UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Jelena D. Jovanović

LOKALNO KONAČNI VARIJETETI SA POLU–DISTRIBUTIVNOM MREŽOM KONGRUENCIJA

doktorska disertacija

Beograd, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Jelena Jovanović

LOCALLY FINITE VARIETIES WITH SEMI–DISTRIBUTIVE CONGRUENCE LATTICE

doctoral dissertation

Beograd, 2016.

Podaci o mentoru i članovima komisije

Mentor:

dr Predrag Tanović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof. dr Petar Marković, redovni profesor
Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno–matematički fakultet

prof. dr Žarko Mijajlović, redovni profesor u penziji
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Nebojša Ikodinović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Predrag Tanović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane:

Izjave zahvalnosti

Najveću zahvalnost dugujem Petru Markoviću na uloženom vremenu i trudu da me uvede u univerzalnu algebru. Bez njegove pomoći ne bi bilo ovih rezultata, kao ni ove teze.

Najlepše se zahvaljujem svom mentoru Predragu Tanoviću na sveukupnoj pomoći i angažovanju.

Zahvaljujem se Tatjani Davidović na velikoj pomoći i uloženom vremenu u delu istraživanja sa računarskom pretragom.

Zahvaljujem se profesoru Žarku Mijajloviću na pomoći i više nego korisnim sugestijama tokom ovog istraživanja.

Zahvaljujem se Slavku Moconji na pomoći i velikodušnosti tokom ovih studija.

Zahvaljujem se svojoj porodici na neiscrpnoj podršci.

Jelena Jovanović

Lokalno konačni varijeteti sa polu–distributivnom mrežom kongruencija

Rezime:

Predmet ove disertacije je sintaksna karakterizacija kongruencijske polu–distributivnosti (u odnosu na infimum) lokalno konačnih varijeteta Maljcevljevim uslovima (posmatramo varijetete idempotentnih algebri). Dokazujemo da takva karakterizacija nije moguća sistemom identiteta koji koriste jedan ternarni i proizvoljan broj binarnih operacijskih simbola. Prvu karakterizaciju dobijamo jakim Maljcevljevim uslovom koji uključuje dva ternarna simbola: Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ zadovoljava uslov kongruencijske polu–distributivnosti (u odnosu na infimum) ako i samo ako postoje ternarni termi $\bar{p}$ i $\bar{q}$ (koji indukuju idempotentne term operacije) takvi da $\mathcal{V}$ zadovoljava:

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$$
$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x).$$

Ovaj uslov je optimalan u smislu da su broj terma, njihove višestrukosti i broj identiteta najmanji mogući. Druga karakterizacija koju dobijamo koristi jedan 4-arni simbol i data je jakim Maljcevljevim uslovom

$$\bar{t}(y,x,x,x) \approx \bar{t}(x,y,x,x) \approx \bar{t}(x,x,y,x) \approx$$
$$\approx \bar{t}(x,x,x,y) \approx \bar{t}(y,y,x,x) \approx \bar{t}(y,x,y,x) \approx \bar{t}(x,y,y,x)\,.$$

Treća karakterizacija je data kompletnim Maljcevljevim uslovom: Postoje binarni term $t(x,y)$ i *wnu*-termi $\omega_n(x_1,\dots,x_n)$ varijeteta $\mathcal{V}$ tako za sve $n \geqslant 3$ važi sledeće:

$$\mathcal{V} \models \omega_n(x,x,\dots,x,y) \approx t(x,y).$$

Ključne reči: lokalno konačan varijetet; mreža kongruencija; polu–distributivnost; *wnu*–term; Maljcevljev uslov; CSP problem; relaciona širina; $(2,3)$–konzistentnost.

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Algebra

UDK broj: [512.57+512.565.2](043.3)

AMS klasifikacija: 08B05

Locally finite varieties with semi-distributive congruence lattices

Abstract:

The subject of this dissertation is a syntactic characterization of congruence $\wedge$–semidistributivity in locally finite varieties by Mal'cev conditions (we consider varieties of idempotent algebras). We prove that no such characterization is possible by a system of identities including one ternary and any number of binary operation symbols. The first characterization is obtained by a strong Mal'cev condition involving two ternary term symbols: A locally finite variety $\mathcal{V}$ satisfies congruence meet–semidistributivity if and only if there exist ternary terms $\bar{p}$ and $\bar{q}$ (inducing idempotent term operations) such that $\mathcal{V}$ satisfies

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$$
$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x).$$

This condition is optimal in the sense that the number of terms, their arities and the number of identities are the least possible. The second characterization that we find uses a single 4-ary term symbol and is given by the following strong Mal'cev condition

$$\bar{t}(y,x,x,x) \approx \bar{t}(x,y,x,x) \approx \bar{t}(x,x,y,x) \approx$$
$$\approx \bar{t}(x,x,x,y) \approx \bar{t}(y,y,x,x) \approx \bar{t}(y,x,y,x) \approx \bar{t}(x,y,y,x)\,.$$

The third characterization is given by a complete Mal'cev condition: There exist a binary term $t(x,y)$ and *wnu*-terms $\omega_n(x_1,\ldots,x_n)$ of variety $\mathcal{V}$ such that for all $n \geqslant 3$ the following holds:

$$\mathcal{V} \models \omega_n(x,x,\ldots,x,y) \approx t(x,y).$$

Key words: locally finite variety; congruence lattice; meet–semidistributivity; *wnu*–term; Mal'cev condition; CSP problem; relational width; $(2,3)$–consistency.

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Algebra

UDC number: [512.57+512.565.2](043.3)

AMS subject classification: 08B05

Sadržaj

Uvod

Mreža je polu–distributivna (u odnosu na infimum) ukoliko zadovoljava uslov

$$(\forall x, y, z)\,(x \wedge z = y \wedge z \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \wedge z)\,.$$

Ukoliko mreža kongruencija svake algebre varijeteta $\mathcal{V}$ zadovoljava ovaj uslov kažemo da on ima polu–distributivne mreže kongruencija (u odnosu na infimum), ili da je kongruencijski $\wedge$–poludistributivan. U radu razmatramo ovo svojstvo isključivo za slučaj idempotentnih algebri i varijeteta[1].

Prvu sintaksnu karakterizaciju ovog svojstva varijeteta dao je Gabor Czedli 1983. godine u radu [22]. Uslov koji je Czedli pronašao je slab Malcevljev uslov[2], odnosno beskonačna konjunkcija beskonačnih monotonih disjunkcija jakih Maljcevljevih uslova. Ross Willard je 2000. godine u radu [50] pronašao nešto jednostavniji uslov izražen beskonačnom monotonom disjunkcijom jakih Maljcevljevih uslova.

Miklós Maroti i Ralph McKenzie su 2008. godine u radu [45] pronašli jednostavniji uslov od prethodnih, odnosno kompletan Maljcevljev uslov, kojim se ovo svojstvo karakterise u klasi lokalno konačnih varijeteta: lokalno konačan varijetet je kongruencijski $\wedge$–poludistributivan ako i samo ako ima *wnu* term w arnosti k za skoro svaki prirodan broj k. Prvu karakterizaciju kongruencijske $\wedge$-poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta jakim Maljcevljevim uslovom, odnosno konačnim skupom linearnih identiteta, pronašli su Marcin Kozik, Andrei Krokhin, Matt Valeriote i Ross Willard 2009. godine: lokalno konačan varijetet ima poludistributivne mreže kongruencija u odnosu na infimum ako i samo ako postoje *wnu* termi v i w, višestrukosti 3 i 4 redom, tako da u varijetetu važi identitet $v(x, x, y) \approx w(x, x, x, y)$. Ovaj rezultat je objavljen tek 2015. godine u radu [40]. Kada se uzmu u obzir identiteti koji opisuju *wnu* terme, ovaj uslov ima ukupno 6 identiteta (ne uračunavamo identitete koji opisuju idempotentnost svakog terma u varijetetu, jer su ti identiteti sastavni deo svakog Maljcevljevog uslova). Prirodno se postavlja pitanje odredjivanja optimalnog Maljcevljevog uslova, u smislu broja terma, dužina terma i broja identiteta.

[1] U pododeljku 2.1 objasnićemo da idempotentnost nije suštinsko ograničenje.

[2] Formalne definicije Maljcevljevih uslova date su u odeljku 1.4.

U ovoj disertaciji dajemo odgovor na ovo pitanje. Prvo dokazujemo da ne postoji uslov koji je izražen jednim ternarnim i binarnim termima.

Teorema 1. Nijedan jak Maljcevljev uslov izražen jednim ternarnim i proizvoljnim brojem binarnih operacijskih simbola ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta.

Zatim pronalazimo dva nova jaka Maljcevljeva uslova koji karakterišu pomenuto svojstvo. Prvi ima 4 identiteta i koristi dva ternarna operacijska simbola.

Teorema 2. (Jovanović, McKenzie). *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan i ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda $\mathcal{V}$ realizuje sledeći jak Maljcevljev uslov:*

$$\begin{gathered}\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)\\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x).\end{gathered}$$

Sa druge strane, ako $\mathcal{V}$ realizuje navedeni jak Maljcevljev uslov, onda $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Dokazaćemo i da je gornji uslov optimalan, odnosno da ima najmanji mogući broj identiteta od svih jakih Maljcevljevih uslova sa dva ternarna simbola koji karakterišu kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta.

Dokazujemo i karakterizaciju jednim 4-arnim termom:

Teorema 3. (Jovanović, Marković, McKenzie, Moore). *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan i ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda $\mathcal{V}$ realizuje sledeći jak Maljcevljev uslov:*

$$\begin{gathered}\bar{t}(y,x,x,x) \approx \bar{t}(x,y,x,x) \approx \bar{t}(x,x,y,x) \approx\\ \approx \bar{t}(x,x,x,y) \approx \bar{t}(y,y,x,x) \approx \bar{t}(y,x,y,x) \approx \bar{t}(x,y,y,x)\,.\end{gathered}$$

Sa druge strane, ako $\mathcal{V}$ realizuje navedeni jak Maljcevljev uslov, onda $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Ova karakterizacija je jača od prethodne u smislu da ispunjenost Maljcevljevog uslova iz teoreme 3 u ma kom varijetetu, ne obavezno lokalno konačnom, povlači ispunjenost uslova iz teoreme 2 u tom varijetetu.

Treća karakterizacija koju utvrdjujemo je data kompletnim Maljcevljevim uslovom.

Teorema 4. (Jovanović, Marković, McKenzie, Moore). *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ima $\wedge$–poludistributivne mreže kongruencija ako i samo ako postoji* *binarni term* $t(x, y)$ *i termi* $\omega_n(x_1, \dots, x_n)$ *za sve arnosti* $n \geq 3$ *(na jeziku varijeteta* $\mathcal{V}$*), takvi da:*

(1) *Svaki* ω_n *je wnu–term varijeteta* $\mathcal{V}$, *i*

(2) *Za sve* n, $\mathcal{V} \models \omega_n(x, x, \dots, x, y) \approx t(x, y)$.

Disertacija se sastoji iz pet poglavlja.

U prvom poglavlju izlažemo najpre istorijski pregled istraživanja svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Sledi pregled osnovnih pojmova i rezultata, a posebne odeljke ovog poglavlja posvetili smo Teoriji pitomih kongruencija i Maljcevljevim uslovima.

Drugo poglavlje je najobimnije. U njemu prvo razmatramo sisteme (tj. jake Maljcevljeve uslove) identiteta sa binarnim i najviše jednim ternarnim operacijskim simbolom i dokazujemo teoremu 1. Najveći deo ovog poglavlja je posvećen analizi jakih Maljcevljevih uslova sa dva ternarna terma koji bi mogli da karakterišu kongruencijku $\wedge$-poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta. Dokazujemo deo tvrdjenja teoreme 2. Prvo, da navedeni uslov implicira kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost (ukoliko je realizovan u nekom lokalno konačnom varijetetu, onda taj varijetet ima to svojstvo), a zatim da je to esencijalno (do na permutaciju promenljivih i/ili operacijskih simbola ternarnih terma) jedini minimalan sistem sa dva ternarna terma i dve promenljive koji implicira to svojstvo. Time je taj sistem izolovan kao jedini kandidat za optimalnu karakterizaciju posmatranog svojstva.

U trećem poglavlju analiziramo klasu lokalno konačnih varijeteta generisanih algebrom polimorfizama digrafa sa najviše pet čvorova. Računarskom pretragom ispitali smo da li uslov izdvojen u prethodnom poglavlju u ovoj klasi karakteriše kongruencijku $\wedge$-poludistributivnost. Rezultat je potvrdan. Budući da smo ispitali veliki broj konačnih algebri, u ovoj tački istraživanja smo postavili hipotezu da sistem koji smo pronašli karakteriše ovo svojstvo u lokalno konačnim varijetetima algebri, odnosno da važi i drugi smer teoreme 2, koja je naknadno i dokazana. Poglavlje sadrži objašnjenja svih metoda i procedura koje su korišćene u ovom delu istraživanja, kao i procenu vremenske složenosti za svaki deo postupka.

U četvrtom poglavlju izložen je najveći deo rada Libora Barta [4] (iz oblasti Problema zadovoljenja uslova), jer se ovi rezultati koriste za dokazivanje glavnih rezultata ove distertacije.

Peto poglavlje sadrži glavne rezultate disertacije. Dokazana je teorema 3, a zatim je kao njena posledica izveden drugi deo teoreme 2. U ovom poglavlju dokazana je i teorema 4. Dokazujemo takodje da su karakterizacije do kojih smo došli najbolje moguće u pogledu broja i arnosti terma koji u njima figurišu. Formulisani su i neki otvoreni problemi, naime, pronašli smo dva sistema koji su kandidati za karakterizaciju istog svojstva, a koji su jači od karakterizacija koje smo dokazali. Postavili smo i pitanje povezanosti svojstva distributivnosti mreža kongruencija u proizvoljnom varijetetu sa realizacijom nekih od naših sistema.

Poglavlje 1

Istorijat i pregled pojmova

U ovom poglavlju najpre izlažemo istorijski pregled istraživanja svojstva polu–distributivnosti mreža kongruencija u varijetetima algebri, i specijalno, u lokalno konačnim varijetetima. Rezulatati pomenuti u pregledu koji su za naše potrebe posebno značajni detaljnije su objašnjeni u nastavku disertacije. Takodje predstavljamo osnovne pojmove tzv. *Teorije pitomih kongruencija*. Iako ova teorija pruža nešto drugačiji pristup problemu kojim se bavi ova disertacija, njen uticaj je veliki – pružila je osnovu i motivaciju za široko istraživanje na polju karakterizacije različitih osobina algebri i/ili varijeteta pomoću linearnih identiteta, odnosno pomoću tzv. Maljcevljevih uslova (jedna od ovih osobina je i kongruencijska $\wedge$–poludistributivnost). Kao što je rečeno u rezimeu, ovo praktično znači da se mnoga semantička svojstva algebri i/ili varijeteta mogu opisati i kao sintaksna, što govori o značaju i širokoj primeni Maljcevljevih uslova. Ove uslove definišemo u poslednjem odeljku ovog poglavlja, u kojoj smo takodje izložili i neke važne rezultate na ovom polju (tj. Maljcevljeve uslove koji karakterišu izvesna svojstva algebri i varijeteta).

1.1 Istorijat

Klasa varijeteta sa polu–distributivnim mrežama kongruencija je izučavana od početka 1980–ih, najpre u radovima G. Czedlija [21] iz 1981. i [22] iz 1983 (istraživanje je započelo na osnovu problema postavljenih u radu B. Jonssona [33] iz 1980). U [22] je data i eksplicitna karakterizacija kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. D. Hobby i R. McKenzie su u monografiji [27] iz 1988. dokazali da postoji Maljcevljev uslov[1] koji karakteriše ovo svojstvo u slučaju lokalno konačnog varijeteta (mada

[1] Videti odeljak *Maljcevljevi uslovi* na kraju ovog poglavlja.

ovaj uslov nisu naveli). Zatim su 1998. P. Lipparini u radu [42] i nezavisno K. Kearnes i Á. Szendrei u [38] dokazali da postoji Maljcevljev uslov koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost u opštem slučaju, tj. bez lokalne konačnosti (bez eksplicitnog navodjenja karakterizacije). Prvu eksplicitnu karakterizaciju ovog uslova (za opšti slučaj) dao je R. Willard 2000. godine u radu [50]. M. Kozik, A. Krokhin, M. Valeriote i R. Willard izložili su jak Maljcevljev uslov koji karakteriše pomenuto svojstvo za lokalno konačne varijetete u radu [40] 2015. godine.

Značaj kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti je rastao tokom godina, da bi u poslednje vreme varijeteti koji zadovoljavaju ovo svojstvo postali jedna od najviše proučavanih klasa. Navešćemo samo neke od najznačajnijih rezultata. D. Hobby i R. McKenzie su u pomenutoj monografiji [27] iz 1988. godine, za slučaj lokalno konačnih varijeteta dokazali ekvivalenciju tri uslova: kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, nepostojanja pokrivanja tipova **1** i **2**, odnosno unarnog i afinog tipa, u mrežama kongruencija konačnih algebri varijeteta, i tzv. kongruencijske neutralnosti, tj. osobine da u mrežama kongruencija svih algebri varijeteta važi da je komutator jednak preseku. Ekvivalenciju kongruencijske neutralnosti i kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u slučaju proizvoljnog varijeteta dokazali su K. Kearnes i Á. Szendrei 1998. u [38]. Nakon toga, R. Willard je 2000. godine u radu [50] dokazao da varijeteti na konačnom jeziku sa konačnom rezidualnom granicom koji zadovoljavaju kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost imaju konačnu bazu identiteta. Time je uopštio teoremu K. Bakera o kongruencijski distributivnim varijetetima dokazanu u radu [1] iz 1977. U istom radu Willard je dokazao da kombinatorna lema „O jednom nizu" (Single Sequence Lemma), ključni korak u dokazu u [1], karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, odnosno ova lema važi ako i samo ako algebra u kojoj je posmatramo generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet.

1.1.1 Problem zadovoljenja uslova

Postoji vise ekvivalentnih formulacija Problema zadovoljenja uslova (*Constraint Satisfaction Problem*, ili CSP) kao problema odlučivosti: Problem se može formulisati kao pitanje postojanja homomorfizma iz ulazne relacione strukture u fiksiranu relacionu strukturu istog jezika, ili kao pitanje tačnosti primitivno pozitivne formule u fiksiranom modelu, ili kao postojanje preslikavanja datog skupa promenljivih u dati domen koje zadovoljava izvesne lokalne uslove (*constraints*)[2].

Istorijski, prvi rezultat vezan za problem CSP bio je teorema Shaefera iz 1978.

[2] O Problemu zadovoljenja uslova biće reči u poglavljima **3**, **4** i **5** ove disertacije.

godine, ([48]), koja se odnosi na formulaciju problema preko homomorfizma relacionih struktura. Schaeferova teorema dokazuje da je problem postojanja homomorfizma iz ulazne relacione strukture u dvoelementnu relacionu strukturu istog jezika (fiksiranu) ili rešiv u polinomnom vremenu ili NP–kompletan. Nakon ovog rezultata usledili su dokazi analognih tvrdjenja za neorijentisane grafove, [26], i za polukompletne orijentisane grafove, [3] (tj. dokazano je da je problem postojanja homomorfizma iz ulazne relacione strukture odgovarajućeg jezika u bilo koju od navedenih struktura ili rešiv u polinomnom vremenu ili NP –kompletan, u zavisnosti od fiksirane strukture). Uopštenje prethodna dva rezultata do orijentisanih grafova bez izvora i ponora najpre je postavljeno u formi hipoteze u [2], a zatim dokazano u [9]. Uopštenje Shaeferove teoreme na troelementne relacione strukture (modele) dokazano je u [13]. Može se primetiti da se navedeni rezultati kreću od specifičnih ka opštijim relacionim strukurama (tj. modelima problema). Hipoteza dihotomije (Feder, Vardi [25]), koja je još uvek otvorena, tvrdi da isto važi za svaku konačnu relacionu strukturu.

Najznačajniji pristup Hipotezi dihotomije je tzv. algebarski pristup. U pitanju je analiza složenosti Problema zadovoljenja uslova na fiksiranoj konačnoj relacionoj strukturi preko kompatibilnih operacija (polimorfizama)[3] ove strukture. Ovaj pristup je zasnovan u [29], a temeljnije razvijen u [15], gde je dokazano da polimorfizmi fiksirane relacione strukture kontrolišu složenost Problema zadovoljenja uslova, ili preciznije, identiteti koje ovi polimorfizmi zadovoljavaju kontrolišu složenost ovog problema. Nedavno je dokazano (u [10]) da linearni identiteti koje polimorfizmi zadovoljavaju već sadrže dovoljno informacija da bi kontrolisali složenost CSP.

Algebarski pristup Problemu zadovoljenja uslova pokazuje da je za jednu klasu relacionih struktura lako dokazati da je taj problem NP-kompletan, [15]. U pitanju su strukture koji nemaju tzv. Taylorov polimorfizam, dok je za preostale modele poznato da se mogu razložiti u neke tipične podslučajeve, svaki od kojih je polinomne složenosti. Problem na proizvoljnoj konačnoj relacionoj strukturi je kombinacija ovih podslučajeva, ali su algoritmi za njihovo rešavanje nedovoljno kompatibilni da bi se mogli uklopiti u jedinstveni algoritam za proizvoljan slučaj.

Jedna vrsta poznatih algoritama predstavlja uopštenje Gausove eliminacije koje je izloženo najpre u [14], a zatim generalizovano u [23], da bi konačno u [28] bila precizirana najšira klasa na kojoj su primenljivi.

Drugi tip algoritama, koji nas zapravo zanima u ovoj tezi, radi na principu

[3] O polimorfizmima relacionih strukura biće reči u poglavlju **3** ove disertacije.

proveravanja lokalne konzistencije. Ovu proveru je uvek moguće sprovesti u polinomnom vremenu, medjutim konzistentnost ne podrazumeva uvek rešivost Problema. Za neke modele važi sledeće: ako se ulaz transformiše u sistem uslova dovoljnog nivoa konzistencije (koji zavisi od fiksiranog modela, ne i od ulaza) i taj sistem je neprazan, onda rešenje mora da postoji. Ovakvi modeli su nazvani modeli ograničene širine[4] i definisani u terminima programskog jezika Datalog u radu [25]. Prvi primeri modela ograničene širine bili su modeli sa near-unanimity polimorfizmom, [30], polumrežnim polimorfizmom, [31], i 2-polumrežnim polimorfizmom, [12].

