

Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду

## Извештај о докторској дисертацији „Индекс система производа Хилбертових модула“ кандидата Биљане Вујошевић

На седници Наставно научног већа одржаној 21. марта 2014. године одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији под насловом *Индекс система производа Хилбертових модула* кандидата Биљане Вујошевић. Након што је кандидат предао рукопис, комисија је исти прегледала, те подноси наставно научног већу следећи извештај.

### 1. Биографија кандидата

Кандидат Биљана Вујошевић рођена је 19. новембра 1984. године у Београду. Дипломирала је 2007. године на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Докторске студије на истом факултету, смер Анализа, уписала је 2007. године. Од 2007. године ради на Математичком факултету у Београду у звању сарадника у настави, а од 2009. године у звању асистента на предметима: Анализа 1а, Анализа 1б, Анализа 2а, Анализа 2б, Анализа 3 (смер Информатика), Одабрана поглавља анализе, Одабрана поглавља функционалне анализе. До сада има објављене следеће научне радове:

- D. J. Kečkić, B. Vujošević, On the index of product systems of Hilbert modules, *Filomat*, Volume 29, Number 5, (2015) 10931111, DOI 10.2298/FIL1505093K, 2013 Impact factor 0.753
- B. Vujošević, The index of product systems of Hilbert modules: two equivalent definitions, *Publications de l'Institut Mathématique Nouvelle série*, tome 97(111) (2015), 4956 DOI: 10.2298/PIM141114001V
- B. Vujošević, Sistemi inkluzija Hilbertovih modula, *Fourth Mathematical Conference of the Republic of Srpska PROCEEDINGS*, Trebinje 6-7 June 2014 VOLUME I, 69-81

Сва три наведена рада се односе на садржај дисертације. Кандидат у припреми има и рад:

- D. J. Kečkić, B. Vujošević, The index of a subspatial product system - an example - preprint

### 2. Предмет докторске дисертације

Предмет докторске дисертације је уопштење појма индекса система производа Хилбертових простора на ширу и битно различиту класу система производа двостраних Хилбертових  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модула над унитарном  $C^*$ -алгебром  $\mathcal{B}$ , као и извођење његових основних својстава, као што је субадитивност у односу на спољашњи тензорски производ система производа.

Детаљније реч је о следећем:

Систем производа над  $C^*$ -алгебром  $\mathcal{B}$  је фамилија  $(E_t)_{t \geq 0}$  Хилбертових  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модула,  $E_0 \cong \mathcal{B}$  са фамилијом (унитарних) изоморфизама

$$\varphi_{s,t} : E_t \otimes E_s \rightarrow E_{t+s},$$

где је  $\otimes$  унутрашњи тензорски производ добијен идентификацијама

$$ub \otimes v \sim u \otimes bv, \quad u \otimes vb \sim (u \otimes v)b, \quad bu \otimes v \sim b(u \otimes v), \quad (u \in E_t, v \in E_s, b \in \mathcal{B})$$

и потом комплетирањем у односу на скаларни производ  $\langle u \otimes v, u_1 \otimes v_1 \rangle = \langle v, \langle u, u_1 \rangle v_1 \rangle$ . Овако уведен објекат се може посматрати и као непрекидни тензорски производ Хилбертових модула, односно непрекидна варијанта Фоковог простора

Јединица система производа  $(E_t)_{t \geq 0}$  је фамилија  $u_t \in E_t, t \geq 0$  таква да је  $u_0 = 1$  и  $\varphi_{t,s}(u_t \otimes u_s) = u_{t+s}$  што ћемо краће писати  $u_t \otimes u_s = u_{t+s}$ . Јединица  $u_t$  је унитарна ако је  $\langle u_t, u_t \rangle = 1$ . Она је централна ако за свако  $b \in \mathcal{B}$  и свако  $t \geq 0$  важи  $bu_t = u_t b$ .

