

**Извештај о докторској дисертацији  
„Пресликавања контрактивног типа и њихове примене у  
нелинеарној анализи“  
кандидата мр Марине Миловановић-Аранђеловић**

На седницама Наставно научног већа одржаним 24. маја 2011. и 24. јуна 2016. године одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији под насловом *Пресликавања контрактивних типова и њихове примене у нелинеарној анализи* кандидата мр Марине Миловановић-Аранђеловић. Након што је кандидат предао рукопис, комисија је исти прегледала, те подноси наставно научноме већу следећи извештај.

## 1. Биографија кандидата

Кандидат мр Марина Миловановић - Аранђеловић, дипломирани математичар, је рођена у Београду, 15. фебруара 1969. године. Основну и средњу школу је завршила у Великој Плани. У току школовања је учествовала на више републичких и савезних такмичења из математике и физике. На Математички факултет у Београду се уписала 1987. године а дипломирала је 30. октобра 1991. године. Магистрирала је 20. октобра 1998. године на Математичком факултету у Београду, са темом „Ставови о непокретним тачкама у вероватносним метричким просторима“. За асистента приправника, за предмет Математика, на Машинском факултету у Београду изабрана је 15. фебруара 1992. године. У звање асистента на истом Факултету, изабрана је 1998. Школске 1993/94, и 1996/97. године била је на породилским одсуствима. Поред магистарског рада, објавила је 10 научних радова (од тога 8 као коаутор) и учествовала је са саопштењима на 4 међународна научна скупа. Радила је на два научна пројекта из области математичких наука. У току рада на Машинском факултету (1992-2012) држала је вежбе из Математике 1, Математике 2 и Математике 3. Од 2014. запослена је на Високој инжењерској школи струковних студија Техникум Тауруним у Земуну, у звању предавача за предмет Математика.

До сада (не рачунајући магистратуру) има објављене следеће научне радове:

1. I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *A fixed point theorem for upper semicontinuous multifunctions on compact Menger spaces*, *Mathematica Moravica* 1 (1997) 7–10.
2. I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *Some properties of Hausdorff measure of noncompactness on locally bounded topological vector spaces*, *Matematički Vesnik* 49 (1997) 221–223.
3. M. Milovanović-Arandjelović, *A common fixed points theorem for contraction type mappings on Menger spaces*, *Filomat* 11 (1997), 103–108.
4. I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *On Kuratowski's measure of noncompactness in metric linear spaces*, *Univ. Beog. Publ. Elek. Fak. ser. Math.* 10 (1999) 37–40.

5. Lj. Ćirić, M. Milovanović-Arandjelović, *Common fixed point theorem for R-weak commuting mappings in Menger spaces*, J. Indian Acad. Math. 22 (2000), 199–210.
6. M. Milovanović-Arandjelović, *Measures of noncompactness on uniform spaces – the axiomatic approach*, Filomat 15 (2001), 221–225.
7. Lj. Ćirić, J. S. Ume, S. Ješić, M. Milovanović-Arandjelović, *Modified Ishikawa iteration process for nonlinear Lipschitz generalized strongly pseudo-contractive operators in arbitrary Banach spaces*. Numer. Funct. Anal. Optimization 28, No. 11–12 (2007), 1231–1243.
8. Lj. Ćirić, S. Ješić, M. Milovanović, J. S. Ume, *On the steepest descent approximation method for the zeros of generalized accretive operators*, Nonlinear Anal., (TMA), Ser. A, Theory Methods 69-2 (2008), 763–769.
9. Lj. Ćirić, M. Milovanović-Arandjelović, N. Nikolić, *On random Coincidence for a pair of measurable mappings*, Italian journal of pure and applied mathematics, 23 (2008) 37-44.
10. A. Kumar, S. L. Sing, S. N. Mišra, M. Milovanović - Arandjelović, *Coincidences and Fixed Points of new Meir-Keeler type contractions and applications*, Fixed Point Theory, 15:1 (2014), 117–134.

Радови под бројевима 3, 6, 7, 8 и 10 објављени су у часописима са категоријом, и то M23 рад под бројем 7, M22 радови под бројевима 3, 6 и 10, односно M21 рад под бројем 8.

Од наведених радова у тези су изложени резултати објављени у радовима под бројевима 3, 7 и 10, а резултати објављени у раду под бројем 6 су у непосредној вези са садржајем дисертације. Кандидат има и следећа саопштења на конференцијама:

- I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *A fixed point theorem in compact Menger space*, Proceedings of the II mathematical conference in Priština 95-98., Prishtina 1997.
- I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *Hausdorff measure of non - compactness on separable metric linear spaces*, 4. Symposium on Mathematical Analysis and its Applications, abstracts p. 34, Arandjelovac 1997.
- I. Arandjelović, M. Milovanović-Arandjelović, *Functions of Noncompactness on random paranormed space*, 5. International Symposium on Mathematical Analysis and its Applications, Niš 2002, abstracts p. 6.
- M. Rajović, D. Dimitrovski, M. Milovanović-Arandjelović, *One approach to Vecua Matrices Equation and its Applications*, Proceedings of the Mathematical conference in Alma - Ata, 2004., 93-95.

## 2. Предмет докторске дисертације

Предмет докторске дисертације чине уопштења познатих тврђења о непокретној тачки. Она укључују како егзистенцију и јединственост непокретне тачке, тако и поступке за њено добијање путем итерација.

Тема контрактивних пресликавања и непокретне тачке, изузетно је заступљена у савременој математици о чему сведочи и постојање чак два уско специјализована часописа који публикују радове искључиво из ове области и који су категоризовани на међународној библиотечној листи.