Sistematsko proučavanje ograničene širine počelo je sa radom [41], u kojem je dokazano da ako model ima konačnu širinu, onda algebra polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. Suprotna implikacija je bila predmet intenzivnog izučavanja nekoliko godina, tokom kojih su postignuti parcijalni rezultati, [20], [6], da bi konačno bila dokazana u [7]. Najjači rezultat je karakterizacija koja dokazuje i minimalan nivo potrebne konzistencije, dokazana u radu [4], i ovaj rezultat i mi koristimo. Za to vreme, paralelno, razvijana je i metodologija što lakše identifikacije kongruencijski $\wedge$–poludistributivnih varijeteta u radovima [44], [5], [40]. Ova teza je nastavak tih radova.

1.2 Pregled pojmova

Jezik ili *signatura* algebri je skup $\mathcal{F}$ *funkcijskih simbola*, takav da je svakom članu f skupa $\mathcal{F}$ pridružen nenegativan ceo broj n. Ovaj ceo broj nazivamo *višestrukost* ili *arnost* od f, i kažemo da je f n–arni funkcijski simbol. Podskup n–arnih funkcijskih simbola skupa $\mathcal{F}$ označavamo sa $\mathcal{F}_n$. Ako je $\mathcal{F}$ jezik algebri onda je *algebra* $\mathbf{A}$ jezika (ili signature) $\mathcal{F}$ uredjeni par $\mathbf{A} = (A, F^{\mathbf{A}})$, gde je A neprazan skup, tzv. *univerzum*, a $F^{\mathbf{A}}$ je familija operacija (konačnih arnosti) na A, takva da svakom n–arnom funkcijskom simbolu f iz $\mathcal{F}$ odgovara n–arna operacija $f^{\mathbf{A}} \in F^{\mathbf{A}}$, $f^{\mathbf{A}} : A^n \to A$. Operacije iz skupa $F^{\mathbf{A}}$ (odnosno interpretacije funkcijskih simbola iz $\mathcal{F}$ u algebri $\mathbf{A}$) nazivamo *osnovne* ili *bazne* operacije algebre $\mathbf{A}$. Funkcijski simboli arnosti nula, tj. elementi skupa $\mathcal{F}_0$ (ako postoje) interpretiraju se kao konstante algebre $\mathbf{A}$. Algebra $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ je *trivijalna* ukoliko je njen univerzum, A, jednočlan skup.

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ algebre istog jezika $\mathcal{F}$. Algebra $\mathbf{B}$ je *podalgebra* algebre $\mathbf{A}$, u oznaci $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, ako je $B \subseteq A$ i svaka bazna operacija algebre $\mathbf{B}$ je restrikcija odgovarajuće

[4]O modelima ograničene širine biće reči u poglavlju **4**.

operacije algebre $\mathbf{A}$, odnosno, za svaki funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathbf{B}}$ je restrikcija operacije $f^{\mathbf{A}}$ na skup B. *Poduniverzum* algebre $\mathbf{A}$ je podskup B skupa A koji je zatvoren za bazne operacije algebre $\mathbf{A}$, odnosno, ako je f n–arna bazna operacija algebre $\mathbf{A}$ i $a_1, \ldots, a_n \in B$, onda je $f(a_1, \ldots a_n) \in B$. Dakle, ukoliko je $\mathbf{B}$ podalgebra algebre $\mathbf{A}$, onda je B poduniverzum od $\mathbf{A}$.

Ako je $\mathbf{A}$ algebra jezika $\mathcal{F}$ i $X \subseteq A$, *podalgebra generisana skupom* X je najmanja podalgebra algebre $\mathbf{A}$ koja sadrži skup X.

Ako su $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,...,$\mathbf{A_n}$ algebre istog jezika $\mathcal{F}$, *direktan proizvod* ovih algebri, $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times \cdots \times \mathbf{A_n}$, je algebra čiji je univerzum skup $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, a operacije se izvršavaju po koordinatama, drugim rečima, za $f \in \mathcal{F}$ arnosti k i $a_i^1 \in A_1$, $a_i^2 \in A_2$, ..., $a_i^n \in A_n$, $1 \leq i \leq n$,

$$f^{\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times \cdots \times \mathbf{A_n}}((a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n), (a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n), \ldots, (a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n)) =$$
$$(f^{\mathbf{A_1}}(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1), f^{\mathbf{A_2}}(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_k^2), \ldots f^{\mathbf{A_n}}(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n)).$$

Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dve algebre istog jezika $\mathcal{F}$, preslikavanje $\alpha : A \longrightarrow B$ je *homomorfizam* iz $\mathbf{A}$ u $\mathbf{B}$ ako važi: $\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$ za sve $f \in \mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, i $a_1, \ldots, a_n \in A$. Homomorfizam koji je „$1-1$" i „na" nazivamo *izomorfizam.*

Na klasu $\mathcal{K}$ algebri nekog jezika $\mathcal{F}$, kao celinu, mogu se primeniti operatori koje označavamo sa I, S, H P; kao rezulatat se dobijaju klase algebri $I(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$ i $P(\mathcal{K})$, istog jezika $\mathcal{F}$, definisane ovako:

- $\mathbf{A} \in I(\mathcal{K})$ ako i samo ako je algebra $\mathbf{A}$ izomorfna nekoj algebri klase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{A} \in S(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ podalgebra neke algebre klase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{A} \in H(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ homomorfna slika neke algebre klase $\mathcal{K}$.
- $\mathbf{A} \in P(\mathcal{K})$ ako i samo ako je $\mathbf{A}$ direktan proizvod neprazne familije algebri klase $\mathcal{K}$.

Kažemo da je klasa $\mathcal{K}$ *zatvorena* za operator O ako važi $O(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Neprazna klasa $\mathcal{K}$ algebri jezika $\mathcal{F}$ je *varijetet* ako je zatvorena za operatore S, H i P. Ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri istog jezika $\mathcal{F}$, $V(\mathcal{K})$ označava najmanji varijetet koji sadrži $\mathcal{K}$. Ovaj varijetet se naziva *varijetet generisan klasom* $\mathcal{K}$. Varijetet V je *konačno generisan* ako je $V = V(\mathcal{K})$ za neki konačan skup $\mathcal{K}$ konačnih algebri. Specijalno, ukoliko je $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}\}$ (jednočlana klasa), $V(\mathbf{A})$ je *varijetet generisan algebrom* $\mathbf{A}$.

Važi teorema: za proizvoljnu klasu algebri $\mathcal{K}$, $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$ (Tarski,[40]).

Ako je X skup promenljivih i $\mathcal{F}$ jezik algebri, skup *terma jezika* $\mathcal{F}$ *nad* X, označen sa $T(X)$, je najmanji skup takav da zadovoljava sledeća dva uslova:

1. $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq X$ (promenljive i simboli konstanti su termi)

2. Ako $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ i $f \in \mathcal{F}_n$, onda $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$ ($f(p_1, \ldots, p_n)$ je ovde samo niz simbola, dakle „string" ovog oblika pripada skupu $T(X)$).

Za $p \in T(X)$ pišemo $p(x_1, \ldots, x_n)$ kada hoćemo da naglasimo da su promenljive koje se eksplicitno pojavljuju u termu p *neke od* promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Drugim rečima, p je n–arni term ukoliko je broj promenljivih koje se eksplicitno pojavljuju u termu p (tj. u „stringu" koji smo označili sa p) najviše n.

Ako je $\mathcal{F}$ jezik algebri, X skup promenljivih i $T(X)$ skup terma jezika $\mathcal{F}$ nad X, *term algebra* jezika $\mathcal{F}$ nad X, u oznaci $\mathbf{T}(X)$, je algebra čiji je univerzum skup $T(X)$, a bazne operacije su definisane na sledeći način: za $f \in \mathcal{F}$ i terme $p_i \in T(X)$, $1 \leq i \leq n$, $f^{\mathbf{T}(X)} : (p_1, \ldots, p_n) \longmapsto f(p_1, \ldots, p_n)$ (drugim rečima, rezultat operacije $f^{\mathbf{T}(X)}$ je term koji se dobija dopisivanjem simbola f na listu argumenata operacije).

Za dati term $p(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{F}$ nad nekim skupom promenljivih X i datu algebru $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$, *interpretacija* terma p u algebri $\mathbf{A}$ je preslikavanje $p^{\mathbf{A}} : A^n \longrightarrow A$ definisano ovako:

1. Ako je term p promenljiva x_i, onda je $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$, za $a_1, \ldots, a_n \in A$, odnosno $p^{\mathbf{A}}$ je i–ta projekcija.

2. Ako je p oblika $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, pri čemu $f \in \mathcal{F}_k$, onda je $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n))$.

Specijalno, ako je $p = f \in \mathcal{F}$, onda je $p^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}$. Interpretacija terma p u $\mathbf{A}$, odnosno preslikavanje $p^{\mathbf{A}}$, je *term–operacija* algebre $\mathbf{A}$ koja odgovara termu p. Primetimo da različitim termima algebre $\mathbf{T}(X)$ mogu odgovarati iste term–operacije u algebri $\mathbf{A}$. Kažemo da term–operacija $p^{\mathbf{A}} : A^n \longrightarrow A$ algebre $\mathbf{A}$ *zavisi od i–te koordinate* ako postoje $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n, a_i' \in A$ takvi da

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \neq p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n).$$

Ukoliko je ovo slučaj, kažemo da term $p(x_1, \ldots, x_n)$ *zavisi od promenljive x_i* u algebri $\mathbf{A}$, ili da je promenljiva x_i *esencijalna* u termu p (u odnosu na algebru $\mathbf{A}$). Broj promenljivih od kojih term p zavisi u algebri $\mathbf{A}$ je *esencijalna arnost* tog terma u $\mathbf{A}$.

Za svaki term p koji ima esencijalnu arnost $k > 0$ u algebri $\mathbf{A}$, postoji term q koji je ekvivalentan termu p u algebri $\mathbf{A}$ (u smislu da indukuju istu term–operaciju u $\mathbf{A}$), a koji ima k promenljivih. Term q se dobija tako što se svako pojavljivanje neesencijalne promenljive u termu p zameni nekom od esencijalnih promenljivih.

Term–operacija $p^{\mathbf{A}}$ algebre $\mathbf{A}$ je *idempotentna* ukoliko važi $p^{\mathbf{A}}(a, a, \ldots, a) = a$ za sve $a \in \mathbf{A}$.

Neka su $\mathbf{A}_1 = (A, \mathcal{F}_1)$ i $\mathbf{A}_2 = (A, \mathcal{F}_2)$ algebre istog univerzuma A. Za algebre $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ reći ćemo da su *term–ekvivalentne* ukoliko imaju iste skupove term–operacija, odnosno, $p^{\mathbf{A}_1}$ je n arna term–operacija algebre $\mathbf{A}_1$ ako i samo ako postoji n–arna term–operacija $q^{\mathbf{A}_2}$ algebre $\mathbf{A}_2$ takva da $p^{\mathbf{A}_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Ako je $\mathbf{A}$ algebra jezika $\mathcal{F}$ i θ relacija ekvivalencije na skupu A (na univerzumu algebre), onda je θ *kongruencija* algebre $\mathbf{A}$ ako je kompatibilna sa operacijama ove algebre, odnosno ako zadovoljava sledeće: za svaki n–arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ i za sve $a_i, b_i \in A$, ukoliko važi $a_i \theta b_i$ za $1 \leq i \leq n$, onda važi i $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)$. Skup svih kongruencija algebre $\mathbf{A}$ označavamo sa $Con\mathbf{A}$.

Ako je θ kongruencija algebre $\mathbf{A}$, sa $\mathbf{A}/\theta$ označavamo tzv. *količničku algebru*, odnosno algebru čiji je univerzum skup A/θ klasa kongruencije θ, a bazne operacije su definisane ovako: ako je $f^{\mathbf{A}}$ bazna operacija algebre $\mathbf{A}$ arnosti n, i a_1/θ, a_2/θ, $\ldots$, a_n/θ su elementi skupa A/θ, onda $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, a_2/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)/\theta$.

Kada su u pitanju homomorfizmi i kongruencije algebri, term–operacije se ponašaju isto kao bazne operacije algebre.

Neka je $\mathcal{F}$ jezik algebri, p n–arni term jezika $\mathcal{F}$, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ algebre ovog jezika, θ kongruencija algebre $\mathbf{A}$, i pretpostavimo da $a_i \,\theta\, b_i$ za $1 \leq i \leq n$. Tada je:

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \;\theta\; p^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Neka je, pod istim pretpostavkama, $\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ homomorfizam. Tada važi $\alpha p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = p^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$.

Neka je $\mathcal{F}$ jezik algebri, X skup promenljivih, i $\mathbf{T}(X)$ term algebra jezika $\mathcal{F}$ nad X. *Identitet* jezika $\mathcal{F}$ nad X je izraz oblika $p \approx q$, gde su $p, q \in \mathbf{T}(X)$. Algebra $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ zadovoljava identitet $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, u oznaci $\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, ili skraćeno $\mathbf{A} \models p \approx q$, ako za svaki izbor $a_1, \ldots a_n \in A$ važi $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, gde su $p^{\mathbf{A}}$ i $q^{\mathbf{A}}$ term–operacije algebre $\mathbf{A}$ koje odgovaraju termima p i q.

Trivijalni identiteti su oni oblika $p(x_1, \ldots, x_n) \approx p(x_1, \ldots, x_n)$. Trivijalna algebra zadovoljava svaki identitet odgovarajućeg jezika. Trivijalan identitet je zadovoljen u svakoj algebri odgovarajućeg jezika.

Klasa $\mathcal{K}$ algebri jezika $\mathcal{F}$ zadovoljava identitet $p \approx q$, u oznaci $\mathcal{K} \models p \approx q$, ako svaka algebra te klase zadovoljava $p \approx q$. Ako je Σ skup identiteta, kažemo da $\mathcal{K}$ zadovoljava Σ, i pišemo $K \models \Sigma$, ako $\mathcal{K} \models p \approx q$ za svaki identitet $p \approx q \in \Sigma$.

Za proizvoljnu klasu $\mathcal{K}$ algebri nekog jezika $\mathcal{F}$, važi da klase $\mathcal{K}$, $I(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$, $P(\mathcal{K})$ i $V(\mathcal{K})$ zadovoljavaju iste identitete nad bilo kojim skupom promenljivih X ([19]). Specijalno, ako je $\mathbf{A}$ algebra jezika $\mathcal{F}$, onda $\mathbf{A}$ i varijetet generisan ovom algebrom, $V(\mathbf{A})$, zadovoljavaju iste identitete (jezika $\mathcal{F}$) nad bilo kojim skupom promenljivih X.

Ako je Σ skup identiteta tipa $\mathcal{F}$, označimo sa $M(\Sigma)$ klasu svih algebri tipa $\mathcal{F}$ koje zadovoljavaju Σ.

Važi teorema (Birkhoff, [40]): Klasa $\mathcal{K}$ algebri nekog jezika $\mathcal{F}$ je *varijetet* jezika $\mathcal{F}$ ako i samo ako postoji skup identiteta Σ jezika $\mathcal{F}$ takav da $K = M(\Sigma)$. U ovom slučaju kažemo da je varijetet *definisan* ili *aksiomatizovan* skupom identiteta Σ.

Algebra $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ je *lokalno konačna* ukoliko je za svaki konačan podskup X od A podalgebra generisana skupom X takodje konačna. Varijetet je *lokalno konačan* ukoliko je svaka algebra u njemu takva.

Ukoliko je $X \subseteq A$, sa $Sg^{\mathbf{A}}(X)$ označavamo poduniverzum algebre $\mathbf{A}$ generisan skupom X, odnosno $Sg^{\mathbf{A}}(X) = \bigcap\{Y \mid X \subseteq Y \ i \ Y \ je \ poduniverzum \ od \ \mathbf{A}\}$. Ovaj skup sa nasledjenim operacijama iz $\mathbf{A}$ predstavlja podalgebru algebre $\mathbf{A}$. Primetimo da se $Sg^{\mathbf{A}}(X)$ može dobiti i kao skup rezultata primene svih term–operacija algebre $\mathbf{A}$ na elemente skupa X.

Neka je $n \in \omega$, $n > 1$, $\mathbf{A}^n$ direktan stepen algebre $\mathbf{A}$, i neka su $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \mathbf{a_k} = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ elementi skupa A^n. Posmatramo poduniverzum algebre $\mathbf{A}^n$ generisan ovom k–torkom elemenata:

$$Y = Sg^{\mathbf{A}^n}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}\right)$$

Poduniverzum Y zajedno sa nasledjenim operacijama algebre $\mathbf{A}^n$ predstavlja podalgebru $\mathbf{Y}$ ove algebre. Medjutim, ovaj skup se, takodje, može posmatrati kao n–arna relacija na skupu A koja je kompatibilna sa operacijama algebre $\mathbf{A}$: neka je f bazna operacija algebre $\mathbf{A}$ arnosti m, za neki $m \in \omega$, i neka su $\mathbf{b_1} = (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1})$,

$\mathbf{b_2} = (b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2})$, …, $\mathbf{b_m} = (b_{1m}, b_{2m}, \ldots, b_{nm})$ elementi skupa Y. Tada je:

$$f^{\mathbf{Y}}\left(\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{nm} \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f^{\mathbf{A}}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1m}) \\ f^{\mathbf{A}}(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2m}) \\ \vdots \\ f^{\mathbf{A}}(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nm}) \end{pmatrix} \in Y.$$

Dakle, primenom bilo koje term–operacije algebre $\mathbf{A}$ na n–torke relacije Y dobija se n–torka koja takodje pripada ovoj relaciji.[5]

Mreža je algebra $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ sa dve binarne operacije $\vee$ i $\wedge$, koja zadovoljava sledeće identitete:

1. $x \vee y \approx y \vee x$
   $x \wedge y \approx y \wedge x$ (komutativnost)

2. $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$
   $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$ (asocijativnost)

3. $x \vee x \approx x$
   $x \wedge x \approx x$ (idempotentnost)

4. $x \approx x \vee (x \wedge y)$
   $x \approx x \wedge (x \vee y)$ (apsorpcija)

Na skupu kongruencija $Con\mathbf{A}$ algebre $\mathbf{A}$ definišemo operacije $\vee$ i $\wedge$:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots .$$

Sa ovako uvedenim operacijama, skup $Con\mathbf{A}$ čini mrežu koja se naziva mreža kongruencija algebre $\mathbf{A}$ i označava sa $\mathbf{ConA}$. Na mreži $\mathbf{ConA}$ (i na proizvoljnoj mreži) može se definisati uredjenje: ako je $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{ConA}$, onda $\theta_1 \leq \theta_2$ ako i samo ako $\theta_1 \cap \theta_2 = \theta_1$. Sa ovako definisanim uredjenjem mreža $\mathbf{ConA}$ je parcijalno uredjen skup, koji ima najmanji i najveći element – najmanji je kongruencija $\{(a, a) | a \in A\}$, označena sa $\mathbf{0_A}$, a najveći je tzv. puna kongruencija, $\{(a, b) | a \in A, b \in A\}$, koju označavamo sa $\mathbf{1_A}$. Kongruencija α algebre $\mathbf{A}$ je *minimalna* ukoliko je strogo veća od najmanje kongruencije, $\mathbf{0_A}$, i izmedju α i $\mathbf{0_A}$ nema drugih kongruencija, drugim rečima, $\alpha > \mathbf{0_A}$ i za svaku kongruenciju β algebre $\mathbf{A}$, ako je $\beta > \mathbf{0_A}$, onda $\beta \geq \alpha$.

[5]Elemente skupa A^n pišemo kao kolone koordinata.

Neka je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika $\mathcal{F}$. Neka je X skup promenljivih i $\mathbf{T}(X)$ term algebra jezika $\mathcal{F}$ nad X. Definišimo skup kongruencija $\Phi_{\mathcal{K}}(X)$ term algebre $\mathbf{T}(X)$ na sledeći način: $\Phi_{\mathcal{K}}(X) = \{\phi \in \mathbf{ConT}(X) \mid \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(\mathcal{K})\}$. Dakle, skup $\Phi_{\mathcal{K}}(X)$ sadrži sve kogruencije ϕ algebre $\mathbf{T}(X)$ takve da količnička algebra $\mathbf{T}(X)/\phi$ pripada klasi $IS(\mathcal{K})$, odnosno takve da je $\mathbf{T}(X)/\phi$ izomorfna podalgebri neke algebre iz klase $\mathcal{K}$. Dalje, definišimo kongruenciju $\Theta_{\mathcal{K}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathcal{K}}(X)$, tj. ova kongruencija je presek svih kongruencija skupa $\Phi_{\mathcal{K}}(X)$. Količnička algebra $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X}) = \mathbf{T}(X)/\Theta_{\mathcal{K}}(X)$, pri čemu je $\bar{X} = X/\Theta_{\mathcal{K}}(X)$, naziva se *$\mathcal{K}$–slobodna algebra* nad $\bar{X}$. Elementi skupa $\bar{X}$ su *slobodni generatori* ove algebre. Ukoliko je klasa $\mathcal{K}$ varijetet, slobodna algebra $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X})$ pripada ovoj klasi (tj. varijetetu) za svaki skup promenljivih X.

Najvažnije svojstvo slobodne algebre $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X})$ je tzv. *osobina univerzalnosti preslikavanja*[6] na klasi $\mathcal{K}$ nad skupom $\bar{X}$: ako je $\mathbf{A}$ proizvoljna algebra klase $\mathcal{K}$ i $\alpha : \bar{X} \longrightarrow \mathbf{A}$ proizvoljno preslikavanje skupa slobodnih generatora u algebru $\mathbf{A}$, onda postoji jedinstveni homomorfizam $\bar{\alpha} : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ takav da se na skupu $\bar{X}$ poklapa sa preslikavanjem α. (Kažemo: postoji jedinstveni homomorfizam koji je *produženje* preslikavanja α.)

Posledica svojstva univerzalnosti preslikavanja je sledeće svojstvo slobodnih algebri: ako je $\mathcal{K}$ klasa algebri jezika $\mathcal{F}$ i p i q su termi jezika $\mathcal{F}$, onda $\mathcal{K} \models p \approx q$ ako i samo ako $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\bar{X}) \models p \approx q$.

1.3 Teorija pitomih kongruencija

Tokom osamdesetih godina prošlog veka David Hobby i Ralph McKenzie razvili su tzv. *teoriju pitomih kongruencija*, [27]. Ova teorija se bavi ispitivanjem strukture konačnih algebri, pri čemu je osnovna ideja da se može dobiti dosta informacija o algebri i/ili varijetetu koji ona generiše na osnovu lokalnog ponašanja algebre. Autori definišu tzv. *tipove pokrivanja* u mrežama kongruencija konačnih algebri. Pokazuje se da je svojstvo polu–distributivnosti mreža kongruencija svih algebri lokalno konačnog varijeteta ekvivalentno sa ispuštanjem (tj. nepojavljivanjem) dva od pet definisanih tipova pokrivanja u mrežama kongruencija svih konačnih algebri tog varijeteta. Sve definicije i osnovni rezultati koji nisu navedeni u ovom kratkom prikazu mogu se pronaći u [19] (univerzalna algebra) i u [27] (teorija pitomih kongruencija).