За сваке две јединице  $u$  и  $v$  постоји фамилија ограничених  $\mathbb{C}$ -линеарних оператора  $\mathcal{K}_t^{u,v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  дефинисаних

$$\mathcal{K}_t^{u,v}(b) = \langle u_t, bv_t \rangle,$$

и она чини полугрупу. Скуп јединица  $\mathcal{U}$  је непрекидан ако је одговарајућа полугрупа  $(\mathcal{K}_t^{u,v})_{u,v \in \mathcal{U}}$  униформно непрекидна. За дати скуп (униформно) непрекидних јединица  $\mathcal{U}$  формира се униформно непрекидна потпуно позитивно дефинитна полугрупа  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t \geq 0}$  и  $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \mathcal{K} |_{t=0}$  је њен генератор.

У дисертацији се полази од хипотезе да је за дати (униформно) непрекидан скуп јединица на произвољном систему производа на Хилбертовим модулима може дефинисати уопштење појма индекса. У случају Хилбертових простора, индекс је природан број и уводи се као димензија погодна одабраног и у ту сврху конструисаног векторског простора. С обзиром да су векторски простори (над истим пољем скалара) до на изоморфизам класификовани својом димнзијом, поставља се хипотеза да је индекс система производа Хилбертових модула класа изоморфних Хилбертових модула која на одговарајући начин репрезентује количину и међусобну везу јединица.

Укратко, за систем производа  $E$  и произвољну непрекидну јединицу  $\omega$  постоји максималан непрекидан скуп јединица  $\mathcal{U}$  који садржи  $\omega$ . На скупу  $\mathcal{U}$  дефинишу се операције сабирања и множења елементима  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{B}$  које га чине двостраним  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модулом као и одговарајућа релација еквиваленције  $\approx$  међу јединицама која је сагласна са операцијама.

На скупу  $\mathcal{U}$  дефинише се пресликавање

$$\langle x, y \rangle = (\mathcal{L}^{x,y} - \mathcal{L}^{x,\omega} - \mathcal{L}^{\omega,y} + \mathcal{L}^{\omega,\omega})(1),$$

које после увођења релације еквиваленције  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N = \{x | \langle x, x \rangle = 0\}$  снабдева  $\mathcal{U} / \sim$  структуром пре-Хилбертовог  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модула.

Индекс пара  $(E, \omega)$  дефинише се као комплетирање пре-Хилбертовог двостраног модула  $\mathcal{U} / \sim$  и означава  $\text{ind}(E, \omega)$ . Показује се да  $\text{ind}(E, \omega)$  не зависи од избора  $\omega$  у истом непрекидном скупу јединица. Уколико се  $E$  може утопити у просторни систем производа (систем производа који садржи централну унитарну јединицу), комплетирање није неопходно тј.  $\mathcal{U} / \sim$  је Хилбертов  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модул и поменуте релације еквиваленције су једнаке.

Доказује се да је тако дефинисан индекс коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију двостраних  $\mathcal{B} - \mathcal{B}$  модула. Такође, изводи се особина субадитивности индекса у односу на спољашњи тензорски производ система производа.

На крају показује се да дефиниција индекса која је дата у овој дисертацији представља уопштење раније дефинисаног индекса који су увели Арвесон (за случај  $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ ) и Скајде (за случај просторних система производа).

Најзад, дисертација се бави и системима инклузија и неким довољним условима под којима се скуп јединица система производа генерисаног датим системом инклузија, поклапа са скупом јединица полазног система.

### 3. Садржај дисертације

Дисертација садржи  $vii + 98 + v$  страна, садржај, нулту главу, списак од 32 референце и главни део који је подељен у 11 поглавља.

Нулта глава садржи дефиниције мање познатих појмова и мање позната тврђења неопходна за даљи рад.

Прве три главе су припремног карактера.

У њима се излаже теорија система производа над Хилбертовим просторима. У првој се наводе неки од већ познатих резултата из теорије  $E_0$ -полугрупа, а у другој из теорије система производа Хилбертових простора (Арвесонових система производа), као и веза  $E_0$  полугрупа и система производа. Представљена је дефиниција индекса поменутих објеката као и важно својство адитивности индекса. На крају је дата и њихова класификација.

Трећа глава је посвећена кратком осврту на појмове позитивно дефинитних и потпуно позитивно дефинитних језгара као и на појам полугрупе језгара (у контексту  $C^*$ -алгебри).

