		0.0088	
0.3	1.4130		0.0400		0.0035
		0.2067		0.0123	
0.4	1.6197		0.0523		0.0054
		0.2590		0.0177	
0.5	1.8787		0.0700		0.0085
		0.3290		0.0262	
0.6	2.2077		0.0961		0.0140
		0.4252		0.0402	
0.7	2.6329		0.1363		0.0245
		0.5615		0.0647	
0.8	3.1944		0.2010		0.0461
		0.7625		0.1108	
0.9	3.9568		0.3118		
		1.0742			
1.0	5.0310				

x = 0.585

$$q = \frac{0.585 - 0.6}{0.1} = -0.15$$

x = 0.715

$$q = \frac{0.715 - 0.7}{0.1} = 0.15$$

Kako je u oba slučaja |q| = 0.15
Koristićemo Stirlingovu interpolacionu formulu.

Stirlingova formula je oblika:

$$p(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{q^2(q-1)(q+1)}{4!}\Delta^4 y_{-2}$$

$$p(x) = 2.2077 + \frac{0.4252 + 0.3290}{2}(-0.15) + \frac{0.0961}{2!}(-0.15)^2 +$$

$$+\frac{0.0401 + 0.0262}{2}\frac{(-0.15)(-0.15-1)(-0.15+1)}{3!}$$

$$= 2.1529$$

Greška interpolacije je:

$$R_3(x) \leq \frac{h^4 M_4}{4!} \mid q(q-1)(q+1)(q+2) \mid \approx \frac{\Delta^4 y}{4!} \mid q(q-1)(q+1)(q+2) \mid$$

$$R_3(x) \leq \frac{0.0461 + 0.0245}{24} \mid (-0.15)(-0.15-1)(-0.15+1)(-0.15+2) \mid$$

$$R_3(x) \leq 0.522 \cdot 10^{-3}$$

Tačna vrednost funkcije u tački 0.575 je 2.1530

x = 0.715 za domaći.

Zadaci za vežbu:

- Funckiju $f(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x^2}$ tabelirati na intervalu [1.55 , 2.3] sa korakom h=0.1 na 4 decimale. Koristeći konačne rezlike zaključno četvrtoh reda približno izračunati f(1.55) i proceniti grešku.

- Na intervalu [10, 15] tabelirati funkciju f(x) = lnx tako da tablica dozvoljava kvadratnu interpolaciju sa greškom ne većom od $2 \cdot 10^{-4}$ i izračunati ln10.8 i ln14.1 i proceniti grešku.