Neka je $\mathcal{F}$ jezik algebri i $\mathbf{A}$ algebra jezika $\mathcal{F}$. Kao što je rečeno ranije, sa $\mathcal{F}_0$ smo

[6] U literaturi: *Universal mapping property.*

označili podskup skupa $\mathcal{F}$ koji predstavlja skup funkcijskih simbola arnosti 0, a koji se interpretiraju kao konstante algebre $\mathbf{A}$ (ovaj skup, naravno, može biti i prazan). Proširićemo skup $\mathcal{F}_0$ tako što za svaki $a \in A$ dodamo skupu $\mathcal{F}_0$ novi simbol a. Novi jezik označimo sa $\mathcal{F}_A$, a sa $\mathbf{A}_A$ algebru ovog jezika koja predstavlja algebru $\mathbf{A}$ sa proširenim skupom konstanti – svaki njen element je konstanta algebre. Termi jezika $\mathcal{F}_A$ nazivaju se *polinomi* algebre $\mathbf{A}$. U daljem tekstu koristićemo često termin *polinom* umesto *polinomna operacija* zbog kratkoće i zato što nam u našem radu neće trebati sintaksna struktura polinoma kao terma algebre $\mathbf{A}_A$. Za polinom (polinomnu operaciju) algebre $\mathbf{A}$ koristimo oznake $p^{\mathbf{A}}$, $q^{\mathbf{A}}$, $r^{\mathbf{A}}\ldots$ Prostije rečeno, polinomne operacije algebre $\mathbf{A}$ su zapravo operacije koje se dobijaju kada se u proizvoljnoj term–operaciji $t^{\mathbf{A}}$ ove algebre 0 ili više promenljivih zameni elementima algebre $\mathbf{A}$ (što, naravno, može smanjiti arnost operacije). Skup svih polinoma algebre $\mathbf{A}$ označavamo sa $Pol\ \mathbf{A}$, a podskupove ovog skupa koje čine polinomi arnosti n, za $n \geq 0$, sa $Pol_n\mathbf{A}$. Ako je $B \subseteq A$, sa $(Pol\mathbf{A})|_B$ označavamo skup restrikcija na B svih polinoma algebre $\mathbf{A}$ za koje je skup B zatvoren, odnosno takvih da rezultati primene polinoma na elemente skupa B takodje pripadaju ovom skupu. Pri formiranju skupa $(Pol\mathbf{A})|_B$ posmatramo *sve* polinome algebre $\mathbf{A}$, tj. i one koji sadrže konstante koje ne pripadaju skupu B.

Neka su $\mathbf{A}_1 = (A, \mathcal{F}_1)$ i $\mathbf{A}_2 = (A, \mathcal{F}_2)$ dve algebre sa istim univerzumom A i jezicima $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ koji mogu i ne moraju biti isti. Kažemo da su $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ *polinomno ekvivalentne* algebre ako imaju isti skup polinomnih operacija, odnosno, ako za svaki polinom $p(x_1, \ldots, x_n)$ algebre $\mathbf{A}_1$ postoji polinom $q(x_1, \ldots, x_n)$ algebre $\mathbf{A}_2$ tako da važi $p^{\mathbf{A}_1} = q^{\mathbf{A}_2}$ (tj. za svaku n–torku $a_1, \ldots, a_n \in A$ važi $p^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}_2}(a_1, \ldots, a_n)$).

Definicija 1.3.1. *Neka je alpha minimalna kongruencija konačne algebre* $\mathbf{A}$.

- α*–minimalan skup algebre* $\mathbf{A}$ *je podskup* U *od* $\mathbf{A}$ *koji zadovoljava uslove:*
  - $U = p(\mathbf{A})$ *za neki unarni polinom* $p(x)$ *od* $\mathbf{A}$ *koji nije konstantan bar na jednoj* α*–klasi i*
  - *u odnosu na inkluziju,* U *je minimalan skup sa ovom osobinom.*
- α*–trag od* $\mathbf{A}$ *je podskup* $N \subseteq A$ *takav da je* $|N| > 1$ *i*
  - $N = U \cap (a/_{\alpha})$ *za neki* α*–minimalan skup* U *i* α*–klasu* $a/_{\alpha}$.

Lako je videti da dati α–minimalan skup U mora sadržati najmanje jedan, a moguće i više α–tragova. Unija svih α–tragova u U zove se *telo* minimalnog skupa

U, a preostali elementi skupa U formiraju tzv. *rep* skupa U. Najbitnija činjenica ovde je da algebra $\mathbf{A}$ indukuje uniformne strukture na svim svojim α–tragovima. Najpre definišimo indukovanu strukturu:

Definicija 1.3.2. *Neka je $\mathbf{A}$ algebra i $U \subseteq \mathbf{A}$. Algebra indukovana algebrom $\mathbf{A}$ na U je algebra čiji je univerzum U, a čije osnovne operacije su svi elementi skupa $(Pol\mathbf{A})|_U$, odnosno restrikcije na U svih polinoma algebre $\mathbf{A}$ za koje je skup U zatvoren.*

Primetimo da jezik indukovane algebre $\mathbf{A}|_U$ nije isti kao jezik algebre $\mathbf{A}$, naime, jezik indukovane algebre je potencijalno beskonačan – ima funkcijski simbol za svaki polinom algebre $\mathbf{A}$ za koji je U zatvoren. Takodje se može primetiti da je skup term–operacija indukovane algebre zapravo skup njenih osnovnih operacija – kompozicija polinoma za koje je skup U zatvoren je isti takav polinom.

Neka je $\mathbf{A}$ algebra i B, C neprazni podskupovi od A. Kažemo da su B i C *polinomno izomorfni u* $\mathbf{A}$ ako postoje $f, g \in Pol_1\mathbf{A}$ takvi da

$$\begin{array}{c} f(B) = C, \quad g(C) = B, \\ gf|_B = id_B, \quad fg|_C = id_C. \end{array}.$$

Ukoliko to važi, pišemo $f : B \simeq C$.

Važno je primetiti da, ukoliko su B i C polinomno izomorfni, indukovane algebre $\mathbf{A}|_B$ i $\mathbf{A}|_C$ su *izomorfne* (posmatrane nezavisno od signature, odnosno u apstraktnoj signaturi)[7]: ako $f : B \simeq C$, onda, za $\mu = f|_B$, imamo $\mu(B) = C$ i $\mu((Pol\mathbf{A})|_B) = (Pol\mathbf{A})|_C$. (Ova poslednja jednakost znači da za bilo koju operaciju h (recimo n–arnu), h je operacija indukovane algebre $\mathbf{A}|_B$ ako i samo ako postoji (jedinstvena) n–arna operacija h' algebre $\mathbf{A}|_C$ takva da $\mu h(x_1, \ldots, x_n) = h'(\mu x_1, \ldots, \mu x_n)$ za sve $x_1, \ldots, x_n \in B$.)

Teorema 1.3.3. *([17]) Neka je α minimalna kongruencija konačne algebre $\mathbf{A}$.*

- *Ako su U i V α–minimalni skupovi, onda su oni polinomno izomorfni, a odgovarajuće indukovane algebre $\mathbf{A}|_U$ i $\mathbf{A}|_V$ su izomorfne u gore definisanom smislu (i polinomno ekvivalentne).*

- *Ako su N i M α–tragovi, onda su indukovane algebre $\mathbf{A}|_N$ i $\mathbf{A}|_M$ takodje izomorfne u gore definisanom smislu.*

[7] U [27] autori ispituju ponašanje algebri čiji su skupovi osnovnih operacija beskonačni (skupovi polinoma), pa se jezik smatra apstraktnim i beskonačnim, ili se, još češće, algebre posmatraju nezavisno od jezika, kao tzv. *neindeksirane* algebre.

- *Ako je N α–trag, onda je indukovana struktura $\mathbf{A}|_N$ polinomno ekvivalentna nekoj od sledećih struktura:*

  1. *Unarna algebra čije osnovne operacije su sve permutacije (unarni tip);*
  2. *Jednodimenzionalni vektorski prostor nad konačnim poljem (afini tip);*
  3. *2–elementna bulova algebra (bulov tip);*
  4. *2–elementna mreža (mrežni tip);*
  5. *2–elementna polumreža (polumrežni tip);*

Dokaz. Teorema u ovoj formi je data u [17], a dokaz se može pronaći u [27]. □

Prethodna teorema nam dozvoljava da dodelimo tip svakoj minimalnoj kongruenciji α date algebre na osnovu ponašanja α–tragova (na primer minimalna kongruencija čiji su α–tragovi polinomno ekvivalentni vektorskom prostoru bila bi afinog tipa ili tipa 2).

Istu ideju moguće je primeniti na par kongruencija (α, β) konačne algebre $\mathbf{A}$ pri čemu β pokriva α (tj. $\alpha < \beta$ i ne postoji konguencija algebre $\mathbf{A}$ koja bi bila strogo izmedju ove dve): može se formirati količnička algebra $\mathbf{A}/_\alpha$, i onda posmatrati kongruencija $\beta/_\alpha = \{(a/_\alpha, b/_\alpha) : (a, b) \in \beta\}$. Kako β pokriva α u mreži kongruencija algebre $\mathbf{A}$, $\beta/_\alpha$ će biti minimalna kongruencija algebre $\mathbf{A}/_\alpha$, pa joj se može dodeliti jedan od pet pomenutih tipova. Na ovaj način možemo svakom pokrivajućem paru kongruencija algebre $\mathbf{A}$ dodeliti tip (unarni, afini, bulov, mrežni, polumrežni, ili 1, 2, 3, 4, 5 redom). Prema tome, ukoliko prodjemo kroz sve pokrivajuće parove kongruencija ove algebre dobićemo odgovarajući skup tipova, koji se označava sa $typ\{\mathbf{A}\}$ (*typeset*). Takodje, za datu klasu algebri $\mathcal{K}$, skup tipova klase $\mathcal{K}$ se definiše kao unija svih skupova tipova njenih konačnih članova i označava sa $typ\{\mathcal{K}\}$.

Za konačnu algebru ili za klasu algebri se kaže da ispušta odredjeni tip ukoliko se taj tip ne pojavljuje u njenom skupu tipova. Za svaki lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ i za svaki tip i, $1 \leq i \leq 5$, $\mathcal{V}$ ili dopušta ili ispušta tip i.

Navodimo karakterizaciju kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta preko skupa tipova ovog varijeteta (Teorema 9.10 u [27]).

Teorema 1.3.4. *([27]) Za bilo koji lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $typ\{\mathcal{V}\} \cap \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} = \emptyset$.
2. *Varijetet $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.*

U [27] je izloženo šest klasa lokalno konačnih varijeteta u odnosu na ispuštanje, odnosno dopuštanje uvedenih tipova pokrivanja, koje su (do sada) okarakterisane idempotentnim Maljcevljevin uslovima. Pre nego što predstavimo ovu klasifikaciju objasnićemo detaljnije pojam *Maljcevljevog uslova (svojstva).*

1.4 Maljcevljevi uslovi

A.I.Maljcev je u radu [43] izložio karakterizaciju permutabilnosti mreže kongruencija proizvoljnog varijeteta preko sintaksnog uslova – postojanje terma (na jeziku varijeteta), takvog da su zadovoljeni izvesni identiteti u ovom varijetetu. Citiraćemo ovu teoremu da bismo prikazali „duh” ovakvih karakterizacija.

Mreže kongruencija proizvoljnog varijeteta $\mathcal{V}$ su *permutabilne* ako za svaku algebru $\mathbf{A}$ ovog varijeteta i svaki par kongruencija $\theta_1, \theta_2 \in Con\,\mathbf{A}$ važi $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Teorema 1.4.1. *(Mal' cev, [43])*
Varijetet $\mathcal{V}$ jezika $\mathcal{F}$ ima permutabilne mreže kongruencija ako i samo ako postoji term $p(x, y, z)$ jezika $\mathcal{F}$ takav da važi:

$$\mathcal{V} \models p(x, x, y) \approx y, \quad \mathcal{V} \models p(x, y, y) \approx x.$$

Ovom teoremom je započela karakterizacija različitih semantičkih osobina algebri i/ili varijeteta ekvivalentnim sintaksnim uslovima. Predstavićemo još jednu teoremu (Jónsson–ova karakterizacija distributivnosti mreža kongruencija proizvoljnog varijeteta), koja je sličnog karaktera kao prethodna, 1.4.1, mada sa bitnom razlikom u pogledu broja terma koji karakterišu svojstvo.

Mreže kongruencija proizvoljnog varijeteta $\mathcal{V}$ su *distributivne* ako za svaku algebru $\mathbf{A}$ ovog varijeteta i svaku trojku kongruencija $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in Con\,\mathbf{A}$ važi

$$\theta_1 \wedge (\theta_2 \vee \theta_3) = (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee (\theta_1 \wedge \theta_3)^8.$$

Teorema 1.4.2. *(Jónsson, [32])*
Varijetet $\mathcal{V}$ jezika $\mathcal{F}$ ima distributivne mreže kongruencija ako i samo ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i termi $d_0(x, y, z), \ldots, d_n(x, y, z)$ jezika $\mathcal{F}$, takvi da $\mathcal{V}$ zadovoljava sledeće:

$$\begin{array}{ll} d_0(x,y,z) \approx x \ \ i \ \ d_n(x,y,z) \approx z & \\ d_i(x,y,x) \approx x & za\ sve\ \ 0 < i < n \\ d_i(x,y,y) \approx d_{i+1}(x,y,y) & za\ svaki\ paran\ i,\ \ 0 \le i \le n \\ d_i(x,x,y) \approx d_{i+1}(x,x,y) & za\ svaki\ neparan\ i,\ 0 \le i \le n. \end{array} \qquad \text{(CD)}$$

[8] Može se koristiti i dualan uslov koji je ekvivalenatan datom: $\theta_1 \vee (\theta_2 \wedge \theta_3) = (\theta_1 \vee \theta_2) \wedge (\theta_1 \vee \theta_3)$.

Ukoliko varijetet zadovoljava navedene uslove za neki n kažemo da zadovoljava (CD)(n).[9] Teorema 1.4.2 predstavlja tzv. *Maljcevljev uslov* koji karakteriše distributivnost mreža kongruencija proizvoljnog varijeteta, dok teorema 1.4.1 predstavlja *jak Maljcevljev uslov* koji karakteriše permutabilnost mreža kongruencija (proizvoljnog varijeteta).

Maljcevljevi uslovi su skupovi linearnih identiteta izraženih u zasebnom jeziku koji ćemo označiti sa μ. Realizaciju ovih uslova posmatramo u algebrama i klasama algebri čiji su jezici disjunktni sa μ. *Simboli signature μ interpretiraju se termima jezika posmatranih algebri (klasa algebri), a ne obavezno funkcijskim simbolima tih jezika.* Dakle, pod interpretacijom jezika μ u (disjunktnom) jeziku $\mathcal{F}$ podrazumevamo preslikavanje koje svakom simbolu $\bar{p} \in \mu$ dodeljuje term p jezika $\mathcal{F}$ odgovarajuće arnosti.

Pod *jakim Maljcevljevim uslovom* (jezika μ) podrazumevamo konačan skup linearnih identiteta jezika μ. (Svaki pojedinačan linearni identitet takodje smatramo jakim Maljcevljevim uslovom.) Termin *linearan* znači da nije dozvoljena kompozicija funkcijskih simbola jezika μ, drugim rečima, jaki Maljcevljevi uslovi se sastoje samo od identiteta oblika $\bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx z$ i $\bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx \bar{q}(y_1, \ldots, y_m)$, gde su $\bar{p}$ i $\bar{q}$ simboli jezika μ, a $x_1, \ldots, x_n, z, y_1, \ldots, y_m$ su ma koje promenljive (dozvoljavamo i ponavljanje promenljivih u ovom nizu). Obično se koriste samo linearni *idempotentni* Maljcevljevi uslovi, kao što je slučaj i u nastavku ove disertacije[10], tj. podrazumevamo da je identitet $\bar{p}(x, \ldots, x) \approx x$ sastavni deo svakog Maljcevljevog uslova M za svaki funkcijski simbol $\bar{p}$ koji se pojavljuje u M.

Algebra $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje jak Maljcevljev uslov M ako postoji interpretacija jezika μ u jeziku $\mathcal{F}$ (setimo se, ovo znači da se svakom simbolu $\bar{p}$ jezika μ dodeljuje term p jezika $\mathcal{F}$ odgovarajuće arnosti) takva da za sve identitete

$$\bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx z \in M \ \text{ i } \bar{p}(x_1, \ldots, x_n) \approx \bar{q}(y_1, \ldots, y_m) \in M$$

algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava odgovarajuće identitete

$$p(x_1, \ldots, x_n) \approx z \ \text{ i } \ p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(y_1, \ldots, y_m).$$

Sistem jezika $\mathcal{F}$ koji se dobija ovom interpretacijom (i koji je zadovoljen u $\mathbf{A}$) označićemo sa M'.

Klasa algebri $\mathcal{K}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje jak Maljcevljev uslov M ako postoji interpretacija $(p|\bar{p} \in \mu)$ jezika μ termima jezika $\mathcal{F}$ takva da u ovoj interpretaciji svaka

[9] Ovu oznaku ćemo koristiti u poglavlju **5**.

[10] U odeljku *Idempotentnost* drugog poglavlja detaljno smo objasnili zašto je dovoljno posmatrati samo idempotentne Maljcevljeve uslove.

algebra klase $\mathcal{K}$ realizuje uslov M (zadovoljava sistem M', dobijen interpretacijom $(p|\bar{p} \in \mu)$).

Primetimo da se ovde svojstvo *realizovati jak Maljcevljev uslov* posmatra na dva nivoa opštosti – može se odnositi na pojedinačnu algebru ili na klasu algebri (nekog jezika). Ukoliko svaka algebra klase $\mathcal{K}$ realizuje jak Maljcevljev uslov M, to ne mora značiti da ga i sama klasa $\mathcal{K}$ realizuje (jer algebre iste klase mogu realizovati uslov M za različite interpretacije jezika uslova μ u jeziku ovih algebri (zajedničkom), $\mathcal{F}$). Dakle, klasa $\mathcal{K}$ realizuje uslov M samo ako postoji *jedinstvena* interpretacija jezika μ u jeziku $\mathcal{F}$ za koju sve algebre ove klase realizuju uslov M. Ova razlika je vrlo važna (postoje klase algebri u kojima svaka algebra realizuje posmatrani jak Maljcevljev uslov M, ali ga cela klasa ne realizuje), medjutim, u ovoj disertaciji je značajna samo u poslednjem poglavlju, jer nas u ostatku zanima samo realizacija uslova u pojedinačnim konačnim algebrama, odnosno u konačno generisanim varijetetima.

Činjenica 1.4.3. *1. Algebra* $\mathbf{A}$ *realizuje jak Maljcevljev uslov* M *ako i samo ako ga realizuje varijetet generisan algebrom* $\mathbf{A}$ *(HSP(*$\mathbf{A}$*)).*

2. Klasa $\mathcal{K}$ *realizuje jak Maljcevljev uslov* M *ako i samo ako ga realizuje varijetet generisan ovom klasom, HSP(*$\mathcal{K}$*).*

Dokaz. Dokaz jednog smera oba prethodna tvrdjenja je trivijalan, naime, ukoliko varijetet generisan algebrom $\mathbf{A}$ (klasom $\mathcal{K}$) realizuje jak Maljcevljev uslov M, onda ga takodje realizuje i algebra $\mathbf{A}$ (klasa $\mathcal{K}$). Drugi smer oba tvrdjenja sledi iz činjenice da za bilo koju klasu $\mathcal{K}$ algebri (nekog jezika $\mathcal{F}$), klase $\mathcal{K}$, $\mathrm{S}(\mathcal{K})$, $\mathrm{P}(\mathcal{K})$ i $\mathrm{H}(\mathcal{K})$ zadovoljavaju iste identitete nad bilo kojim skupom promenljivih ([19]). □

Kao što je rečeno, Maljcevljevi uslovi se koriste za sintaksnu karakterizaciju osobina algebri i/ili klasa algebri, pri čemu su posmatrane osobine najčešće semantičke (kao permutabilnost mreža kongruencija varijeteta, teorema 1.4.1). Kažemo da je svojstvo P algebre ili klase algebri *jako Maljcevljevo svojstvo* ako postoji jak Maljcevljev uslov M takav da za svaku algebru $\mathbf{A}$ (klasu algebri $\mathcal{K}$) važi da $\mathbf{A}$ ($\mathcal{K}$) ima svojstvo P ako i samo ako realizuje uslov M. Na primer, permutabilnost mreža kongruencija je jako Maljcevljevo svojstvo (varijeteta). U praksi nas svojstvo P često zanima samo u slučaju lokalno konačnih varijeteta, kao što je slučaj u ovoj tezi. Kažemo da je svojstvo P jako Maljcevljevo svojstvo lokalno konačnih varijeteta ako postoji jak Maljcevljev uslov M takav da za svaki lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ važi da $\mathcal{V}$ ima svojstvo P ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje uslov M.

Jaki Maljcevljevi uslovi se mogu porediti, odnosno može se posmatrati relacija *preduredjenja* medju njima (preduredjenje je binarna relacija koja je refleksivna i tranzitivna). Ovo preduredjenje označavamo sa $\preceq$ i definišemo ovako: ako su M_1 i M_2 dva jaka Maljcevljeva uslova, važi $M_1 \preceq M_2$ ako i samo ako svaki varijetet koji realizuje M_2 takodje realizuje i M_1. Ako se ograničimo na lokalno konačne varijetete, ovu relaciju označavamo sa $\preceq_{lf}$, dakle $M_1 \preceq_{lf} M_2$ ako i samo ako svaki lokalno konačan varijetet koji realizuje M_2 takodje realizuje i M_1. Ako važi $M_1 \preceq M_2$ ($M_1 \preceq_{lf} M_2$) kažemo da je M_1 (sintaksno) slabiji uslov od M_2 (odnosno sintaksno slabiji u lokalno konačnim varijetetima). Uslovi M_1 i M_2 su ekvivalentni (ekvivalentni u lokalno konačnim varijetetima) ako i samo ako važi $M_1 \preceq M_2$ i $M_2 \preceq M_1$ ($M_1 \preceq_{lf} M_2$ i $M_2 \preceq_{lf} M_1$).

Ako je M proizvoljan jak Maljcevljev uslov jezika μ, označimo sa $Mod(M)$ klasu algebri istog jezika μ koje zadovoljavaju identitete uslova M. Klasa $Mod(M)$ je varijetet aksiomatizovan skupom identiteta M. Kažemo da varijetet $Mod(M)$ *interpretira* uslov M. Ovaj varijetet je jedinstven, za razliku od varijeteta koji *realizuju* uslov M, tj. onih u kojima je uslov zadovoljen za konkretnu interpretaciju $\{p|\bar{p} \in \mu\}$ jezika μ u jeziku $\mathcal{F}$ posmatranog varijeteta (pri čemu se funkcijski simboli jezika μ interpretiraju termima jezika $\mathcal{F}$, kao što je objašnjeno ranije).