У четвртој и петој глави говори се о системима производа Хилбертових модула над произвольном унитарном  $C^*$ -алгебром. Наводе се неопходне дефиниције и даје се начин конструкције нових јединица (Став 5.1 и Став 5.3) у датом систему производа. Такође формулишу се и доказују се неке помоћне леме потребне за представљање главних резултата дисертације.

Поглавља која следе садрже оригиналне резултате дисертације.

Шесто поглавље садржи главне резултате који се тичу дефинисања индекса система производа Хилбертових модула. Конструира се двострани Хилбертов модул комплетирањем одговарајућег пред-Хилбертов модула, а затим се користи за дефиницију индекса. Теорема 6.2 и Став 6.3 ове главе представљају самостални научни допринос кандидата. У потпоглављу 6.1, дата је још једна дефиниција индекса система производа и доказано је да је еквивалентна са првобитном. Читаво потпоглавље је самостални допринос кандидата.

У седмом поглављу наведена је дефиниција непрекидног система производа и доказано је да је индекс, дефинисан у овој дисертацији, коваријантни функтор из категорије непрекидних система производа у категорију  $\mathcal{B}$ -бимодула - Став 7.5.

Осма глава садржи доказ да је индекс субадитиван у односу на спољашњи тензорски производ система производа - Став 8.4..

У деветом поглављу доказују се додатна својства индекса потпросторног система производа (систем производа који се може утопити у просторни, тј. у систем производа генерисан неким непрекидним скупом јединица који садржи централну унитарну јединицу). Међу њима треба издвојити могућност реконструкције непрекидног скупа јединица на основу индекса, као и ефективан начин за одређивање релације  $\approx$ , сечењем по којој се добија индекс. У Теорему 9.7, изведено је важно тврђење према коме комплетирање одговарајућег двостраног пред-Хилбертовог модула (помоћу кога дефинишемо индекс) није потребно у случају потпросторних система производа. Ова последња Теорема представља самостални допринос кандидата.

Десета глава садржи примере система производа који показују да је индекс, дефинисан у овој дисертацији, уопштење појма индекса који су дефинисали Арвесон (Пример 10.1) у случају  $\mathcal{B} = \mathbb{C}$  и Скајде (Пример 10.2) у случају просторних система производа. Такође, одређен је и индекс једног система производа без централне јединице (Пример 10.4). Примери 10.1 и 10.2 представљају самостални допринос кандидата.

Једанаесто поглавље посвећено је уопштењу већ познатог појма система инклузија Хилбертових простора који представља једнопараметарску фамилију Хилбертових простора, сличну систему производа, са разликом у томе што су унитарна пресликавања која повезују одговарајуће Хилбертове просторе замењена изометријама. Посматрају се системи инклузија двостраних Хилбертових модула над матричном  $C^*$ -алгебром и доказује се да, у одређеним случајевима, неки од резултата и даље важе. Читаво поглавље је резултат самосталног рада кандидата.

## 4. Закључак и предлог

Предмет докторске дисертације Биљане Вујошевић је савремена област која је почела да се развија пре мање од две деценије. Резултати приказани у дисертацији су оригинални и нетривијални. Њихово извођење је захтевало употребу различитих метода и техника математичке анализе, укључујући егзистенцију и јединственост решења диференцијалних једначина са вредностима у простору ограничених оператора, основна својства и резултате везане за теорију Хилбертових модула, као и стандардне методе рада са скаларним производима и његовим општењима. Рад кандидата на овој дисертацији укључио је и проучавање обимне литературе, упознавање са савременим резултатима, као што су својства Хилбертових  $H^*$ -модула и њихову примену на постављене проблеме.

Стога предлажемо Наставно научно већу Математичког факултета да усвоји извештај комисије о докторској дисертацији кандидата Биљане Вујошевић и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 12. јуна, 2015. године,

КОМИСИЈА:

др Александар Цветковић, редовни професор Машинског факултета у Београду

др Драгољуб Кечкић (ментор), ванредни професор

др Ђорђе Кртинић, доцент