Пријемни испит за упис на Математички факултет, 27.06.2018.

Решења задатака

1. Бројеви a, $b=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ и $d=2\sqrt{3}$ су ирационални, а $c=2$ је рационалан. Одговор B).

2. Вредност израза је $2^{-b}3^{-4b}=\left(\dfrac{1}{2\cdot 3^4}\right)^b$, па мора бити $b\leqslant 0$. Одговор A).

3. Ако је $k\neq 2$, решење је јединствено, а ако је $k=2$, систем има бесконачно много решења. Одговор D).

4. Из $1=\dfrac{20}{7+a}$, се добија $a=13$ и $f(x)=\dfrac{20}{(x-3)^2+4}\leqslant f(3)=\dfrac{20}{4}=5$. Одговор C).

5. Неједначина је еквивалентна са $(1-x)(x+4)(x-3)\geqslant 0$, па су јој решења $x\in(-\infty,-4]\cup[1,3]$. Целобројна решења из $[-2,10]$ су $1,2,3$, а збир им је 6. Одговор D).

6. Дефинисана је за $x\geqslant -5$. За $x>1$ нема решења (позитивно мање од негативног), за $x\in[-5,1]$ еквивалентна са $5+x\leqslant 1-2x+x^2$, тј. са $0\leqslant -4-3x+x^2=(x+1)(x-4)$, па је скуп решења $[-5,-1]$. Одговор A).

7. Дефинисана за $x\geqslant -3$, и ту је еквивалентна са $2^x=2^{-2\sqrt{x+3}}$, тј. са $x=-2\sqrt{x+3}$. За $x>0$ нема решења (лева страна позитивна, десна негативна), за $x\leqslant 0$ се квадрирањем добија $x^2=4(x+3)$, односно $0=x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$. -2 је решење, а 6 није. Одговор C).

8. Трећи и четврти број су већи од 1, а прва два мања, па треба упоредити прва два. Због $\log_{10}\pi<2$ је $\sqrt{\log_{10}\pi^2}=\sqrt{2\log_{10}\pi}>\sqrt{\log_{10}\pi\cdot\log_{10}\pi}=\log_{10}\pi$, па је први од та два броја мањи. Одговор A).

9. AC је пречник круга, па је ACD једнакокраки правоугли троугао хипотенузе 4, одакле је $CD=DA=2\sqrt{2}$. ABC је правоугли троугао, хипотенузе 4, са угловима 30° и 60°, јер је $\angle CAB=\angle CDB$, одакле је $BC=2$ и $AB=2\sqrt{3}$. Одговор E).

10. Странице основе су $85/5=17$, $125/5=25$ и $140/5=28$, полуобим основе $(17+25+28)/2=35$, површина основе (Херонов образац) је $\sqrt{35\cdot 18\cdot 10\cdot 7}=210$, а запремина $210\cdot 5=1050$. Одгвоор E).

11. (а) $\cos 40^\circ=\sin 50^\circ<\sin 60^\circ=\sin 120^\circ$; (б) $\cos 160^\circ<0<\sin 60^\circ$; (в) $\sin 40^\circ=\sin 140^\circ$; (г) $\cos 80^\circ>0>\cos 100^\circ$. Одговор C).

12. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$, тј. $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ или $x=\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$. Из прве групе ниједан број не припада датом интервалу, а из друге групе само $\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Одговор B).

13. *Прво решење.* Круг сече осу Ox у тачкама $(0,0)$ и $(m,0)$, а осу Oy у тачкама $(0,0)$ и $(0,n)$, па је $|m|=6$ и $|n|=8$. Једначина круга је $\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{n}{2}\right)^2=\dfrac{m^2+n^2}{4}=25$, па је његов полупречник једнак 5.

Друго решење. Тачка $(0,0)$ припада кругу, па су тетиве дужина 8 и 6 под правим углом, тј. хипотенуза троугла чије су катете 6 и 8 је пречник круга, односно полупречник је 5. Одговор C).

14. Систем $x+y=2018$, $y=x^2-x+n$ има тачно једно реално решење ако и само ако је $n=2018$. Одговор D).

15. Ако је a први члан, а d разлика аритметичког низа, онда из $a(a+6d)=(a+2d)^2$ и $(a+d)+(a+5d)=70$ добијамо $a=2d$ и $2a+6d=70$, одакле је $d=7$, $a=14$ и $a_{10}=77$. Одговор D).

16. Важи $z = 4y + iy = y(4+i)$ за неко $y \neq 0$, па је $z^2 = y^2(15+8i)$. Одговор E).

17. *Прво решење.* Заменом $x = 2 + i\sqrt{3}$ у једначину добија се $(2a+b-13)+(a-3)i\sqrt{3} = 0$, одакле је $2a+b=13$, $a=3$ и $b=7$.

Друго решење. Друго решење је $2 - i\sqrt{3}$, па је полином на левој страни дељив са $(x-2-i\sqrt{3})(x-2+i\sqrt{3}) = x^2-4x+7$. Дељењем се добија остатак $(a-3)x+(b-7)$ који мора бити једнак нули, па је $b=7$.

Треће решење. Друго решење је $2-i\sqrt{3}$, а према Виетовим правилима је збир сва три решења 3, па је треће решење -1, а $-b$ је производ решења, тј. $b=7$. Одговор E).

18. $C = A \cup B$. Одговор B).

19. $\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 2n$, одакле је $n=7$. Одговор C).

20. Чланови развоја су $\binom{11}{k} x^{2k}(2x)^{11-k} = \binom{11}{k} 2^{11-k} x^{11+k}$, па се x^{20} добија ако и само ако је $k=9$, а онда је коефицијент $\binom{11}{9} \cdot 2^2 = 55 \cdot 4 = 220$. Одговор B).