Lema 1.4.4. *Ako su M_1 i M_2 dva jaka Maljcevljeva uslova, onda $M_1 \preceq M_2$ ako i samo ako $Mod(M_2)$ realizuje M_1.*

Dokaz. Radi preglednosti dokaza, pretpostavimo da su uslovi izraženi u različitim jezicima. Neka su μ_1, μ_2 jezici, redom uslova M_1 i M_2. Pretpostavimo da važi $M_1 \preceq M_2$, odnosno da svaki varijetet koji realizuje M_2 takodje realizuje i M_1. Tada verijetet $Mod(M_2)$ realizuje M_1 (budući da realizuje M_2 uz trivijalnu, odnosno identičku interpretaciju jezika μ_2 u μ_2).

Neka varijetet $Mod(M_2)$ realizuje M_1 i neka $\tau_1 : \mu_1 \to \mathbf{T}(\mu_2)$ to svedoči. Neka je $\mathcal{V}$ bilo koji varijetet jezika $\mathcal{F}$ koji realizuje M_2. To znači da postoji interpretacija $\tau_2 : \mu_2 \to \mathbf{T}(\mathcal{F})$ koja omogućava ovu realizaciju. Preslikavanje τ_2 se proširuje do homomorfizma $\hat{\tau_2} : \mathbf{T}(\mu_2) \to \mathbf{T}(\mathcal{F})$. Kompozicija $\hat{\tau_2} \circ \tau_1$ je interpretacija jezika μ_1 u $\mathcal{F}$ koja omogućuje realizaciju uslova M_1 u varijetetu $\mathcal{V}$. $\square$

Svojstvo P je *Maljcevljevo svojstvo* ako i samo ako postoji niz jakih Maljcevljevih uslova $\{M_i \mid i \in \omega\}$ takav da $M_{i+1} \preceq M_i$ za svaki $i \in \omega$, i da proizvoljan varijetet $\mathcal{V}$ ima svojstvo P ako i samo ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov M_k za neko $k \in \omega$. Ovakvu formulaciju nazivamo *Maljcevljev uslov* koji karakteriše svojstvo P. Na primer, svojstvo distributivnosti mreža kongruencija proizvoljnog varijeteta je Maljcevljevo svojstvo prema teoremi 1.4.2.

Sada možemo navesti klasifikaciju lokalno konačnih varijeteta u odnosu na ispuštanje tipova pokrivanja (definisanih u prethodnom odeljku), onako kako je data u [40]. U tabeli koja sledi $\mathcal{M}_{\{i\}}$ označava klasu lokalno konačnih varijeteta koji ispuštaju tip pokrivanja i, $\mathcal{M}_{\{i,j\}}$ klasu lokalno konačnih varijeteta koji ispuštaju tipove pokrivanja i i j, itd.

Klasa varijeteta	Ekvivalentno svojstvo
$\mathcal{M}_{\{1\}}$	Ovi varijeteti zadovoljavaju netrivijalan Maljcevljev uslov
$\mathcal{M}_{\{1,5\}}$	Mreže kongruencija ovih varijeteta zadovoljavaju netrivijalan identitet, videti [36]
$\mathcal{M}_{\{1,4,5\}}$	Mreže kongruencija ovih varijeteta zadovoljavaju n–permutabilnost za neki $n > 1$, videti [27]
$\mathcal{M}_{\{1,2\}}$	Mreže kongruencija ovih varijeteta zadovoljavaju $\wedge$–poludistributivnost
$\mathcal{M}_{\{1,2,5\}}$	Mreže kongruencija ovih varijeteta zadovoljavaju $\vee$–poludistributivnost, videti [36]
$\mathcal{M}_{\{1,2,4,5\}}$	Mreže kongruencija ovih varijeteta zadovoljavaju n–permutabilnost za neki $n > 1$ kao i $\vee$–poludistributivnost

U [27] je dokazano da je svih šest navedenih klasa lokalno konačnih varijeteta moguće okarakterisati Maljcevljevim uslovima. Ipak, nijedan od tih uslova nije jak u smislu definisanom ranije.

Da bismo izložili Maljcevljevu karakterizaciju klase $\mathcal{M}_{\{1,2\}}$ (odnosno svojstva $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija lokalno konačnog varijeteta), neophodno je uvesti nekoliko pojmova.

Definicija 1.4.5. *Neka je t term jezika $\mathcal{F}$ arnosti $n > 1$.*

1. Term t je skoro jednoglasan[11]*, ili skraćeno* nu–term *za algebru* $\mathbf{A}$ *ukoliko* $\mathbf{A}$ *zadovoljava identitete*

$$t(x, x, \ldots, x, y) \approx t(x, x, \ldots, y, x) \approx \cdots \approx t(x, y, \ldots, x, x) \approx t(y, x, \ldots, x, x) \approx x.$$

[11]Engleski: near–unanimity term

2. Term t je slab skoro jednoglasan[12]*, ili skraćeno* wnu–term *za algebru* $\mathbf{A}$ *ukoliko* $\mathbf{A}$ *zadovoljava identitete*

$$t(x, x, \ldots, x, y) \approx t(x, x, \ldots, y, x) \approx \cdots \approx t(x, y, \ldots, x, x) \approx t(y, x, \ldots, x, x).$$

3. Term t je nu–term (wnu–term) varijeteta ako je nu–term (wnu–term) svake algebre tog varijeteta.

Za nu–term arnosti k u literaturi se često koriste skraćenice k–nu i nu$k$, dok se za wnu–term arnosti k koriste skraćenice k–wnu i wnu$k$. U ovoj disertaciji koristimo ove skraćenice u poglavlju **3**.

Sada možemo formulisati pomenutu karakterizaciju $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija lokalno konačnog varijeteta.

Teorema 1.4.6. *([45]) Lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ pripada klasi $\mathcal{M}_{\{1,2\}}$, tj. ima svojstvo $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija, ako i samo ako postoji $m > 0$, takav da za svaki $k > m$ postoji term arnosti k (istog jezika kao varijetet $\mathcal{V}$) koji je wnu–term za ovaj varijetet.*

Primetimo da se u teoremi zahteva da varijetet $\mathcal{V}$ realizuje beskonačno mnogo jakih Maljcevljevih uslova (egzistencija wnu–terma konkretne arnosti k je jak Maljcevljev uslov). Kozik, Krokhin, Valeriote i Willard su u radu [40] dokazali da se isto može postići i jednim jakim uslovom koji uključuje samo jedan ternarni i jedan 4–arni term, koji su wnu–termi za dati varijetet:

Teorema 1.4.7. *([40]) Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija ako i samo ako realizuje sledeći jak Maljcevljev uslov:*

$$\begin{gathered} \bar{v}(x, x, x) \approx \bar{w}(x, x, x, x) \approx x, \\ \bar{v}(x, x, y) \approx \bar{v}(x, y, x) \approx \bar{v}(y, x, x) \approx \bar{w}(x, x, x, y) \\ \approx \bar{w}(x, x, y, x) \approx \bar{w}(x, y, x, x) \approx \bar{w}(y, x, x, x). \end{gathered} \tag{SM 0}$$

Kao posledicu prethodne teoreme Janko i Maroti su dobili jak Maljcevljev uslov koji takodje karakteriše 1.4.7 i kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta, a koji je izražen sa tri ternarna terma. Prethodna teorema, kao i ova posledica, predstavljale su polaznu tačku u istraživanju predstavljenom u ovoj disertaciji.

[12]Engleski: weak near–unanimity term

Posledica 1.4.8. *(Janko, Maróti)*
Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija ako i samo ako realizuje sledeći jak Maljcevljev uslov:

$$\begin{gathered}
\bar{p}(x,x,x) \approx \bar{q}(x,x,x) \approx \bar{r}(x,x,x) \approx x, \\
\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\
\approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{r}(x,y,x) \approx \bar{r}(y,x,x), \\
\bar{q}(x,y,y) \approx \bar{r}(x,x,y).
\end{gathered} \tag{SM 01}$$

Poglavlje 2

Termi višestrukosti najviše tri

Poglavlje **2** sadrži analizu jakih Maljcevljevih uslova u kojima, osim binarnih terma, figurišu još najviše dva ternarna terma. U prvom odeljku poglavlja objasnićemo zašto posmatramo samo idempotentne algebre i odgovarajuće jake Maljcevljeve uslove. U drugom odeljku definišemo tri konačne algebre, od kojih svaka generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. Ove algebre nam služe kao test–primeri na kojima ispitujemo realizaciju Maljcevljevih uslova koji potencijalno karakterišu $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta. Takodje definišemo i klasu idempotentnih redukta modula čije mreže kongruencija nemaju to svojstvo. Ove algebre kasnije koristimo pri ispitivanju da li odredjeni sistem implicira pomenuto svojstvo: prema tvrdjenju 2.2.7, sistem koji nije realizovan ni u jednoj od tih algebri implicira svojstvo. U trećem odeljku analiziramo sisteme koji sadrže najviše jedan ternarni term i dokazujemo Teoremu 1.

Glavni i najobimniji deo analize je sadržan u četvrtom odeljku. U njemu analiziramo sisteme sa dva ternarna terma i izdvajamo samo jedan sistem, do na permutacije promenljivih i simbola terma, koji je kandidat za optimalnu karakterizaciju.

2.1 Idempotentnost

U analizi jakih Maljcevljevih uslova izloženoj u nastavku poglavlja ograničavamo se na idempotentne Maljcevljeve uslove i algebre čije su bazne operacije idempotentne. Objasnićemo zašto je ovo dovoljno (za detaljnije objašnjenje čitalac se upućuje na [45] i poglavlje 9 u [27]): neka je $\mathcal{V}$ prozvoljan varijetet jezika $\mathcal{F}$. Posmatraćemo tzv. *idempotentni redukt* varijeteta $\mathcal{V}$, tj. novi varijetet $\mathcal{V}^{id}$, nekog novog jezika $\mathcal{F}'$, za koji važi da je svaka term–operacija svake algebre koja mu pripada idempotentna. (Ako varijetet ima ovo svojstvo kažemo kratko da je *idempotentan*.) Varijetet $\mathcal{V}^{id}$ formiramo na sledeći način: posmatramo term–algebru $\mathbf{T}(X)$ jezika $\mathcal{F}$ nad prebrojivim skupom promenljivih X. Za svaki term $t \in \mathbf{T}(X)$ za koji važi $\mathcal{V} \models t(x,\dots,x) \approx x$ (odnosno term t indukuje idempotentnu term–operaciju na svakoj algebri varijeteta $\mathcal{V}$), uvodimo odgovarajući funkcijski simbol f_t jezika $\mathcal{F}'$ iste arnosti kao t. Jezik $\mathcal{F}'$ varijeteta $\mathcal{V}^{id}$ sastoji se, dakle, isključivo od funkcijskih simbola f_t pri čemu t prolazi kroz sve terme jezika $\mathcal{F}$ takve da $\mathcal{V} \models t(x,\dots,x) \approx x$. Dalje, za svaku algebru $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ postoji odgovarajuća algebra $\mathbf{A}^{id}$, jezika $\mathcal{F}'$, sa istim univerzumom A, definisanna ovako:

$$\mathbf{A}^{id} = (A, \{t^{\mathbf{A}} | t \textit{ je term jezika } \mathcal{F} \textit{ takav da } \mathcal{V} \models t(x,\dots,x) \approx x\}).$$

Prema tome, bazne operacije algebre $\mathbf{A}^{id}$ su term–operacije algebre A indukovane termima za koje važi $\mathcal{V} \models t(x,\dots,x) \approx x$. Varijetet $\mathcal{V}^{id}$ se sada definiše kao varijetet generisan klasom algebri $\{\mathbf{A}^{id} | \mathbf{A} \in \mathcal{V}\}$.

Može se pokazati da su sva svojstva algebri i varijeteta koje su od značaja za nas invarijante opisane konstrukcije $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}^{id}$, $\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}^{id}$. Recimo, postoji k–arni wnu–term za algebru A (koji je term jezika $\mathcal{F}$), ako i samo ako isto važi za algebru $\mathbf{A}^{id}$ (ovde je u pitanju term jezika $\mathcal{F}'$). Isto tvrdjenje važi za varijetete $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}^{id}$. Dalje, ukoliko je $\mathcal{V}$ lokalno konačan $\mathcal{V}^{id}$ je takodje lokalno konačan. U slučaju da $\mathcal{V}$ jeste lokalno konačan, $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\wedge$–poludistributivnosti mreža konguencija ako i samo ako $\mathcal{V}^{id}$ ima isto svojstvo (videti teoremu 1.4.7). Dakle, pri ispitivanju karakterizacija ovog svojstva jakim Maljcevljevim uslovima, dovoljno je ograničiti se na idempotentne varijetete, u smislu definisanom prethodno, odnosno dovoljno je posmatrati idempotentne jake Maljcevljeve uslove.

Konvencija 2.1.1. *U nastavku disertacije posmatramo samo algebre u kojima je svaka bazna operacija idempotentna (tzv.* idempotentne algebre*), kao i idempotentne Maljcevljeve uslove.*

2.2 Primeri

U ovom odeljku definisaćemo tri primera, odnosno tri konačne algebre od kojih svaka generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. Poslednji pododeljak posvećen je idempotentnim reduktima modula, čije mreže kongruencija nemaju tu osobinu.

2.2.1 Polumreža

Primer 1. Neka $\mathbf{B} = \langle\ \{0\ ,\ 1\}\ ,\ \wedge\ \rangle$ označava polumrežu sa dva elementa, tj. $\mathbf{B}$ je dvoelementna algebra jezika $\mathcal{F} = \{\wedge\}$, pri čemu je $\wedge$ binarni funkcijski simbol, koja zadovoljava sledeće identitete:

$$\begin{aligned} & x \wedge y \approx y \wedge x && \text{(komutativnost)} \\ & x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z && \text{(asocijativnost)} \\ & x \wedge x \approx x && \text{(idempotentnost)} \end{aligned}$$

Varijetet $V(\mathbf{B}) = HSP(\mathbf{B})$, generisan ovom algebrom, ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti: najpre, lako je proveriti da su termi

$$v(x, y, z) = x \wedge y \wedge z \quad \text{i} \quad w(x, y, z, u) = x \wedge y \wedge z \wedge u$$

wnu–termi[1] za ovu algebru, pa samim tim i za varijetet $V(\mathbf{B})$ (jer $\mathbf{B}$ i $V(\mathbf{B})$ zadovoljavaju iste identitete nad bilo kojim skupom promenljivih X). Dalje, važi $V(\mathbf{B}) \models w(y, x, x, x) \approx v(y, x, x)$, što znači da su zadovoljeni uslovi teoreme 1.4.7.

Za svaku polumrežu sa bar dva elementa, dakle i za $\mathbf{B}$, važi da svaki term zavisi od svih promenljivih koje se u tom termu pojavljuju, odnosno esencijalna arnost terma u polumreži jednaka je broju promenljivih koje se u tom termu pojavljuju. U nastavku disertacije koristićemo ovu cinjenicu.

Činjenica 2.2.1. *Za svaki ternarni term $t(x, y, z)$ (jezika $\{\wedge\}$) polumreža $\mathbf{B}$ zadovoljava tačno jedan od identiteta:*

$$\begin{array}{lll} & t(x,y,z) \approx x \wedge y \wedge z, & \\ t(x,y,z) \approx x \wedge y, & t(x,y,z) \approx x \wedge z, & t(x,y,z) \approx y \wedge z, \\ t(x,y,z) \approx x, & t(x,y,z) \approx y, & t(x,y,z) \approx z. \end{array}$$

2.2.2 Algebra sa majority-term operacijom

Primer 2. Neka je $\mathcal{F} = \{f\}$ jezik koji sadrži samo ternarni simbol i neka je $A = \{0, 1, 2\}$. Definišimo $f^{\mathbf{A}} : A^3 \to A$ tako da za sve $a, b \in A$ (moguće i $a = b$) važi:

$$f^{\mathbf{A}}(a, a, b) = f(a, b, a) = f(b, a, a) = a$$

Ukoliko su a, b, c medjusobno različiti, definišimo $f^{\mathbf{A}}(a, b, c) = a$. Tada je $\mathbf{A} = (A, f^{\mathbf{A}})$ troelementna algebra takva da:

[1] Videti definiciju wnu–terma, 1.4.5.

$$\mathbf{A} \models f(x,x,y) \approx f(x,y,x) \approx f(y,x,x) \approx x.$$

Term $f(x,y,z)$ je ternarni nu–term[2] algebre $\mathbf{A}$, koji se mnogo češće naziva *većinski* ili *majority–term* (algebre $\mathbf{A}$). Odgovarajuća term–operaciju $f^{\mathbf{A}}$ algebre $\mathbf{A}$ se naziva majority–operacijom. U daljem tekstu nije bitno kako je operacija $f^{\mathbf{A}}$ definisana za slučaj kada su sva tri argumenta različita, već samo da se radi o majority–operaciji.

Algebra $\mathbf{A}$ generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet: neka je 4–arni term jezika $\mathcal{F}$, definisan sa $g(x,y,w,z) = f(x,y,f(x,w,z))$. Lako se proverava da je term g wnu–term za algebru $\mathbf{A}$, pa i za varijetet $V(\mathbf{A})$. Takodje važi

$$\mathbf{A} \models g(y,x,x,x) \approx f(y,x,x) \quad \text{i} \quad V(\mathbf{A}) \models g(y,x,x,x) \approx f(y,x,x).$$

Na osnovu teoreme 1.4.7 varijetet $V(\mathbf{A})$ ima $\wedge$–poludistributivne mreže kongruencija.

Algebra $\mathbf{A}$ ima neka interesantna svojstva:

1. Dokazaćemo da za svaki binarni term $t(x,y)$ jezika $\mathcal{F}$, algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava tačno jedan od sledeća dva identiteta: $t(x,y) \approx x$ i $t(x,y) \approx y$. To znači da je odgovarajuća term–operacija $t^{\mathbf{A}}$ ili prva projekcija, π_1, ili druga, π_2. Dakle, tvrdimo da su jedine binarne term–operacije na $\mathbf{A}$ projekcije π_1, π_2.

   Dokaz. Dokazaćemo ovo tvrdjenje indukcijom po složenosti terma t.

   - Ako je term $t(x,y)$ samo promenljiva x, tj. $t(x,y) = x$, onda je odgovarajuća term–operacija $t^{\mathbf{A}}$ prva projekcija i tvrdjenje važi.
   - Ako je term $t(x,y)$ samo promenljiva y, $t(x,y) = y$, odgovarajuća term–operacija $t^{\mathbf{A}}$ je druga projekcija i tvrdjenje važi.
   - Neka je $t(x,y) = f(t_1(x,y), t_2(x,y), t_3(x,y))$, gde su t_1, t_2 i t_3 binarni termi manje složenosti. Na osnovu induktivne hipoteze, za bilo koji od ovih terma, t_i, algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava tačno jedan od identiteta $t_i(x,y) \approx x$, $t_i(x,y) \approx y$. Ovo znači da za bar dva od t_1, t_2, t_3 algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava identitete sa istom promenljivom na desnoj strani; pretpostavićemo (bez gubitka opštosti) da važi $\mathbf{A} \models t_1(x,y) \approx y$ i $\mathbf{A} \models t_3(x,y) \approx y$. Budući da je $f(x,y,z)$ majority–term algebre $\mathbf{A}$, dobijamo $\mathbf{A} \models f(t_1(x,y), t_2(x,y), t_3(x,y)) \approx y$, tj. $\mathbf{A} \models t(x,y) \approx y$, čime je dokaz završen. $\square$

[2] Pojmovi nu–terma i wnu–terma su definisani u definiciji 1.4.5.

2. Za svaki ternarni term $p(x,y,z)$ jezika $\mathcal{F}$, algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava ili jedan od identiteta (1), (2), (3) ili niz identiteta (4):

   (1) $p(x,y,z) \approx x$

   (2) $p(x,y,z) \approx y$

   (3) $p(x,y,z) \approx z$

   (4) $p(x,x,y) \approx p(x,y,x) \approx p(y,x,x) \approx x$;

   Dakle, ternarni term jezika $\mathcal{F}$ je ili majority term algebre $\mathbf{A}$ ili indukuje term–operaciju koja je jedna od projekcija π_1, π_2, π_3.

   Dokaz. Dokazaćemo tvrdjenje indukcijom po složenosti terma $p(x,y,z)$.

   - Ako je $p(x,y,z)$ samo promenljiva ili je $p(x,y,z) = f(x,y,z)$, tvrdjenje očito važi.
   - Neka je $p(x,y,z) = f(p_1(x,y,z), p_2(x,y,z), p_3(x,y,z))$, gde su p_1, p_2, p_3 ternarni termi manje složenosti. Prema induktivnoj hipotezi, za svaki od ovih terma p_i, $i \in \{1,2,3\}$, algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava ili neki od identiteta (1), (2), (3), ili niz identiteta (4) (ako je zadovoljen niz (4), p_i je majority–term algebre $\mathbf{A}$). Imamo sledeće slučajeve:
     * Ukoliko su bar dva od p_1, p_2, p_3 majority–termi algebre $\mathbf{A}$ (tj. $\mathbf{A}$ zadovoljava odgovarajuće nizove identiteta), tada je p takodje majority–term ove algebre.
     * Neka je tačno jedan od p_1, p_2, p_3 majority–term algebre $\mathbf{A}$, i za preostala dva terma ova algebra zadovoljava isti od identiteta (1), (2), (3) (tj. na desnoj strani je ista promenljiva, recimo x). Dobijamo da $\mathbf{A}$ zadovoljava isti taj identitet i za term p ($p(x,y,z) \approx x$).
     * Neka je tačno jedan od p_1, p_2, p_3 majority–term algebre $\mathbf{A}$, i pretpostavimo da za preostala dva terma $\mathbf{A}$ zadovoljava dva različita identiteta (iz skupa $\{(1),(2),(3)\}$). U ovom slučaju p je majority–term algebre $\mathbf{A}$.
     * Ako za terme p_1, p_2 i p_3 algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava tri identiteta iz skupa $\{(1),(2),(3)\}$, odnosno ovi termi indukuju tri različite projekcije na $\mathbf{A}$, dobijamo da je term $p(x,y,z)$ majority–term za ovu algebru (permutacijom promenljivih majority–terma dobijamo ponovo majority–term).