Уопштења теорема о непокретној тачки се крећу у најразличитијим смеровима, а овде су заступљени ови:

1. Замена метричког простора слабијом структуром. У дисертацији се ради о структури полуметричког простора, али и о структури Менгеровог простора, односно вероватносног метричког простора.

2. Замена контрактивног услова слабијим условима, као што су псеудоконтрактивни услови, затим услови Мајр-Келеровог типа, те својство акретивности појединих нелинеарних пресликавања на Банаховим просторима.

У раду се полази од различитих хипотеза. Пре свега да теорема о егзистенцији и јединствености непокретне тачка исказане на класи полуметричких простора, погодним избором полуметрике  $d$  може да као последице укључи више на изглед неповезаних резултата.

Затим, да се теореме са условима Мајр-Келеровог типа или условима који укључују акретивност могу уопштити на фамилије два или више пресликавања.

### 3. Садржај дисертације

Дисертација садржи пет ненумерисаних уводних страница, 78 страница основног текста и четири странице додатног материјала. Основни текст је подељен на увод, шест глава и списак литературе (92 референце).

Нулта глава садржи опис теме дисертације са кратким историјским освртом.

Прва глава је припремног карактера и садржи дефиницију појма полуметричког простора, као оног простора  $X$  где функција растојања не задовољава неједнакост троугла, већ уместо ње поседује знатно слабији услов, а то је да је пресликавање  $c_d$  дефинисано на партитивном скупу  $\mathcal{P}(X)$  дато са

$$c_d(A) = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\},$$

идемпотентно, те да може послужити као оператор затворења у погодном дефинисаној топологији. У истој глави наводе се неопходна раније позната твђења везана за полуметричке просторе.

Друга глава садржи оригиналан резултат – теорему о непокретној тачки на компактним полуметричким просторима који имају следеће својство, означено са  $CC$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \Rightarrow \forall y \in X \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = d(x, y).$$

Теорема је исказана и доказана за непрекидне функције које задовољавају псеудоконтрактивни услов:

$$d(fx, fy) < \max\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy)\}. \quad (1)$$

Следе и примене теореме. Наиме, посебним избором полуметрике  $d$  као специјални случајеви добијају се неки раније познати резултати.

Трећа глава такође садржи резултат исказан на класи полуметричких простора, при чему је сада услов компактности ослабљен и замењен условом комплетности, али се од пресликавања  $f$  поред псеудоконтрактивног услова (1) захтева и да је *кондензујуће* типа, што значи да смањује меру некомпактности. При томе, не узима се конкретна мера некомпактности, већ било која која задовољава аксиоме исказане у раду кандидата под бројем 6 (цитирана референца [10]).

Четврта глава садржи резултате објављене у раду кандидата под бројем 10 (цитирана референца [16]). Ради се о теорему о егзистенцији заједничке фиксне тачке више пресликавања од којих бар једно задовољава тзв. Мајр-Келеров услов

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(fx, fy) < \varepsilon.$$

Пета глава се бави строго псеудо контрактивним пресликавањима на Банаховим просторима. Услов строге псеудоконтрактивности гласи:

$$\langle Tx - Ty, j_p(x - y) \rangle \leq (1 - k) \|x - y\|^p,$$

где је  $j_p(x)$  ознака за функционал норме  $\|x\|^{p-1}$  који достиже норму на вектору  $x$ . Овај услов се у случају Хилбертовог простора (уз  $p = 2$ ) своди на  $\Re(I - T) \geq 0$ . Доказује се да ако псеудокон-трактивна пресликавања  $S$  и  $T$  имају заједничку непокретну тачку онда се она може добити као гранична вредност модификованих Ишикавиних итерација, односно као лимес низа  $y_n$  где је  $x_0$  произвољно и

$$y_n = \beta_n S u_n + (1 - \beta_n) x_n; \quad x_{n+1} = \alpha_n T v_n + (1 - \alpha_n) x_n;$$

при чему  $\|u_n - x_n\|, \|v_n - y_n\| \rightarrow 0$ . Дати су довољни услови које треба да задовоље низови реалних бројева  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ , да би резултат важио. Резултат је публикован у раду кандидата под бројем 7 (цитирана референца [17]).

Најзад, шеста глава се бави Менгеровим просторима, специјалном класом статистичких метричких простора, где се не задаје растојање између две тачке, већ само вероватноћа да је то растојање мање од неког позитивног броја. Исказана и доказана теорема у овој глави публикована је у раду кандидата под бројем 3 (цитирана референца [18]).

Самостални допринос кандидата представљају оригинални резултати изложени у другој, трећој и шестој глави, док су оригинални резултати изложени у четвртој и петој глави заједнички допринос кандидата и коаутора одговарајућих радова под бројевима 10 и 7 (у дисертацији цитирани као референце [16] и [17]).

## 4. Закључак и предлог

Оригинални резултати изложени у докторској дисертацији мр Марине Миловановић-Аранђеловић су нови, коректни, а неки од њих као специјалан случај укључују више на око различитих тврђења, што се посебно односи на резултате изложене у главама два и три. Технике доказивања су нетривијалне и укључују рад са топлошким просторима, мерама некомпактности, геометријом Банахових простора и Менгеровим, односно вероватносним метричким просторима. Рад на дисертацији је подразумевао и проучавање обимне литературе, као и познавање нових и савремених резултата. Резултати из дисертације објављени су у три рада са SCI листе, од чега је један самосталан. Поред тога постоје и резултати који још увек нису публиковани.

Стога предлажемо Наставно научно већу Математичког факултета да усвоји извештај комисије о докторској дисертацији кандидата мр Марине Миловановић-Аранђеловић и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 28. јула, 2016. године,

КОМИСИЈА:

др Зоран Каделбург, редовни професор

др Ненад Цакић, редовни професор Електротех-  
ничког факултета

др Драгољуб Кечкић (ментор), ванредни професор