* Ako za dva od p_1, p_2, p_3 algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava isti od identiteta (1), (2), (3), dok za treći term zadovoljava neki drugi identitet (ponovo iz skupa $\{(1),(2),(3)\}$), odnosno p_1, p_2, p_3 indukuju projekcije π_i, π_i, π_j (u proizvoljnom redosledu) za neke $i, j \in \{1,2,3\}$ i $i \neq j$, onda p indukuje projekciju π_i (tj. $\mathbf{A}$ zadovoljava identitet iz skupa $\{(1),(2),(3)\}$ koji je zadovoljen za pomenuta dva terma). $\square$

2.2.3 Primer 3

Neka se jezik $\mathcal{F}$ sastoji samo od jednog ternarnog funkcijskog simbola, f. Neka je $\mathbf{C} = (\ \{0\ ,\ 1\}\ ,\ f^{\mathbf{C}}\ )$ (jedinstvena) 2-elementna algebra ovog jezika takva da važi:

$$\mathbf{C} \models f(x,x,y) \approx f(x,y,x) \approx f(y,x,x) \approx x.$$

Term $f(x,y,z)$ je majority–term algebre $\mathbf{C}$, a bazna operacija je majority–operacija ove algebre. U prethodnom primeru smo dokazali da ovakva algebra[3] za svaki ternarni term p jezika $\mathcal{F}$ zadovoljava ili jedan od identiteta (1), (2), (3), ili niz identiteta (4). (Svaki ternarni term p indukuje ili neku projekciju ili majority–operaciju na $\mathbf{C}$.)

Dalje, neka je $\mathbf{D} = (\ \{0\ ,\ 1\}\ ,\ f^{\mathbf{D}}\ )$ 2-elementna algebra istog jezika u kojoj je $f^{\mathbf{D}}$ definisana ovako: $f^{\mathbf{D}}(a,b,c) = a \wedge b \wedge c$, za sve $a, b, c \in D$, pri čemu je $\wedge$ polumrežna operacija infimuma (tj. operacija koja ima osobine komutativnosti, asocijativnosti i idempotentnosti, kao u primeru 1).

Pokazaćemo da algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet.

Dokaz. Posmatrajmo terme $f(x,y,z)$ i $w(x,y,z,u) = f(x,y,f(x,z,u))$ jezika $\mathcal{F}$. Tvrdimo da algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ realizuje jak Maljcevljev uslov definisan u teoremi 1.4.7 pri interpretaciji $(v,w) \longrightarrow (f,w)$, gde su v i w redom ternarni i 4–arni term iz pomenute teoreme, a f i w su termi definisani iznad.

Neka je (a_1,a_2) proizvoljan element algebre $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

$$\begin{aligned}
& f^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((a_1,a_2),(a_1,a_2),(a_1,a_2)) = \\
= \ & (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2)) = (a_1,a_2). \\
& w^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((a_1,a_2),(a_1,a_2),(a_1,a_2),(a_1,a_2)) = \\
= \ & (w^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1,a_1), w^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2,a_2)) = \\
= \ & (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1)), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2)) = \\
= \ & (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2)) = (a_1,a_2).
\end{aligned}$$

[3] Konačna algebra sa jednom baznom operacijom koja je majority–operacija se u literaturi često naziva *majority algebra*.

Ovim je dokazano da $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \models f(x,x,x) \approx w(x,x,x,x) \approx x$.
Neka su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) dva elementa algebre $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

$$\begin{aligned}
& f^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((a_1,a_2),(a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \\
= \;& (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,b_1), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,b_2)) = (a_1, a_2 \wedge b_2). \\
& w^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((a_1,a_2),(a_1,a_2),(a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \\
= \;& (w^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1,b_1), w^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2,b_2)) = \\
= \;& (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,b_1)), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,b_2)) = \\
= \;& (f^{\mathbf{C}}(a_1,a_1,a_1), f^{\mathbf{D}}(a_2,a_2,a_2 \wedge b_2)) = (a_1, a_2 \wedge b_2).
\end{aligned}$$

Ovim je dokazano da $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \models f(x,x,y) \approx w(x,x,x,y)$. Slično se dokazuje

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} \models f(x,x,y) \approx f(x,y,x) \approx f(y,x,x) \quad \text{i}$$

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} \models w(x,x,x,y) \approx w(x,x,y,x) \approx w(x,y,x,x) \approx w(y,x,x,x).$$

Kako varijetet $V(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ zadovoljava iste identitete (jezika $\mathcal{F}$) kao algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, zaključujemo da realizuje jak Maljcevljev uslov iz teoreme 1.4.7, pa ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. □

Činjenica 2.2.2. *Svaki sistem (jak Maljcevljev uslov) koji karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta mora biti realizovan u algebrama* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *iz primera* 1*,* 2 *i* 3 *redom.*

2.2.4 Idempotentni redukti modula

Pod pojmom prstena podrazumevamo komutativan prsten sa jedinicom:

$$\mathbf{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1).$$

Prsten $\mathbf{R}$ odredjuje signaturu $\{+, -, 0\} \cup \{r\cdot \mid r \in R\}$ u kojoj su $r\cdot$ unarni operacijski simboli. *(Levi) modul nad prstenom* $\mathbf{R}$, ili $\mathbf{R}$-modul, je algebra ove signature $\mathbf{E} = (E, +, -, 0, r\cdot)_{r\in\mathbf{R}}$, takva da je $(E, +, -, 0)$ komutativna grupa i za sve $r, s \in R$ važi:

1. $r \cdot (x + y) \approx r \cdot x + r \cdot y$
2. $(r + s) \cdot x \approx r \cdot x + s \cdot x$
3. $r \cdot (s \cdot x) \approx (rs) \cdot x$.

Modul $\mathbf{E}$ je *netrivijalan* ukoliko skup E ima bar dva elementa. Terme datog modula $\mathbf{E}$ možemo, do na ekvivalenciju, jednostavno opisati na sledeći način: za svaki term $p(x_1, \ldots, x_n)$ postoje $r_1, \ldots, r_n \in R$ takvi da u $\mathbf{E}$ važi

$$p(x_1, \ldots, x_n) \approx r_1 \cdot x_1 + \ldots + r_n \cdot x_n,$$

pri čemu n–torka $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ ne mora biti jednoznačno odredjena. Takodje, $p(x_1, \ldots, x_n)$ odredjuje idempotentnu term–operaciju modula $\mathbf{E}$ ako i samo ako $r_1, \ldots, r_n \in R$ mogu biti izabrani tako da važi i $r_1 + \ldots + r_n = 1$.

Modul $\mathbf{E}$ je *veran* $\mathbf{R}$-*modul* ukoliko u njemu ne važi identitet $r \cdot x \approx 0$ ni za jedan element $r \in R \setminus \{0\}$. Lako je proveriti da termi u vernom modulu $\mathbf{E}$ imaju do na ekvivalenciju jedinstven opis: za svaki term $p(x_1, \ldots, x_n)$ postoji tačno jedna n-torka $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ takva da važi

$$p(x_1, \ldots, x_n) \approx r_1 \cdot x_1 + \ldots + r_n \cdot x_n \, .$$

Pun idempotentan redukt $\mathbf{R}$-modula $\mathbf{E}$ je algebra $\mathbf{E}^r$ čiji je univerzum isti skup, E, a čije su bazne operacije sve idempotentne term–operacije modula $\mathbf{E}$. Budući da je kompozicija idempotentnih operacija takodje idempotentna operacija, skupovi baznih i term–operacija algebre $\mathbf{E}^r$ se poklapaju. Primetimo da jezik ovog redukta nije isti kao jezik modula $\mathbf{E}$, naime jezik redukta sadrži poseban funkcijski simbol f_t za svaku idempotentnu term–operaciju t modula $\mathbf{E}$ (i ništa osim ovih simbola). (Idempotentan redukt modula $\mathbf{E}$ koji nije pun, dobili bismo ako bismo uključili neke, ali ne i sve, idempotentne term–operacije modula $\mathbf{E}$.)

Za karakterizaciju svojstva poludistributivnosti mreže kongruencija važni su puni idempotentni redukti konačnih modula nad konačnim prstenima.

Konvencija 2.2.3. *Sa $\mathbb{Z}_p^r$ ćemo označavati redukt polja $\mathbb{Z}_p$ kao jednodimenzionog vektorskog prostora.*

Pre nego što citiramo najvažniju teoremu u ovom odeljku, setimo se da su dve algebre, ne obavezno istog jezika, term–ekvivalentne ukoliko imaju isti univerzum i iste term–operacije. Kažemo da je algebra $\mathbf{A}$ *term–ekvivalentna skupu* ako nema drugih term–operacija osim projekcija. Sledeća teorema je dokazana metodama teorije pitomih konguencija i posledica je Maljcevljeve karakterizacije klase $\mathcal{M}_{1,2}$, odnosno klase lokalno konačnih varijeteta koji ispuštaju tipove pokrivanja 1 i 2 (tj. ekvivalentno, koji su kongruencijski $\wedge$–poludistributivni).

Teorema 2.2.4. *([49]) Neka je $\mathbf{A}$ konačna idempotentna algebra i neka je $\mathcal{V} = V(A)$ varijetet generisan ovom algebrom. Tada je varijetet $\mathcal{V}$ kongruencijski $\wedge$–poludistributivan ako i samo ako ne sadrži algebru koja je term–ekvivalentna nekom reduktu modula nad nekim konačnim prstenom. Zapravo, ovaj uslov važi ako i samo ako klasa algebri $HS(\mathbf{A})$ ne sadrži netrivijalnu algebru koja je term–ekvivalentna nekom skupu ili punom idempotentnom reduktu modula nad nekim konačnim prstenom.*

Iz navedene teoreme neposredno sledi sledeće.

Tvrdjenje 2.2.5. *Ako jak Maljcevljev uslov M karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, on nije realizovan u bilo kojem netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.*

Objedinićemo činjenicu 2.2.2 i tvrdjenje 2.2.5 u novu činjenicu:

Činjenica 2.2.6. *Pretpostavimo da jak Maljcevljev uslov (sistem) M jezika μ karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnog varijeteta. Tada je uslov M realizovan u algebrama* $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *iz primera 1, 2 i 3 redom, i nije realizovan ni u jednom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.*

Naredno tvrdjenje je posledica teoreme 2.2.4 i koristićemo ga pri ispitivanju da li dati jak Maljcevljev uslov M implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. Za to je dovoljno dokazati da M nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu vernog modula nad nekim konačnim prstenom.

Tvrdjenje 2.2.7. *Pretpostavimo da jak Maljcevljev uslov M nije realizovan ni u jednom netrivijalnom konačnom idempotentnom reduktu vernog modula nad konačnim prstenom. Tada svaka konačna algebra* $\mathbf{A}$ *koja realizuje M generiše kongruencijski $\wedge$-poludistributivan varijetet. Drugim rečima, uslov M implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.*

Dokaz. Dokažimo prvo da uslov M nije realizovan ni u jednom netrivijalnom konačnom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom. Pretpostavimo suprotno, da je uslov M realizovan u reduktu $\mathbf{R}$–modula $\mathbf{E}$. Neka je $I \subset R$ ideal svih delitelja nule prstena $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$-modul $\mathbf{E}$ odredjuje $\mathbf{R}/I$–modul $\mathbf{E}^*$ na prirodan način, pri čemu je $\mathbf{E}^*$ veran $\mathbf{R}/I$–modul. Za svaku idempotentnu term–operaciju $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i$ modula $\mathbf{E}$, odgovarajuća term–operacija $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (r_i + I) \cdot x_i$ modula $\mathbf{E}^*$ je takodje idempotentna. Takodje, ukoliko u $\mathbf{E}$ važi $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_2(x_1, \ldots, x_n)$, tada u $\mathbf{E}^*$ važi $f_1^*(x_1, \ldots, x_n) = f_2^*(x_1, \ldots, x_n)$. Sledi da svaki Maljcevljev uslov koji je zadovoljen u algebri $\mathbf{E}$ mora biti zadovoljen i u algebri $\mathbf{E}^*$. Kako je uslov M zadovoljen u $\mathbf{E}$, on je zadovoljen i u $\mathbf{E}^*$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom tvrdjenja. Prema tome, uslov M nije zadovoljen ni u jednom netrivijalnom konačnom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom. Kako je realizacija, odnosno nerealizacija, Maljcevljevog uslova očuvana u term–ekvivalentnim algebrama, zaključujemo da uslov M nije realizovan ni u jednoj netrivijalnoj algebri koja je term–ekvivalentna konačnom modulu nad nekim konačnim prstenom.

Neka je $\mathbf{A}$ konačna algebra koja realizuje M. Ta realizacija indukuje realizaciju u svakoj algebri u $HS(\mathbf{A})$, jer interpetiramo terme na isti način. Odavde, prema prethodno dokazanom, nijedna netrivijalna algebra u klasi $HS(\mathbf{A})$ nije term–ekvivalentna idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.

Ako bi neka netrivijalna algebra $\mathbf{B} \in HS(\mathbf{A})$ bila term–ekvivalentna skupu, onda bi realizacija M u $\mathbf{B}$ implicirala realizaciju M u prstenu $\mathbf{Z}_k$ tretiranom kao modulu nad samim sobom, gde $k = |B|$, jer realizacija u skupu B je takva da se svaki term interpretira kao neka projekcija, pa onda iste projekcije daju i realizaciju u bilo kojoj algebri sa univerzumom B. Time smo dokazali da klasa $HS(\mathbf{A})$ ne sadrži netrivijalnu algebru koja je term–ekvivalentna nekom skupu ili punom idempotentnom reduktu modula nad nekim konačnim prstenom. Prema teoremi 2.2.4 varijetet $V(\mathbf{A})$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. $\square$

2.3 Binarni termi i jedan ternarni term

U ovom odeljku diskutujemo sisteme (jake Maljcevljeve uslove) izražene u jeziku sa jednim ternarnim i proizvoljnim brojem binarnih operacijskih simbola. Dokazaćemo Teoremu 1: nijedan od ovih sistema ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta.

Najpre ćemo opisati jednostavnu sintaksnu transformaciju sistema kojom neke sisteme možemo znatno uprostiti. Neka je M jak Maljcevljev uslov jezika μ, i $\bar{p}$, $\bar{q}$ dva simbola ovog jezika. Pretpostavimo da je identitet oblika $\bar{p}(x_1, \dots, x_n) \approx \bar{q}(u_1, \dots, u_n)$, u kome su $x_1, \dots, x_n$ različite promenljive, a $(u_1, \dots, u_m)$ označava ma koji niz promenljivih (moguće i jednakih, kao i nekih x_i), sintaksna posledica sistema M. Izostavimo ovaj identitet iz sistema, ukoliko se uopšte u njemu pojavljuje, i potom zamenimo svaki term $\bar{p}(\dots)$ u ostatku sistema odgovarajućim termom $\bar{q}(\dots)$. Na taj način dobijamo sistem M' u kojem se simbol $\bar{p}$ ne pojavljuje. Ukoliko interpretacija $\{f \mid \bar{f} \in \mu\}$ realizuje sistem M' u nekoj algebri $\mathbf{A}$, tada ista ta interpretacija u kojoj je samo term $\bar{p}$ zamenjen termom $\bar{q}(u_1, \dots, u_n)$ realizuje sistem M u algebri $\mathbf{A}$. Lako je videti da su sistemi M i M' ekvivalentni. Dakle, ovim postupkom transformišemo sistem M u ekvivalentan sistem M' koji ima isti ili manji broj identiteta. U tom smislu, sistem M je jednostavniji od sistema M'.

Ovaj postupak ćemo zvati *eliminacija simbola $\bar{p}$ iz sistema M*. Na primer, ukoliko se u sistemu M pojavljuje identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx x$, tada eliminacijom simbola $\bar{p}$ dobijamo značajno jednostavniji sistem. Eliminaciju simbola ćemo često koristiti bez navodjenja svih detalja.

Lema 2.3.1. *Neka je M jak Maljcevljev uslov konačnog jezika μ. Pretpostavimo da interpretacija $\{p \mid \bar{p} \in \mu\}$ realizuje sistem M u netrivijalnoj algebri $\mathbf{A}$ jezika $\mathcal{F}$. Ako je za svaki simbol $\bar{p} \in \mu$ odgovarajuća term–operacija $p^{\mathbf{A}}$ algebre $\mathbf{A}$ neka od projekcija, tada je M trivijalan sistem (realizovan u svakoj algebri jezika $\mathcal{F}$).*

Dokaz. Neka je M' skup svih linearnih identiteta jezika μ koji su realizovani u algebri $\mathbf{A}$ pri interpretaciji $\{p \mid \bar{p} \in \mu\}$. Očito je M' jak Maljcevljev uslov koji sadrži M. Eliminišimo jedan po jedan simbol jezika u sistemu M'. Tako ćemo ih eliminisati sve i dobiti sistem (moguće prazan) M'' koji je ekvivalentan sistemu M', čiji identiteti (sistema M'') ne sadrže simbole jezika, a koji je realizovan u algebri $\mathbf{A}$. M'' može sadržati samo identitete oblika $x \approx x$ i realizovan je u svakoj algebri jezika $\mathcal{F}$. Zbog ekvivalencije, isto važi i za sistem M', pa je i sistem $M \subseteq M'$ realizovan u svakoj algebri. □

2.3.1 Binarni termi

U ovom pododeljku dokazujemo da se svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti ne može okarakterisati jakim Maljcevljevim uslovom u kojem figurišu samo binarni termi.

Neka je M jak Maljcevljev uslov jezika μ u kojem figurišu samo binarni termi (jedan ili više njih). Ako sistem M karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost[4], on mora biti realizovan u algebri $\mathbf{A}$ iz primera 2. Neka je $\{p \mid \bar{p} \in \mu\}$ interpretacija koja realizuje uslov M u $\mathbf{A}$. Dokazali smo (u primeru 2) da su jedine binarne term–operacije algebre $\mathbf{A}$ projekcije, što znači da je za svaki simbol $\bar{p}$ koji se pojavljuje u uslovu M, odgovarajuća term–operacija $p^{\mathbf{A}}$ neka od projekcija π_1, π_2. Na osnovu leme 2.3.1, M je realizovan u svakoj algebri jezika $\mathcal{F} = \{f\}$ (ovo je jezik algebre $\mathbf{A}$), što znači da ne može karakterisati nijedno netrivijano svojstvo (pa ni kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost).

[4]U celoj disertaciji ovo svojstvo se odnosi na lokalno konačne varijetete; ovo ograničenje nećemo uvek eksplicitno navoditi.

2.3.2 Jedan ternarni term

U ovom pododeljku dokazujemo da se kongruencijska $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačog varijeteta ne može okarakterisati jakim Maljcevljevim uslovom sa samo jednim ternarnim termom.

Pre nego što počnemo analiziranje sistema sa jednim ternarnim termom, dokazaćemo sledeću lemu (uvek ćemo podrazumevati da su x, y, z različite promenljive, dok simboli u, v i w mogu označavati iste promenljive, kao i neke od x, y, z).

Lema 2.3.2. *Neka je* $\mathbf{A}$ *netrivijalna algebra jezika* $\mathcal{F}$ *i neka je* $t(x, y, z)$ *term ovog jezika koji je majority–term za algebru* $\mathbf{A}$.

(a) Ako $\mathbf{A}$ *zadovoljava identitet* $t(x, y, z) \approx t(u, v, w)$*, onda je* $\{x, y, z\} = \{u, v, w\}$.

(b) Ako u $\mathbf{A}$ *važi identitet* $t(x, x, y) \approx t(u, v, w)$*, onda se* x *pojavljuje bar dva puta u nizu* (u, v, w).

(c) Ni jedan identitet oblika $t(x, y, z) \approx s(u, v)$*, gde je* s *binarni term jezika* $\mathcal{F}$*, ne može važiti u* $\mathbf{A}$.

(d) Identiteti oblika $t(x, x, y) \approx u$*, gde je* $u \neq x$*, ne mogu važiti u* $\mathbf{A}$.

Dokaz. (a) Pretpostavimo suprotno, $\{x, y, z\} \neq \{u, v, w\}$. Tada bar jedna od promenljivih x, y, z ne pripada skupu $\{u, v, w\}$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da $x \notin \{x, y, z\}$. Takodje, bar jedna od promenljivih y i z se ne pojavljuje dva puta u nizu (u, v, w). Pretpostavimo $y \notin \{u, v\}$. Tada u identitetu $t(x, y, z) \approx t(u, v, w)$ možemo zameniti x sa y, a u i v sa z, čime dobijamo da u $\mathbf{A}$ važi i identitet $t(y, y, z) \approx t(z, z, w)$. Kako je t majority–term za $\mathbf{A}$, dobijamo da u $\mathbf{A}$ važi $y \approx z$, što znači da je algebra trivijalna, a ovo je kontradikcija.

(b) Pretpostavimo suprotno, dakle x se pojavljuje najviše jednom u nizu (u, v, w), i uzmimo da $x \notin \{u, v\}$. Tada možemo zameniti u i v sa y u identitetu $t(x, x, y) \approx t(u, v, w)$, čime se dobija da u $\mathbf{A}$ važi identitet $t(x, x, y) \approx t(y, y, w)$. Kako je t majority–term za $\mathbf{A}$, dobijamo da u $\mathbf{A}$ važi identitet $x \approx y$, što znači da je $\mathbf{A}$ trivijalna algebra. Kontradikcija.

(c) Pretpostavimo suprotno, u algebri $\mathbf{A}$ važi $t(x, y, z) \approx s(u, v)$. Tada bar jedna od promenljivih x, y, z ne pripada skupu $\{u, v\}$. Pretpostavićemo da je to z. Ako zamenimo u ovom identitetu promenljivu z najpre sa x, a zatim sa y dobijamo da $\mathbf{A}$ zadovoljava identitete $t(x, y, x) \approx s(u, v)$ i $t(x, y, y) \approx s(u, v)$.

Iz prethodnog sledi da $\mathbf{A}$ zadovoljava identitet $t(x,y,x) \approx t(x,y,y)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je t majority–term za ovu algebru.

(d) Ako pretpostavimo suprotno, algebra $\mathbf{A}$ bi zadovoljavala identitete $t(x,x,y) \approx u$ i $t(x,x,y) \approx x$, pa na osnovu toga i identitet $x \approx u$, što bi značilo da je trivijalna. Kontradikcija. □

Pretpostavimo sada da je M sistem koji karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti i ima samo jedan term, ternarni term $\bar{p}(x,y,z)$.

Uvešćemo konvenciju: ako je sistem M realizovan u nekoj algebri $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$, odgovarajuću interpretaciju terma $\bar{p}$ u jeziku $\mathcal{F}$ (koja je term ovog jezika) označavaćemo sa $p_{\mathbf{X}}$. Ukoliko je iz konteksta jasno o kojoj algebri je reč, izostavićemo indeks algebre i pisati samo p.

Znamo da je M realizovan u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ iz primera 2 i 1 redom. Neka su $p_{\mathbf{A}}$ i $p_{\mathbf{B}}$ termi (jezika $\{f\}$ algebre $\mathbf{A}$ i jezika $\{\wedge\}$ algebre $\mathbf{B}$) kojima je, pri realizaciji uslova M, interpretiran term $\bar{p}$. Označimo sa M' i M'' odgovarajuće sisteme jezika $\{f\}$ i $\{\wedge\}$ redom. (M' i M'' su istog oblika kao M, samo umesto terma $\bar{p}$ imaju redom terme $p_{\mathbf{A}}$ i $p_{\mathbf{B}}$.) Razmotrimo prvo sistem M' koji je zadovoljen u $\mathbf{A}$. U primeru 2 smo dokazali da svaki ternarni term jezika $\{f\}$ ili indukuje neku od projekcija na $\mathbf{A}$, ili predstavlja majority–term ove algebre, pa ovo važi i za term $p_{\mathbf{A}}$.

Ako term $p_{\mathbf{A}}$ indukuje neku od projekcija na $\mathbf{A}$, na osnovu leme 2.3.1 sledi da je M trivijalan uslov (sistem), tj. da ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo. Ovo je kontradikcija sa našom pretpostavkom da M karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, pa je ovaj slučaj nemoguć. Zaključujemo da $p_{\mathbf{A}}$ mora biti majority–term algebre $\mathbf{A}$.

Na osnovu leme 2.3.2 možemo zaključiti sledeće o identitetima sistema M' (budući da $\mathbf{A}$ zadovoljava sve ove identitete):

(1) U sistemu M' može postojati jedan ili više identiteta sa tri različite promenljive x, y, z na obe strane.

(2) U sistemu M' može postojati jedan ili više identiteta sa dva pojavljivanja promenljive x i jednim pojavljivanjem promenljive y, na obe strane (x i y su različite promenljive).

(3) U sistemu M' može postojati jedan ili više identiteta sa dva pojavljivanja promenljive x i jednim pojavljivanjem promenljive y sa jedne strane, i dva pojavljivanja promenljive x i jednim pojavljivanjem promenljive z sa druge strane (x, y, z su različite promenljive).

(4) U sistemu M' može postojati jedan ili više sledećih identiteta $p(x,x,y) \approx x$, $p(x,y,x) \approx x$, $p(y,x,x) \approx x$ (tj. sa jedne strane dva pojavljivanja x i jedno pojavljivanje y, a sa druge samo x), gde su x i y različite promenljive.

(5) Ovo su jedini oblici identiteta koji se mogu javiti u sistemu M'.

Kako sistem M ima isti oblik kao M', sve prethodno važi i za identitete sistema M.

Pretpostavimo najpre da se sistem M' (a time i sistem M) sastoji samo od identiteta sa promenljivama x, y, z na obe strane i/ili identiteta u kojima se x pojavljuje dva puta, a y jednom, na obe strane (tačke (1) i (2) iznad). Ovakav sistem (M) je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ – interpretacija koja realizuje sistem je $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow p(x,y,z) = 2x+2y+2z$. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da sistem M karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (na osnovu tvrdjenja 2.2.5).

Zaključujemo da sistem M' (M) mora imati bar jedan identitet iz tačaka (3) i/ili (4) iznad, tj. takav da sa jedne strane ime dva pojavljivanja promenljive x i jedno pojavljivenje promenljive y, a sa druge strane dva pojavljivanja promenljive x i jedno pojavljivanje promenljive z, i/ili neke od identiteta $p(x,x,y) \approx x$, $p(x,y,x) \approx x$, $p(y,x,x) \approx x$.

Sa ovakvim zaključkom o obliku sistema M, iskoristimo sada činjenicu da algebra $\mathbf{B}$ iz primera 2 takodje realizuje ovaj sistem. Ranije smo pretpostavili da je $\bar{p}$ iz sistema M interpretiran kao neki term $p_{\mathbf{B}}$ u jeziku $\{\wedge\}$ algebre $\mathbf{B}$, i odgovarajući sistem smo označili sa M''. Kako smo zaključili da M mora imati bar jedan identitet oblika (3) i/ili (4), isto važi i za M''. Za svaki term $q(x,y,z)$ jezika $\{\wedge\}$ u kojem se pojavljuju sve tri promenljive važi $\mathbf{B} \models q(x,y,z) \approx x \wedge y \wedge z$. Medjutim, ako bismo uzeli ovakav term za $p_{\mathbf{B}}$, identiteti oblika (3) i (4) ne bi važili u $\mathbf{B}$. (Na primer, identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,z)$ bio bi interpretiran kao $x \wedge y \wedge x \approx x \wedge x \wedge z$, a ovaj identitet nije zadovoljen u $\mathbf{B}$.) Zaključujemo da se u termu $p_{\mathbf{B}}$ pojavljuju najviše dve promenljive.

Tvrdjenje 2.3.3. *Neka je M jak Maljcevljev uslov jezika $\mu = \{\bar{p}_i \,|\, i \in I\}$, koji može sadržati simbole proizvoljnih arnosti. Pretpostavimo da je M realizovan u dvoelementnoj polumreži $\mathbf{B}$ iz primera 2 tako da je za svaki $i \in I$ odgovarajuća term–operacija $p_i^{\mathbf{B}}$ algebre $\mathbf{B}$ najviše binarna. Tada je M realizovan i u punom idempotentnom reduktu modula $\mathbf{Z}_p^r$ (nad poljem $\mathbb{Z}_p$), gde je p neparan prost broj.*

Dokaz. U algebri $\mathbf{B}$ važi da je esencijalna arnost svakog terma jednaka broju njegovih promenljivih. Prema tome, za svaki $i \in I$ u algebri $\mathbf{B}$ važi tačno jedan od identiteta

$$p_i(...,x,...,y,...) \approx x \quad \text{ili} \quad p_i(...,x,...,y,...) \approx x \wedge y.$$

Neka je $J \subseteq I$ skup svih indeksa $i \in I$ za koje važi druga mogućnost. Proširimo signaturu μ novim binarnim simbolima $\bar{q}_i(x,y)$ za sve $i \in J$ i označimo tako dobijenu signaturu sa μ'. Zatim proširimo sistem M do sistema M_0 dodavanjem identiteta $\bar{p}_i(...,x,...,y,...) \approx \bar{q}_i(x,y)$ za $i \in J$ i $\bar{p}_i(...,x,...,y,...) \approx x$ za $i \in I \setminus J$. Primetimo da algebra $\mathbf{B}$ realizuje sistem M_0 pri prirodno definisanoj interpretaciji novih simbola signature.

Eliminišimo iz sistema M_0 sve identitete u kojima se pojavljuju simboli $\bar{p}_i$ $(i \in I)$ i označimo dobijeni (ekvivalentni) sistem sa M'. Primetimo da se u sistemu M' od simbola signature μ' pojavljuju samo simboli iz skupa $\{q_i \mid i \in I\}$. Takodje, svaka algebra koja realizuje sistem M' realizuje i sistem M_0 pa, budući da su M' i M_0 ekvivalentni sistemi, ta algebra realizuje i sistem M.

Definišimo interpretaciju signature $\{\bar{q}_i \mid i \in J\}$ termima signature modula $\mathbf{Z}_p^r$:

$$q_i(x,y) = \alpha\, x + \alpha\, y, \quad \text{gde je } \alpha = \tfrac{p+1}{2}.$$

Svaki identitet sistema M' ima oblik $\bar{q}_i(u,v) \approx \bar{q}_j(u',v')$. Budući da algebra $\mathbf{B}$ realizuje sistem M', zato što je ekvivalentan sistemu M', u algebri $\mathbf{B}$ važi

$$u \wedge v \approx u' \wedge v'.$$

Lako je videti da u algebri $\mathbf{Z}_p^r$ važi $\alpha\, u + \alpha\, v \approx \alpha\, u' + \alpha\, v'$. Zaključimo da algebra $\mathbf{Z}_p^r$ realizuje sistem M' pri interpretaciji $\bar{q}_i(x,y) \longrightarrow \alpha\, x + \alpha\, y$. Prema prethodnom, algebra $\mathbf{Z}_p^r$ realizuje i sistem M. □

Na osnovu prethodnog tvrdjenja polazni jak Maljcevljev uslov M realizovan je u punom idempotentnom reduktu modula $\mathbf{Z}_p^r$ (za bilo koji neparan prost broj p).

Ovim je dokazano sledeće tvrdjenje:

Tvrdjenje 2.3.4. *Neka je M jak Maljcevljev uslov u kojem se pojavljuje samo jedan ternarni term. Ako je M realizovan u algebrama $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}$ iz primera 1 i 2 redom, on je takodje realizovan u punom idempotentnom reduktu modula $\mathbb{Z}_p^r$, gde je p neparan prost broj.*

Zaključujemo da polazni jak Maljcevljev uslov M ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (na osnovu tvrdjenja 2.2.5), što znači da je dokazana sledeća teorema:

Teorema 2.3.5. *Nemoguće je okarakterisati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta jakim Maljcevljevim uslovom na jeziku koji se sastoji od samo jednog ternarnog simbola.*

2.3.3 Binarni termi i jedan ternarni term

U ovom pododeljku ćemo dokazati Teoremu 1. Neka je μ jezik koji sadrži jedan ternarni simbol $\bar{p}$ i konačan skup binarnih simbola $\bar{q}_i, i \in I$. Neka je M jak Maljcevljev uslov jezika μ.

Koristimo činjenicu 2.2.6 – ukoliko jak Maljcevljev uslov M karakteriše klasu lokalno konačnih varijeteta sa osobinom kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda je M realizovan u algebrama **B** i **A** iz primera 1 i 2 redom, a nije realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$.

Koristimo istu konvenciju kao u prethodnom pododeljku: interpretacije terma $\bar{q}_i$ i $\bar{p}$ koje realizuju uslov M u algebri $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ označavamo sa $q_{i,\mathbf{X}}$ i $p_{\mathbf{X}}$. Indeks algebre izostavljamo, i pišemo samo p, odnosno q_i, ukoliko je iz konteksta jasno koja algebra je u pitanju.

Može se pretpostaviti, bez ograničenja opštosti, da sistem M ne sadrži trivijalne identitete (jer se mogu jednostavno eliminisati, pri čemu se dobija ekvivalentan[5] sistem). Dokažimo prvu sledeću lemu:

Lema 2.3.6. *Ako je netrivijalan sistem M realizovan u algebri $\mathbf{A}$, tada je term $p_{\mathbf{A}}$ majority–term algebre $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Setimo se da je svaka binarna term–operacija algebre $\mathbf{A}$ neka od projekcija. Prema tome, svaki od terma $q_{i,\mathbf{A}}$ indukuje projekciju na $\mathbf{A}$. Kako je sistem M netrivijalan, prema lemi 2.3.1 zaključujemo da term–operacija koja odgovara termu $p_{\mathbf{A}}$ nije projekcija. Na osnovu osobina algebre $\mathbf{A}$ koje su dokazane u primeru 2, sledi da $p_{\mathbf{A}}$ mora biti majority–term za ovu algebru. □

Lema 2.3.7. *Pretpostavimo da je uslov M realizovan u algebri $\mathbf{A}$ i da je $p_{\mathbf{A}}$ majority–term algebre $\mathbf{A}$. Tada postoji sistem M' koji je ekvivalentan sistemu M, a koji sadrži isključivo identitete sledećeg oblika:*

(1) Na obe strane učestvuju i simbol $\bar{p}$ i svaka od promenljivih x, y i z; na primer, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{p}(z,y,x)$, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{p}(z,x,y)$ ...

(2) $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ ili $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$

(3) $\bar{p}(y,x,x) \approx x$, $\bar{p}(x,y,x) \approx x$ ili $\bar{p}(x,x,y) \approx x$

(4) Identiteti u kojima se simbol $\bar{p}$ ne pojavljuje.

[5] Transformacije kojima se dobija ekvivalentan sistem opisali smo na početku odeljka.

Dokaz. Razmotrimo najpre identitete sistema M u kojima se sa jedne strane pojavljuje $\bar{p}(x,y,z)$. Prema lemi 2.3.2(c) sa druge strane takvog identiteta se ne može pojaviti ni jedan term sa manje od tri promenljive, pa prema 2.3.2(a), taj identitet mora biti oblika (1).

Preostaje još da razmotrimo identitete sistema u kojima se sa jedne strane pojavljuju u nekom redosledu x, x, y; bez ograničenja opštosti pretpostavimo da se pojavljuje $\bar{p}(x,x,y)$. Ukoliko je sa druge strane tog identiteta samo promenljiva, prema lemi 2.3.2(d) ta promenljiva je x i identitet ima oblik (3). Preostaje još da ispitamo dva slučaja:

1. $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(u,v,w)$. U ovom slučaju, prema lemi 2.3.2(b), niz (u,v,w) je neka permutacija niza (x,x,u'), gde u' označava neku od promenljivih. Imamo tri podslučaja:

   (a) $u' = x$. U ovom podslučaju identitet je oblika $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,x)$. Zamenimo ga u sistemu M identitetom $\bar{p}(x,x,y) \approx x$ (koji je oblika (3)) i dobićemo ekvivalentan sistem. Učinimo isto sa svim identitetima ovog oblika koji pripadaju sistemu.

   (b) $u' = y$. Ovaj identitet je oblika (2) (pretpostavili smo da u sistemu M nema trivijalnih identiteta).

   (c) $u' = z$. Ovakav identitet možemo zameniti sa dva identiteta oblika (3) i dobiti ekvivalentan sistem. Na primer, iz $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,z,x)$ zamenom z sa x dobijamo identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,x) (\approx x)$, pa ovaj identitet treba zameniti identitetima $\bar{p}(x,x,y) \approx x$ i $\bar{p}(x,z,x) \approx x$ koji su oblika (3).

2. $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}_i(u,v)$.

   Jedini netrivijalan podslučaj je $\{x,y\} = \{u,v\}$. Na primer, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}_i(x,y)$. U skladu sa ranije opisanim postupkom eliminacije, zamenimo svako pojavljivanje terma $\bar{q}_i(u,v)$ u identitetima sistema M termom $\bar{p}(u,u,v)$. Dobijamo ekvivalentan sistem. Primenjujemo ovakve zamene na svim identitetima ovog oblika, dokle god je to moguće. Dobićemo sistem u kojem se identiteti ovog oblika ne pojavljuju (postupak se završava u konačnom broju koraka, zato što se u svakom koraku broj pojavljivanja binarnih terma u identitetima sistema smanjuje). □

Lema 2.3.8. *Pretpostavimo da sistem M sadrži samo identitete oblika (1)–(4) iz leme 2.3.7 i da je realizovan u algebri* **B**. *Tada je on realizovan i u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.*

Dokaz. Podelimo sistem M na dva dela: M_1 koji sadrži sve identitete oblika (1)-(3) i M_2 koji sadrži sve identitete oblika (4) (a to su oni u kojima učestvuju samo binarni simboli jezika μ). Kako sistemi M_1 i M_2 ne sadrže zajednički simbol jezika, dovoljno je dokazati da je svaki od njih realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.

Prema tvrdjenju 2.3.3 sistem M_2 je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$. Prema istom tvrdjenju i sistem M_1 je realizovan u toj algebri ukoliko se u termu $p_{\mathbf{B}}$ pojavljuju najviše dve promenljive. Preostaje još slučaj kada se u $p_{\mathbf{B}}$ pojavljuju tri promenljive, tj. kada indukuje esencijalno ternarnu operaciju algebre $\mathbf{B}$. U tom slučaju u $\mathbf{B}$ važi $p_{\mathbf{B}}(x, y, z) \approx x \wedge y \wedge z$. Lako se vidi da svi identiteti tipa (1) i (2) važe u algebri $\mathbf{B}$, dok identiteti oblika (3) ne mogu važiti. Isto važi i za interpretaciju terma $\bar{p}$ termom $2x + 2y + 2z$ u jeziku algebre $\mathbb{Z}_5^r$. $\square$

Tvrdjenje 2.3.9. *Ako je jak Maljcevljev uslov M koji sadrži samo jedan ternarni simbol i proizvoljan broj binarnih simbola jezika μ realizovan u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, onda on mora biti realizovan i u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M realizovan u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Na osnovu leme 2.3.6, term $p_{\mathbf{A}}$ je neki majority–term algebre $\mathbf{A}$. Prema lemi 2.3.7, postoji sistem M' ekvivalentan sistemu M takav da sadrži samo identitete oblika (1)–(4). Prema lemi 2.3.8 takav sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, pa ona realizuje i sistem M. $\square$

Dokaz Teoreme 1. Treba pokazati da je nemoguće okarakterisati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta jakim Maljcevljevim uslovom na jeziku sa jednim ternarnim i proizvoljnim brojem binarnih simbola. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji takav uslov M. Onda je M realizovan u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ i nije realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (činjenica 2.2.6), a ovo je u kontradikciji sa tvrdjenjem 2.3.9. $\square$

2.4 Dva ternarna terma

U ovom odeljku analiziramo jake Maljcevljeve uslove sa dva ternarna terma. Kao rezultat ove obimne analize dobijamo esencijalno samo jedan sistem koji je kandidat za optimalnu karakterizaciju svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. To je sistem sadržan u tvrdjenju teoreme 2:

$$\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, y)$$
$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x).$$

Dokazaćemo da ovaj sistem implicira pomenuto svojstvo, tj. da je svaki lokalno konačni varijetet koji ga realizuje kongruencijski $\wedge$–poludistributivan. Time ćemo dokazati jedan smer teoreme 2. Razmatraćemo i optimalnost ovog sistema što ćemo utvrditi u teoremi 2.4.22.

Neka je μ jezik koji sadrži dva ternarna simbola $\bar{p}$ i $\bar{q}$. Neka je M jak Maljcevljev uslov jezika μ. Koristimo istu konvenciju kao u prethodnom pododeljku: interpretacije terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ koje realizuju uslov M u algebri $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ označavamo sa $p_{\mathbf{X}}$ i $q_{\mathbf{X}}$. Indeks algebre izostavljamo, i pišemo samo p, odnosno q, ukoliko je iz konteksta jasno koja algebra je u pitanju. Pretpostavljamo da sistem M ne sadrži trivijalne identitete.

Lema 2.4.1. *Ako je sistem M implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost i realizovan je u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ iz primera 1. i 2, tada on ima bar jedan identitet u kojem se pojavljuju oba terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$, tj. bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno – u sistemu M ne postoji identitet navedenog oblika. To znači da se u svakom identitetu pojavljuje tačno jedan od terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$. Ovakav sistem možemo podeliti na dva disjunktna sistema: M_1, sa termom $\bar{p}$, i M_2, sa termom $\bar{q}$. Naravno, važi $M_1 \cup M_2 = M$. Lako je videti da je sistem M realizovan u proizvoljnoj algebri $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ ako i samo su u njoj realizovani sistemi M_1 i M_2 (naravno, pri istoj interpretaciji jezika μ u $\mathcal{F}$). Medjutim, kako su M_1 i M_2 realizovani u algebrama $\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}$, na osnovu tvrdjenja 2.3.4 ovi sistemi su takodje realizovani u algebri $\mathbb{Z}_5^r$. To znači da je i M realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, pa ne implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. $\square$

Lema 2.4.2. *Ako je netrivijalan sistem M realizovan u algebri $\mathbf{A}$ iz primera 2, tada je bar jedan od terma $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$ majority–term algebre $\mathbf{A}$.*

Dokaz. Svaka ternarna term-operacija algebre $\mathbf{A}$ je ili majority operacija ili projekcija. Prema lemi 2.3.1 ne mogu i $p^{\mathbf{A}}$ i $q^{\mathbf{A}}$ biti projekcije, jer bi u suprotnom sistem M bio trivijalan. $\square$

Analizu sistema koji potencijalno karakterišu kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost zasnivamo na sledeće dve činjenice:

1. Svaki sistem koji karakteriše pomenuto svojstvo mora biti realizovan u algebrama $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ iz primera 1, 2 i 3 i nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu netrivijalnog vernog modula nad konačnim prstenom (činjenica 2.2.6);

2. Ukoliko sistem nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu netrivijalnog vernog modula nad konačnim prstenom, tada on implicira kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost lokalno konačnih varijeteta (tvrdjenje 2.2.7).

Na osnovu leme 2.4.2, analizu jakih Maljcevljevih uslova sa dva ternarna terma (u odnosu na svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti) možemo podeliti na dva dela na osnovu realizacije u algebri $\mathbf{A}$.

U prvom delu pretpostavljamo da je samo jedan od terma $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$ majority–term algebre $\mathbf{A}$. Tada, na osnovu osobina algebre $\mathbf{A}$ dokazanih u primeru 2, drugi term indukuje neku projekciju na $\mathbf{A}$. Ovaj deo analize je izložen u pododeljku 2.4.1 pod nazivom *Jedan majority–term*.

U drugom delu analiziramo drugi slučaj: oba terma $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$ su majority–termi algebre $\mathbf{A}$. Ovaj deo analize je izložen u pododeljku 2.4.2 pod nazivom *Dva majority–terma*.

U svakom od slučaja krećemo od maksimalnog sistema sa dve promenljive koji je zadovoljen u algebri $\mathbf{A}$ (i koji uključuje samo terme $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$). Zatim analiziramo sve sisteme koji su podskupovi tog maksimalnog sistema. Odbacujemo one koji nisu realizovani u nekoj od algebri $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$, kao i one koji su realizovani u nekom punom idempotentnom reduktu netrivijalnog vernog modula nad konačnim prstenom. Na taj način dolazimo do suštinski jedinog kandidata za željenu karakterizaciju.

Sistemi sa više od dve promenljive (koji uključuju samo terme $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$) su analizirani na kraju ovog poglavlja (pododeljak 2.4.3).

2.4.1 Jedan majority–term

U ovom pododeljku razmatramo slučaj kada je samo jedan od terma $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$ majority–term algebre $\mathbf{A}$, što znači da drugi term indukuje neku projekciju na ovoj algebri. Može se pretpostaviti bez gubitka opštosti da je $q_{\mathbf{A}}(x,y,z)$ majority–term algebre $\mathbf{A}$, a da term $p_{\mathbf{A}}(x,y,z)$ indukuje prvu projekciju na $\mathbf{A}$, odnosno algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava identitet $p_{\mathbf{A}}(x,y,z) \approx x$.

Na osnovu prethodnog, algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava sledeće identitete:

$$\begin{aligned} x &\approx p_{\mathbf{A}}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{A}}(x,y,y) \approx p_{\mathbf{A}}(x,y,x) \\ &\approx q_{\mathbf{A}}(x,x,y) \approx q_{\mathbf{A}}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{A}}(y,x,x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ako pretpostavimo da je sistem (2.1) upravo sistem M' dobijen interpretacijom sistema M u jeziku $\mathcal{F} = \{f\}$ algebre $\mathbf{A}$, onda bi sistem M (polazni jak Maljcevljev uslov jezika μ) izgledao ovako:

$$\begin{aligned} x &\approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \\ &\approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Interpretacijom ovog uslova u jeziku algebre $\mathbf{B}$ dobijamo sistem M'' koji ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} x &\approx p_{\mathbf{B}}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{B}}(x,y,y) \approx p_{\mathbf{B}}(x,y,x) \\ &\approx q_{\mathbf{B}}(x,x,y) \approx q_{\mathbf{B}}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{B}}(y,x,x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na osnovu činjenice 2.2.1, lako je videti da ne postoje termi $p_{\mathbf{B}}$ i $q_{\mathbf{B}}$ (jezika $\{\wedge\}$) takvi da algebra $\mathbf{B}$ zadovoljava sistem (2.3). Zaključujemo da (2.2) nije realizovan u algebri $\mathbf{B}$, pa to ne može biti sistem koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

Vratimo se sistemu (2.1). Pokušaćemo da dobijemo željeni sistem (koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost) eliminacijom nekih identiteta iz (2.1). Ako eliminišemo sve identitete koji imaju samo promenljivu x sa jedne strane, dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} &p_{\mathbf{A}}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{A}}(x,y,y) \approx p_{\mathbf{A}}(x,y,x) \\ &\approx q_{\mathbf{A}}(x,x,y) \approx q_{\mathbf{A}}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{A}}(y,x,x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Odgovarajući sistem M jezika μ (tj. takav da je (2.4) interpretacija M u jeziku $\{f\}$ algebre $\mathbf{A}$) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} &\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \\ &\approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Da sistem (2.5) implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost i da nije minimalan takav sledi iz tvrdjenja (2.4.4), u kojem ćemo dokazati da podsistem ovog sistema (tj. sistem (2.6)) takodje implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

Dokažimo najpre sledeću lemu koju koristimo u dokazu tvrdjenja 2.4.4:

Lema 2.4.3. *Netrivijalan pun idempotentan redukt vernog modula $\mathbf{E}'$ nad konačnim prstenom $\mathbf{R}$ ne zadovoljava sistem $x \approx q_{\mathbf{E}'}(x,x,y) \approx q_{\mathbf{E}'}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{E}'}(y,x,x)$ ni za jedan term $q_{\mathbf{E}'}$ (odgovarajućeg jezika).*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{E}'$ zadovoljava dati sistem za neki term $q_{\mathbf{E}'}(x,y,z)$. Iz identiteta $x \approx q_{\mathbf{E}'}(x,x,y)$ sledi da $q_{\mathbf{E}'}(x,y,z)$ ne zavisi od treće promenljive, tj. da je oblika $q_{\mathbf{E}'}(x,y,z) = \alpha x + \beta y$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, i $\alpha + \beta = 1$. Dalje, iz identiteta $x \approx q_{\mathbf{E}'}(x,y,x)$ sledi da $q_{\mathbf{E}'}(x,y,z)$ ne zavisi ni od druge promenljive, odnosno zavisi samo od prve, tj. indukuje prvu projekciju na $\mathbf{E}'$. Ovo je, pak, u suprotnosti sa identitetom $x \approx q_{\mathbf{E}'}(y,x,x)$, pa zaključujemo da traženi term ne postoji. $\square$

Tvrdjenje 2.4.4. *Sistem*

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.6}$$

implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Eliminacijom bilo kojeg identiteta iz ovog sistema dobija se sistem za koji to ne važi.

Dokaz. Dokazaćemo najpre da sistem (2.6) implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Na osnovu tvrdjenja 2.2.7, dovoljno je dokazati da ovaj sistem nije realizovan ni u jednom netrivijalnom konačnom idempotentnom reduktu vernog modula nad konačnim prstenom. Pretpostavimo suprotno: neka je sistem (2.6) realizovan u reduktu $\mathbf{E}'$ (tj. u netrivijalnom konačnom idempotentnom reduktu vernog modula) nad konačnim prstenom $\mathbf{R}$. Neka su termi $\bar{p}$ i $\bar{q}$ interpretirani, redom, kao ternarni termi $p_{\mathbf{E}'}$ i $q_{\mathbf{E}'}$ pri ovoj realizaciji. Dakle, interpretacijom sistema M u jeziku redukta $\mathbf{E}'$, dobili smo sistem M':

$$\begin{cases} p_{\mathbf{E}'}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{E}'}(x,y,y) \\ p_{\mathbf{E}'}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{E}'}(x,x,y) \approx q_{\mathbf{E}'}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{E}'}(y,x,x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Budući da su termi $p_{\mathbf{E}'}$ i $q_{\mathbf{E}'}$ interpretacije terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u jeziku redukta $\mathbf{E}'$, postoje $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in R$ takvi da je $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ i da u $\mathbf{E}'$ važi:

$$p_{\mathbf{E}'}(x,y,z) \approx \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad q_{\mathbf{E}'}(x,y,z) \approx \alpha' x + \beta' y + \gamma' z.$$

Iz identiteta (2.7) dobijamo: $\alpha x + \beta x + \gamma y = \alpha x + \beta y + \gamma y$, tj. $\beta(x - y) = 0$. Pošto je $\mathbf{E}'$ veran modul, sledi $\beta = 0$, pa važi $p_{\mathbf{E}'}(x,y,z) \approx \alpha x + \gamma z$. Iz $\alpha' x + \beta' x + \gamma' y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' x = \alpha' y + \beta' x + \gamma' x$ dobijamo $(\beta' - \gamma')(y - x) = 0$, odakle sledi $\beta' = \gamma'$. Slično, $\alpha' = \gamma'$, pa važi $q_{\mathbf{E}'}(x,y,z) \approx \alpha'(x + y + z)$. Iz $p_{\mathbf{E}'}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{E}'}(x,x,y)$ sledi $\alpha x + \gamma x = \alpha'(x + x + y)$ odakle je $\alpha' = 0$, a to je u kontradikciji sa $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$.

Ovim smo dokazali da sistem (2.6) implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Pokazaćemo sada da je (2.6) minimalan sistem sa ovom osobinom.

Dovoljno je dokazati da se eliminacijom bilo kojeg identiteta iz sistema (2.6) dobija sistem koji je realizovan u nekom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.

Analiziraćemo sve sisteme koji se dobijaju od (2.6) eliminacijom jednog ili više identiteta.

(1) Ukoliko eliminišemo identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, dobijamo sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \tag{2.8}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (ovo je oznaka koju smo, zbog jednostavnosti zapisa, uveli za netrivijalan pun idempotentan redukt modula nad prstenom $\mathbb{Z}_5$). Interpretacija koja realizuje sistem je $\bar{p} \longrightarrow 2x+2y+2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$.

Primetimo da daljom eliminacijom identiteta iz sistema 2.8 ne možemo dobiti ništa novo – svaki od sistema koji se dobijaju na taj način je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri istoj interpretaciji koja realizuje 2.8.

Preostaje da ispitamo sisteme koji sadrže identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ (a koji se dobijaju od (2.6) eliminacijom nekih drugih identiteta).

(2) Ako iz sistema (2.6) eliminišemo sve identitete koji imaju term $\bar{p}(x,y,x)$ sa jedne strane, dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.9}$$

Ovaj sistem ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost na osnovu leme 2.4.1. Daljom eliminacijom identiteta dobijamo sisteme za koje važi isto.

Preostaje nam da razmotrimo sisteme koji sadrže bar jedan od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ (i identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, kao što je već rečeno).

Dalju analizu podelićemo na tri dela: u tački (3) razmatramo sisteme čija su prva dva identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ i $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, u tački (4) sisteme čija su prva dva identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ i $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, i u tački (5) sisteme sa identitetima $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ i $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$. (Naravno svi sistemi koje analiziramo se dobijaju od (2.6) izostavljanjem identiteta).

(3) Posmatramo najpre sistem koji se sastoji od dva identiteta:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.10}$$

Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$; interpretacija koja realizuje sistem je: $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$.

Ispitaćemo sisteme koji se dobijaju kada se sistemu (2.10) doda još identiteta iz (2.6). Primetimo da se ovom sistemu može dodati najviše jedan identitet iz sistema (2.6), jer se dodavanjem bilo koja dva identiteta iz (2.6) (a koji nisu identiteti sistema (2.10)) dobija čitav sistem (2.6).

(3a) Sistemu (2.10) dodajemo identitet $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ (sistema (2.6)). Dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$; interpretacija koja realizuje sistem je: $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$.

(3b) Sistemu (2.10) dodajemo identitet $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$. Dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ponovo smo dobili sistem koji je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$; interpretacija koja realizuje ovaj sistem je: $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow y$ (tj. termi indukuju prvu i drugu projekciju, redom, u $\mathbb{Z}_5^r$).

(3c) Sistemu (2.10) dodajemo identitet $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$. Dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

I ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$. Dovoljno je interpretirati oba terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ kao promenljivu x.

(4) Posmatramo sistem koji se sastoji od sledeća dva identiteta:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.11}$$

Lako je primetiti da je ovaj sistem ekvivalentan sistemu (2.10), koji je ispitan u tački (3). Naime, sistem (2.11) je realizovan u proizvoljnoj algebri $\mathbf{X}$, za neke interpretacije $p_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ i $q_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ redom, ako i samo ako je sistem (2.10) realizovan u istoj algebri za interpretacije $p_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ i $q_{\mathbf{X}}(x,z,y)$.

Zaključujemo da nema potrebe da analiziramo ovaj slučaj.

(5) Posmatramo sistem koji se sastoji od sledeća dva identiteta:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.12}$$

Ovaj sistem je takodje ekvivalentan sistemu (2.10), koji je ispitan u tački (3). Sistem (2.12) je realizovan u proizvoljnoj algebri $\mathbf{X}$ za interpretacije $p_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ i $q_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ ako i samo ako je sistem (2.10) realizovan u $\mathbf{X}$ za interpretacije $p_{\mathbf{X}}(x,y,z)$ i $q_{\mathbf{X}}(z,y,x)$.

Dakle, nema potrebe da analiziramo sistem (2.12).

Dokazali smo da eliminacijom jednog ili više identiteta iz sistema (2.6) uvek dobijamo sistem koji je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$. Ovo znači da je (2.6) minimalan sistem koji implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. $\square$

Dakle, od sistema (2.5) koji implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, dobili smo sistem (2.6) koji implicira isto svojstvo ali je pri tome i minimalan u ovom smislu. Pokazaćemo da se, eliminacijom identiteta, od sistema (2.5) ne može dobiti nijedan drugi sistem koji implicira ovo svojstvo.

Tvrdjenje 2.4.5. *Eliminacijom jednog ili više identiteta sistema*

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

(označenog sa (2.5) *na početku ovog pododeljka), a koji implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost ali nije minimalan u ovom smislu, možemo dobiti tri vrste sistema:*

(1) Sistem koji je označen sa (2.6) *na početku ovog pododeljka:*

$$\begin{cases} p(x,x,y) \approx p(x,y,y) \\ p(x,y,x) \approx q(x,x,y) \approx q(x,y,x) \approx q(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost i minimalan je u odnosu na ovo svojstvo (prethodno dokazano).

(2) Sistem ekvivalentan sistemu (2.6) *(dobijen permutacijom promenljivih).*

(3) Sistem koji je realizovan u nekom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.

Drugim rečima, do na permutaciju promenljivih, (2.6) *je jedini sistem koji implicira kongruencijsku* $\wedge$*–poludistributivnost, a koji se može dobiti eliminacijom jednog ili više identiteta sistema* (2.5)*.*

Dokaz.[6] Da bismo dokazali ovo tvrdjenje potrebno je analizirati sve sisteme koji se dobijaju eliminacijom jednog ili više identtiteta sistema (2.5), i pokazati da je svaki od njih ili ekvivalentan sistemu (2.6), ili je realizovan u nekom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom.

Pre nego što započnemo analiziranje pomenutih sistema, dokazaćemo dve leme.

Lema 2.4.6. *U svakom sistemu koji je dobijen od sistema* (2.5) *eliminacijom jednog ili više identiteta, a koji karakteriše (ili implicira) svojstvo kongruencijske* $\wedge$*–poludistributivnosti, mora postojati bar jedan identitet oblika* $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$*.*

Dokaz. Analogno dokazu leme 2.4.1. □

Lema 2.4.7. *U svakom sistemu koji je dobijen od sistema* (2.5) *eliminacijom jednog ili više identiteta, a koji karakteriše (ili implicira) svojstvo kongruencijske* $\wedge$*–poludistributivnosti, osim identiteta oblika* $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$*, mora postojati bar još jedan identitet sa simbolom* $\bar{p}$*, odnosno identitet istog oblika* $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$*, ili oblika* $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$*.*

Dokaz. Na osnovu leme 2.4.6 u pomenutom sistemu mora postojati bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Pretpostavimo da postoji tačno jedan takav identitet u sistemu, i da se simbol $\bar{p}$ ne pojavljuje ni u jednom drugom identitetu. Onda posmatrani sistem, osim identiteta navedenog oblika, sadrži samo neke (ili sve) od sledećih identiteta: $\bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$. Ovakav sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a interpretacija koja omogućava realizaciju je jedna od sledeće dve (u zavisnosti od toga koji identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}$ pripada ovom sistemu): $\bar{p} \longrightarrow 4x + 2z$, $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$, ili $\bar{p} \longrightarrow 4x + 2y$, $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Zaključujemo da sistem mora sadržati bar još jedan identitet sa simbolom $\bar{p}$. □

Sada ćemo preći na analiziranje sistema koji se dobijaju eliminacijom identiteta iz (2.5). Zapravo je potrebno analizirati sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.5). Ovo opravdava postupak analiziranja koji primenjujemo: polazimo od manjeg broja identiteta sistema (2.5) (na osnovu prethodne dve leme možemo krenuti od dva identiteta) i dodajemo još identiteta

[6]Dokaz tvrdjenja je jako dugačak zbog velikog broja sistema koje treba analizirati. Završava se na strani 79.

ovog sistema (na sve moguće načine). Dodavanje identiteta vršimo sve dok ima smisla, tj. dok ne dobijemo sistem koji nije realizovan u nekoj od algebri iz primera 1, 2 i 3, ili sistem koji implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti ili čitav sistem (2.5). Opisani postupak je, dakle, suprotan od postupka eliminacije identiteta iz sistema (2.5), ali nam, svejedno, omogućava da analiziramo sve sisteme čiji su identiteti neki od identiteta sistema (2.5).

Na osnovu lema 2.4.6 i 2.4.7 dovoljno je posmatrati sisteme koji sadrže identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, i bar još jedan identitet sa simbolom $\bar{p}$ (i, naravno, čiji su svi identiteti takodje i identiteti sistema (2.5)).

Konvencija 2.4.8. *U nastavku smatramo da je identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ prvi identitet u svim ovim sistemima, a kao drugi uzimamo pomenuti identitet sa simbolom $\bar{p}$ (tj. bilo koji od ovakvih identiteta iz sistema* (2.5)*).*

Celokupna analiza ovih sistema podeljena je na tri dela.

U prvom delu (tačka (**1**)) analiziramo sisteme čiji je prvi identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$.

U drugom delu (tačka (**2**)) analiziramo sisteme u kojima je prvi identitet neki od identiteta: $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ (pokazuje se da se svi ovi slučajevi svode na slučaj ispitan u prvom delu, tako da ovaj deo ne sadrži analizu novih sistema).

U trećem delu (tačka (**3**)) analiziramo sisteme u kojima je prvi identitet neki od identiteta: $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ (pokazuje se da je dovoljno ispitati jedan od ovih slučajeva).

(**1**) U ovoj tački analiziramo sisteme čiji je prvi identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$. Drugi identitet može biti neki od sledećih identiteta:

$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$. Svi ovakvi sistemi su analizirani u tački (**1a**).

$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$. Ovi sistemi su analizirani u tački (**1b**).

$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$. Ovi sistemi su analizirani u tački (**1c**).

$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$. Ovi sistemi su ispitani u tački (**1d**).

$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$. Tačka (**1e**).

(**1a**) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.13}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u bilo kojoj drugoj algebri); interpretacija koja realizuje sistem je $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, odnosno oba terma indukuju prvu projekciju na $\mathbb{Z}_5^r$. Sistem ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo, na osnovu leme 2.3.1. Sada posmatramo sisteme koji sadrže više od navedena dva identiteta (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi trećeg identiteta su analizirani u nastavku, u tačkama (1aa)–(1af).

(1aa) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ ili $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.13), dobijamo isti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \tag{2.14}$$

Sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, odnosno oba terma indukuju prvu projekciju na $\mathbb{Z}_5^r$ (ili u drugoj posmatranoj algebri).

Dodavanjem jednog novog identiteta iz (2.5) ovom sistemu možemo dobiti tri različita sistema:

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je takodje realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, a dodavanjem novih identiteta iz sistema (2.5) dobija se samo čitav sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

  Za ovaj sistem važi isto kao i za prethodni, osim što je interpretacija koja realizuje sistem $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow y$.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem bilo kojeg novog identiteta iz (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.14). Sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo novi sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ ili čitav sistem (2.5).

(1ab) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ sistemu (2.13) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.15}$$

Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, kao i u bilo kojoj drugoj algebri, pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem novog identiteta iz (2.5) možemo dobiti samo tri sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$$

  Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, kao i u bilo kojoj drugoj algebri, pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovo je tačno sistem (2.6).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, kao i u bilo kojoj drugoj algebri, pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

Ovim je završeno analiziranje sistema (2.15). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) može se dobiti samo novi sistem koji je takodje realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem (2.6), ili ceo sistem (2.5).

(1ac) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.13), dobijamo ovaj sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.16}$$

Sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.5) ovom sistemu, dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

  $$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).
- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

  Sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).
- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

Završeno je analiziranje sistema (2.16). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) dobijamo ili sisteme realizovane u $\mathbb{Z}_5^r$, ili čitav sistem (2.5).

(1ad) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ sistemu (2.13), dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.17}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan sistemu (2.15) koji smo već analizirali (dobija se permutacijom prve dve promenljive terma $\bar{q}$).

(1ae) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.13), dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.18}$$

Sistem je ekvivalentan sistemu (2.16) koji smo već analizirali (dobija se permutacijom prve dve promenljive terma $\bar{q}$).

(1af) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.13) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.19}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.5) ovom sistemu, dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem.

- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovo je sistem (2.6).

- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem.

Završeno je analiziranje sistema (2.19). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) dobijamo ili sisteme realizovane u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem (2.6), ili čitav sistem (2.5).

Ispitali smo sve sisteme koji uključuju identitete (2.13), i nismo dobili nijedan novi sistem (tj. različit od ranije pronadjenog (2.6)) koji implicira i potencijalno karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

(1b) Prvi identitet je isti kao u prethodnoj tački, $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$, a drugi je $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \tag{2.20}$$

Sistem (2.20) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Posmatramo sisteme koji sadrže više od navedena dva identiteta (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi koji nastaju dodavanjem novog identiteta analizirani su u nastavku, u tačkama (1ba)–(1bf).

(1ba) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, y, x)$, $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, x, y)$, $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, x, y)$ sistemu (2.20) dobijamo isti sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, y) \tag{2.21}$$

Ovo je sistem (2.14) koji je analiziran ranije.

(1bb) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x)$, $\bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$, $\bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y)$ sistemu (2.20) dobijamo sledeći sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \tag{2.22}$$

Sistem (2.22) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5)) možemo dobiti tri različita sistema.

- Možemo dobiti sledeći sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, y)$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem novih identiteta iz (2.5) dobija se samo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sledeći sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + y + z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + y + z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo čitav sistem (2.5).

Ovim smo završili analiziranje sistema (2.22). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta ovom sistemu dobijamo sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ ili u $\mathbb{Z}_3^r$ ili čitav sistem (2.5).

(1bc) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.20) dobijamo sledeći sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \tag{2.23}$$

Sistem (2.23) je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobijamo tri nova sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$$

  Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) možemo dobiti samo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) možemo dobiti samo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + y + z$ i $\bar{q} \longrightarrow x + 2y + z$. Kao i ranije, dodavanjem identiteta dobijamo samo čitav sistem (2.5).

Završeno je analiziranje sistema (2.23). Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) može se dobiti sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ ili u $\mathbb{Z}_3^r$ ili ceo sistem (2.5).

(1bd) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.20) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.24}$$

Sistem (2.24) je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je takodje realizovan u svakoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, a dodavanjem bilo kojeg identiteta iz (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow x+2y+z$. Kao i u prethodnom slučaju, dodavanjem identiteta dobijamo samo ceo sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_{19}^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 12x + 4y + 4z$ i $\bar{q} \longrightarrow 8x + 8y + 4z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.24). Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) dobijamo sisteme koji su realizovani u reduktima $\mathbb{Z}_5^r$, $\mathbb{Z}_3^r$, $\mathbb{Z}_{19}^r$ ili ceo sistem (2.5).

(1be) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x)$ sistemu (2.20) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases} \tag{2.25}$$

Sistem (2.25) je ekvivalentan sistemu (2.24) i dobija se od (2.24) transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}$.

(1bf) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$ sistemu (2.20) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases} \tag{2.26}$$

Sistem (2.26) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) možemo dobiti tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo ceo sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, y) \\ \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo ceo sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \approx \bar{p}(x, y, y) \end{cases}$$

  Sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_{19}^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 12x + 4y + 4z$ i $\bar{q} \longrightarrow 8x + 8y + 4z$. Dodavanjem identiteta iz (2.5) dobija se samo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.26). Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta dobijaju se sistemi koji su realizovani u istom reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, ili u $\mathbb{Z}_{19}^r$, ili ceo sistem (2.5).

Ispitali smo sve sisteme koji uključuju identitete (2.20), i nismo dobili nijedan novi sistem (tj. različit od (2.6)) koji implicira i potencijalno karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

(**1c**) Prvi identitet je isti kao prethodnim tačkama, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \tag{2.27}$$

Sistem (2.27) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Posmatramo sisteme koji sadrže više identiteta od navedenih (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi koji nastaju dodavanjem novog identiteta analizirani su u nastavku, u tačkama (1ca)–(1cf).

(1ca) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.27) dobijamo isti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \tag{2.28}$$

Sistem je isti kao sistem (2.14) koji je već ispitan.

(1cb) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.27) dobijamo sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \tag{2.29}$$

Sistem (2.29) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri sistema.

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$$

  Ovaj sistem je realizovan u bilo kojoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo samo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo samo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3y$ i $\bar{q} \longrightarrow 3y+3z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo samo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.29). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) dobijamo samo sisteme koji su realizovani u istoj algebri ili čitav sistem (2.5).

(1cc) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.27) dobijamo sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \tag{2.30}$$

Sistem je ekvivalentan sistemu (2.29) – jedan se od drugog dobija transpozicijom promenljivih terma $\bar{q}$.

(1cd) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.27) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.31}$$

Sistem je ekvivalentan sistemu (2.16) – jedan se od drugog može dobiti transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$ i transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$.

(1ce) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.27) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.32}$$

Sistem je ekvivalentan sistemu (2.31) i dobija se od (2.31) transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}$.

(1cf) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.27) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.33}$$

Sistem (2.33) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.5) možemo dobiti tri sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow y$ i $\bar{q} \longrightarrow z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.33). Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijaju se samo sistemi koji su realizovani u istoj algebri ili čitav sistem (2.5).

Ispitali smo sve sisteme koji uključuju identitete (2.27), i nismo dobili nijedan novi sistem (tj. različit od (2.6)) koji implicira i potencijalno karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

Pre nego što počnemo analiziranje sistema u kojima je prvi identititet isti kao u prethodnim tačkama, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi je oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, dokazaćemo sledeću lemu:

Lema 2.4.9. *Od svih sistema u kojima je prvi identititet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, dovoljno je analizirati sisteme sa drugim identitetom $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ ili $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ (naravno, radi se o sistemima čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema* (2.5)*).*

Dokaz. Posmatramo drugi identitet: $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Primetimo sledeće činjenice:

- Ukoliko je leva strana ovog identiteta ista kao leva strana prvog (tj. $\bar{p}(x,y,x)$), mogli bismo da zamenimo drugi identitet identitetom u kojem se pojavljuje samo $\bar{q}$ (prostim izjednačavanjem desnih strana), čime bismo dobili ekvivalentan sistem. Kao što je ranije rečeno (leme 2.4.6 i 2.4.7), term $\bar{p}$ mora da se pojavi u bar još jednom identitetu osim prvog u svakom sistemu koji razmatramo (tj. u sistemu koji bi mogao da karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost). Ovo znači da posmatrani sistem sa prvim identitetom $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ mora imati i identitet u kojem se pojavljuje $p(x,x,y)$ ili $p(x,y,y)$. Taj identitet možemo uzeti kao drugi. Dakle, možemo posmatrati sisteme u kojima leva strana drugog identiteta, $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, nije $\bar{p}(x,y,x)$.
- Ako je desna strana drugog identiteta ista kao desna strana prvog, (tj. $\bar{q}(x,x,y)$), mogli bismo da zamenimo drugi identitet identitetom u kojem se pojavljuje samo $\bar{p}$ (izjednačavanjem levih strana), čime bi se dobio ekvivalentan sistem. Ovaj sistem bi imao identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ kao prvi, i neki identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ kao drugi. Sve ovakve slučajeve smo već ispitali u tačkama (**1a**)– (**1c**), pa možemo pretpostaviti da desna strana drugog identiteta nije $\bar{q}(x,x,y)$.

Na osnovu prethodnog, preostaju četiri slučaja za drugi identitet: $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ i $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$. Dakle, treba ispitati četiri klase sistema:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \vdots \end{cases}$$

Primetimo da su prva i druga klasa, isto kao i treća i četvrta klasa, medjusobno ekvivalentne – od proizvoljnog sistema iz druge klase, transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$ dobijamo sistem koji pripada prvoj klasi, i obratno. Isto važi i za treću i četvrtu klasu. Zaključujemo da je dovoljno analizirati samo sisteme prve i treće klase, odnosno one u kojima je drugi identitet jedan od $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$. □

(1d) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.34}$$

Sistem (2.34) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u bilo kojoj drugoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Posmatramo sisteme koji sadrže više identiteta od navedenih (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi koji nastaju dodavanjem novog identiteta analizirani su u nastavku, u tačkama (1da)–(1df).

(1da) Ukoliko sistemu (2.34) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, dobijamo sledeći sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \tag{2.35}$$

Sistem (2.35) je isti kao sistem (2.22) koji je već ispitan.

(1db) Ako sistemu (2.34) dodamo neki od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.36}$$

Sistem (2.36) je isti kao sistem (2.31) koji je već ispitan.

(1dc) Ako sistemu (2.34) dodamo neki od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.37}$$

Sistem (2.37) je isti kao sistem (2.16) koji je ispitan ranije.

(1dd) Ako sistemu (2.34) dodamo neki od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.38}$$

Sistem (2.38) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, kao i u bilo kojoj drugoj algebri, pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3y$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

Ovim smo završili analiziranje sistema (2.38). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) može se dobiti samo novi sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ ili ceo sistem (2.5).

(1de) Ako sistemu (2.34) dodamo neki od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.39}$$

Sistem (2.39) je ekvivalentan sistemu (2.38) i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom poslednje dve promenljive terma p i transpozicijom poslednje dve promenljive terma q.

(1df) Ako sistemu (2.34) dodamo identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.40}$$

Sistem (2.40) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x + 3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + y + z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + y + z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3y$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

Ovim je završeno analiziranje sistema (2.40). Ovaj sistem je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz (2.5) može se dobiti samo sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem realizovan u $\mathbb{Z}_3^r$, ili čitav sistem (2.5).

(1e) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, a drugi $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.41}$$

Sistem (2.41) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Posmatramo sisteme koji sadrže više identiteta od navedenih (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi koji nastaju dodavanjem novog identiteta analizirani su u nastavku, u tačkama (1ea)–(1ef).

(1ea) Ukoliko sistemu (2.41) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \tag{2.42}$$

Sistem (2.42) je isti kao sistem (2.29) koji je već ispitan.

(1eb) Ukoliko sistemu (2.41) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.43}$$

Sistem (2.43) je isti kao sistem (2.24) koji je već ispitan.

(1ec) Ako sistemu (2.41) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$, dobićemo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.44}$$

Sistem (2.56) je isti kao sistem (2.16) koji je već ispitan.

(1ed) Ako sistemu (2.41) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.45}$$

Sistem (2.45) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow x+2y+z$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo čitav sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.45). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo sistem koji je takodje realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem realizovan u $\mathbb{Z}_3^r$, ili čitav sistem (2.5).

(1ee) Ako sistemu (2.41) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.46}$$

Sistem (2.46) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x + 2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) možemo dobiti tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je već analiziran, kao treći po redu sistem koji se dobija dodavanjem identiteta sistemu (2.26).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.46). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo sistem koji je takodje realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem koji je ranije analiziran, ili ceo sistem (2.4).

(1ef) Ako sistemu (2.41) dodamo identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.47}$$

Sistem (2.47) je ekvivalentan sistemu (2.40), i može se dobiti od ovog sistema transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}$.

Ispitali smo sve sisteme koji uključuju identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ (i čiji su svi identiteti takodje i identiteti sistema (2.5)). Osim sistema (2.6), nismo dobili nijedan sistem koji implicira (i potencijalno karakteriše) svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

(**2**) U ovoj tački analiziramo sisteme čiji je prvi identitet neki od sledećih identiteta:

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$$

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$$

$$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$$

Naravno, preostali identiteti ovih sistema su takodje neki od identiteta sistema (2.5).

Lema 2.4.10. *Svaki sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema* (2.5)*, a čiji je prvi identitet neki od pet identiteta navedenih iznad, ekvivalentan je nekom sistemu čiji je prvi identitet* $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ *(i čiji je skup identiteta takodje podskup skupa identiteta sistema* (2.5)*).*

Dokaz. Od svakog od navedenih pet identiteta može se, nekom permutacijom promenljivih, dobiti identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$:

- Od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ dobijamo $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$.

- Od identiteta $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$ dobijamo $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$.
- Od identiteta $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, x, y)$ dobijamo $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$.
- Od identiteta $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$ dobijamo $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$ i poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$.
- Od identiteta $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x)$ dobijamo $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$ i prve i treće promenljive terma $\bar{q}$.

Sistem (2.5) je invarijantan u odnosu na bilo koju permutaciju promenljivih terma $\bar{q}$, kao i na transpoziciju poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$. Dakle, primenom navedenih permutacija promenljivih, od sistema čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema (2.5), dobijamo sistem za koji važi isto (naravno, ne mora biti u pitanju *isti* podskup). $\square$

Na osnovu prethodne leme zaključujemo da nema potrebe da ispitujemo sisteme čiji je prvi identitet neki od pet identiteta navedenih iznad. Svi ovi sistemi (tj. sistemi ekvivalentni njima) su analizirani u tački (**1**).

(**3**) U ovoj tački analiziramo sisteme čiji je prvi identitet neki od sledećih identiteta:

$$\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$$
$$\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, x, y)$$
$$\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x)$$

(I, naravno, svi identiteti posmatranih sistema su takodje i identiteti sistema (2.5).)

Dovoljno je analizirati samo prvu klasu ovakvih sistema (tj. one čiji je prvi identitet $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$). Naime, ukoliko je prvi identitet neki od preostala dva, sistem se može, odgovarajućom transpozicijom promenljivih terma $\bar{q}$, transformisati u ekvivalentan sistem sa prvim identitetom $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$. U prethodnoj tački smo dokazali da je skup identiteta ekvivalentnog sistema koji se dobija takodje podskup skupa identiteta sistema (2.5).

Dakle, prvi identitet je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$. Kao drugi identitet uzimamo, redom, navedene identitete:

$\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$. Svi ovakvi sistemi su analizirani u tački (**3a**).

$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$. Ovi sistemi su analizirani u tački (**3b**).

$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$. Ovi sistemi su analizirani u tački (**3c**).

$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$. Ovi sistemi su ispitani u tački (**3d**).

Napomena: dovoljno je analizirati samo jedan slučaj drugog identiteta oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, i to je identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$. Ovo je dokazano u lemi (2.4.11), koja sledi iza tačke (**3d**).

(**3a**) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.48}$$

Sistem (2.48) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Sistem ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo, na osnovu leme 2.3.1. Sada posmatramo sisteme koji sadrže više od navedena dva identiteta (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5)). Različiti slučajevi trećeg identiteta su analizirani u nastavku, u tačkama (3aa)–(3af).

(3aa) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ ili $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.48), dobijamo isti sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \tag{2.49}$$

Sistem (2.49) je ekvivalentan sistemu (2.14), i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom poslednje dve promenjlive terma $\bar{q}$.

(3ab) Ako sistemu (2.48) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.50}$$

Sistem (2.50) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$$

Ovaj sistem je takodje realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je već analiziran, naime, ekvivalentan je trećem po redu od sistema koje smo dobili dodavanjem identiteta sistemu (2.26) (jedan od drugog možemo dobiti transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$).

Završili smo analiziranje sistema (2.50). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobija se ili novi sistem takodje realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem ekvivalentan jednom od ranije analiziranih sistema, ili čitav sistem (2.5).

(3ac) Ako sistemu (2.48) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.51}$$

Sistem (2.51) je isti kao (2.24) koji je već ispitan.

(3ad) Ako sistemu (2.48) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.52}$$

Sistem (2.52) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow z$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Možemo dobiti sistem:

  $$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x + y + z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobija se čitav sistem (2.5).

- Možemo dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je analiziran ranije, kao treći po redu sistem koji smo dobili dodavanjem identiteta sistemu (2.26).

Završili smo analiziranje sistema (2.52). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti novi sistem koji je takodje realizovan u istom reduktu, ili sistem koji je analiziran ranije, ili ceo sistem (2.5).

(3ae) Ako sistemu (2.48) dodamo bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.53}$$

Sistem (2.53) je ekvivalentan sistemu (2.24), i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$.

(3af) Ako sistemu (2.48) dodamo identitet $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ dobićemo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \\ \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.54}$$

Sistem (2.54) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3y + 3z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \\ \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow x + 2y + z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

- Može se dobiti sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.54). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem realizovan u $\mathbb{Z}_3^r$, ili ceo sistem (2.5).

(3b) Prvi identitet je $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$, a drugi $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, x, y)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y) \tag{2.55}$$

Sistem (2.55) je ekvivalentan sistemu (2.27) koji je ispitan ranije. Ovaj sistem se može dobiti od sistema (2.27) (i obratno) pomoću dve transpozicije: potrebne su transpozicija poslednje dve promenjive terma $\bar{p}$ i transpozicija poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$.

(**3c**) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \tag{2.56}$$

Sistem (2.56) je ekvivalentan sistemu (2.27), jer se jedan od drugog može dobiti transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$.

(**3d**) Prvi identitet je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi je $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, tj. imamo ovakav sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \tag{2.57}$$

Sistem (2.57) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Na osnovu leme 2.3.1, sistem ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo. Posmatramo sisteme koji sadrže više identiteta od navedenih, tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.5). Sistemi koji se dobijaju dodavanjem jednog identiteta sistemu (2.57) analizirani su u nastavku, u tačkama (3da)–(3df).

(3da) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$ ili $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.57), dobijamo isti sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \tag{2.58}$$

Sistem (2.58) je ekvivalentan sistemu (2.29) koji je već ispitan, i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$. Kako je sistem (2.5) invarijantan u odnosu na ovu transpoziciju, nema potrebe da analiziramo ovaj slučaj.

(3db) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ ili $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.57), dobijamo sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \tag{2.59}$$

Sistem (2.59) je ekvivalentan sistemu (2.58), i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}$.

(3dc) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ ili $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.57), dobijamo sistem:

$$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \tag{2.60}$$

Sistem (2.60) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x + 2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem jednog identiteta iz (2.5) možemo dobiti tri različita sistema:

- Može se dobiti sistem:

  $$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

- Može se dobiti sistem:

  $$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$$

  Ovaj sistem je analiziran pri analizi sistema (2.58) (tačka (3da)).

- Može se dobiti sistem:

  $$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+y+z$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo čitav sistem (2.5).

Završili smo analiziranje sistema (2.60). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) može se dobiti samo sistem realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem koji je već ispitan ranije, ili čitav sistem (2.5).

(3dd) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.57), dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.61}$$

Sistem (2.61) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.5) dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

  $$\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$$

  Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.5) dobijamo ceo sistem.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

Ovaj sistem je već analiziran kao jedan od sistema koji se dobijaju dodavanjem identiteta sistemu (2.60).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan trećem po redu sistemu koji smo dobili dodavanjem identiteta sistemu (2.26) (tačka (1bf)), i može se dobiti od njega transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$.

Ovim smo završili analiziranje sistema (2.61). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz (2.5) mogu se dobiti samo sistemi za koje važi isto, ili sistemi koji su već analizirani, ili ceo sistem (2.5).

(3de) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.57), dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.62}$$

Sistem (2.62) je ekvivalentan sistemu (2.46) (tačka (1ee)), i jedan se od drugog mogu dobiti transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$.

(3df) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.57), dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.63}$$

Sistem (2.63) je ekvivalentan sistemu (2.62) i jedan se od drugog može dobiti transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}$.

Lema 2.4.11. *Svi sistemi u kojima je prvi identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi je oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, su ili već ispitani, ili ekvivalentni nekima od već ispitanih sistema (naravno, radi se o sistemima čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema* (2.5)*).*

Dokaz.

– Svi sistemi sa prvim identitetom $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ i drugim identitetom $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$ su ispitani u tački (**3d**).

- Svi sistemi sa prvim identitetom $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ i drugim identitetom $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ se transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$ svode na prethodni slučaj.

– Svi sistemi sa prvim identitetom $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, i drugim identitetom $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ se, zamenom redosleda prva dva identiteta, svode na sistem (2.41), odnosno na sisteme analizirane u tački (**1e**).

– Svi sistemi u kojima je prvi identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi identitet je $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ se, traspozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}$, svode na prethodni slučaj.

– Svi sistemi u kojima je prvi identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi identitet je $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ su analizirani u tački (**1c**), jer se transpozicijom poslednje dve promenljive terma $\bar{q}$, od ova dva identiteta dobija upravo sistem (2.27).

– Svi sistemi u kojima je prvi identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, a drugi identitet je bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$, se, transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}$, svode na neki od prethodnih slučajeva.

Budući da smo razmotrili sve moguće slučajeve za drugi identitet, ovim je lema dokazana. □

Ispitani su svi sistemi koji se mogu dobiti eliminacijom identiteta iz sistema (2.5). Možemo zaključiti sledeće: od sistema (2.5) se, eliminacijom identiteta, može dobiti samo jedan sistem (do na ekvivalentnost, odnosno permutaciju promenljivih), koji implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, i koji nije čitav sistem (2.5). To je sistem koji smo označili sa (2.6).

Ovim je dokazano tvrdjenje 2.4.5. □

U nastavku ovog pododeljka završavamo ispitivanje slučaja koji smo nazvali *Jedan majority–term*, odnosno sistema koji smo označili sa (2.2) na početku ovog pododeljka. Setimo se da smo iz ovog sistema najpre eliminisali sve identitete čija je jedna strana samo promenljiva x, čime smo dobili sistem (2.5). Ispitivanjem sistema (2.5) (odnosno svih sistema koji se mogu dobiti eliminacijom identiteta ovog sistema) dobili smo (2.6). Ovo znači da, do sada, nisu ispitani sistemi čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže jedan ili više identiteta u kojima je sa jedne strane samo promenljiva x (tj. identiteta oblika $x \approx \bar{p}(\dots)$ ili $x \approx \bar{q}(\dots)$).

Pokazuje se da se ispitivanjem ovih sistema ne dobija ništa novo:

Tvrdjenje 2.4.12. *Od sistema koji smo prethodno označili sa* (2.2),

$$x \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x),$$

se eliminacijom identiteta ne može dobiti nijedan sistem koji implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti i koji sadrži identitet oblika $x \approx \bar{p}(\dots)$ ili $x \approx \bar{q}(\dots)$.

Dokaz.[7]
Analiziramo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže bar jedan identitet oblika $x \approx \bar{p}(\dots)$ ili $x \approx \bar{q}(\dots)$. Kao i u dokazu tvrdjenja 2.4.5, pokazaćemo da je svaki od ovih sistema ili realizovan u nekom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom, ili nije realizovan u nekoj od algebri $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ iz primera 2, 1 i 3 redom. (Videti teoremu 2.2.4, tvrdjenje 2.2.5 i činjenicu 2.2.6.)

Smatraćemo da je identitet oblika $x \approx \bar{p}(\dots)$, odnosno $x \approx \bar{q}(\dots)$, prvi po redu u svim sistemima koje analiziramo.

Celokupna analiza sistema u dokazu ovog tvrdjenja podeljena je na dva dela.

U prvom delu (tačka (**1**)) analiziramo sisteme čiji je prvi identitet jedan od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx x$, $\bar{p}(x,y,x) \approx x$ ili $\bar{p}(x,y,y) \approx x$.

U drugom delu (tačka (**2**)) analiziramo sisteme u kojima je prvi identitet jedan od identiteta $\bar{q}(x,x,y) \approx x$, $\bar{q}(x,y,x) \approx x$ ili $\bar{q}(y,x,x) \approx x$ (pokazuje se da je dovoljno ispitati samo jedan od ovih slučajeva).

(**1**) U ovoj tački analiziramo sisteme čiji je prvi identitet jedan od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx x$, $\bar{p}(x,y,x) \approx x$ ili $\bar{p}(x,y,y) \approx x$ (i čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2)).

[7] U dokazu ovog tvrdjenja takodje diskutujemo veliki broj sistema; dokaz se završava na strani 102.

Sistemi čiji je prvi identitet $\bar{p}(x, x, y) \approx x$ su analizirani u tački (**1a**).

Sistemi čiji je prvi identitet $\bar{p}(x, y, x) \approx x$ su analizirani u tački (**1b**).

Sistemi čiji je prvi identitet $\bar{p}(x, y, y) \approx x$ su analizirani u tački (**1c**).

Važi sledeće:

Lema 2.4.13. *Neka je N sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema* (2.2) *i koji ima realizaciju u algebri* $\mathbf{B}$ *(primer* 1*), takvu da se $\bar{p}$ i $\bar{q}$ interpretiraju kao najviše binarni termi. Onda je sistem N realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.*

Dokaz.

Razmatramo sve slučajeve interpretacija terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u jeziku $\{\wedge\}$ algebre $\mathbf{B}$.

- Neka je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao $x \wedge y$. Ako je term $\bar{q}$ takodje interpretiran kao binarni term, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je to isti term $x \wedge y$ (jer su svi identiteti sistema (2.2) u kojima učestvuje $\bar{q}$ simetrični u odnosu na permutacije promenljivih). Svi identiteti iz sistema (2.2) koje ovakva interpretacija zadovoljava su:
$$\begin{cases} \bar{p}(x, x, y) \approx x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x). \end{cases}$$
Medjutim, ovaj sistem je takodje realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x + 3y$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$.
- Neka je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao $x \wedge y$, a term $\bar{q}(x, y, z)$ kao jedna promenljiva. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $\bar{q}$ interpretiran kao x (identiteti sistema (2.2) u kojima učestvuje $\bar{q}$ su simetrični u odnosu na permutacije promenljivih). Svi identiteti sistema (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:
$$\begin{cases} \bar{p}(x, x, y) \approx x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, y). \end{cases}$$
Ovaj sistem je takodje realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x + 3y$ i $\bar{q} \longrightarrow x$.
- Slučaj kada je interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ term $x \wedge z$ je analogan prethodnom jer term $\bar{p}(x, z, y)$ takodje zadovoljava identitete sistema (2.2) (tj. sistem (2.2) je invarijantan u odnosu na transpoziciju poslednje dve promenljive terma $\bar{p}$).

- Neka je interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ term $y \wedge z$. Ako je $\bar{q}$ interpretiran kao binarni term, pretpostavimo da je u pitanju $x \wedge y$ (ponovo bez gubitka opštosti). Svi identiteti iz (2.2) koje interpretacija zadovoljava su:

$$\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x).$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3y + 3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$.

- Neka je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao $y \wedge z$, a term $\bar{q}(x, y, z)$ kao jedna promenljiva. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je interpretacija terma $\bar{q}(x, y, z)$ term x (ponovo jer su svi identiteti sistema (2.2) u kojima učestvuje $\bar{q}$ simetrični u odnosu na permutacije promenljivih). Svi identiteti iz (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \\ \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x). \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3y + 3z$ i $\bar{q} \longrightarrow x$.

- Neka je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao term x. Ako $\bar{q}$ interpretiran kao binarni term, pretpostavimo da je u pitanju $x \wedge y$. Svi identiteti iz sistema (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x). \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$.

- Ako je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao term x, a term $\bar{q}(x, y, z)$ je takodje interpretiran kao jedna promenljiva, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da je to term x. Svi identiteti iz sistema (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:

$$x \approx \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y).$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$.

- Neka je interpretacija terma $\bar{p}(x,y,z)$ term y. Ako je interpretacija terma $\bar{q}$ binarni term, pretpostavimo da je u pitanju $x \wedge y$. Svi identiteti iz sistema (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \\ \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x). \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow y$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$.

- Ako je interpretacija terma $\bar{p}(x,y,z)$ term y, a interpretacija terma $\bar{q}(x,y,z)$ je takodje samo jedna promenljiva, kao i ranije pretpostavljamo da je to term x. Svi identiteti iz iz sistema (2.2) koje ova interpretacija zadovoljava su:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x). \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow y$ i $\bar{q} \longrightarrow x$.

- Ako je interpretacija terma $\bar{p}(x,y,z)$ term z, dobijamo slučaj ekvivalentan prethodnom jer se može posmatrati term $\bar{p}(x,z,y)$ (tj. sistem (2.2) je invarijantan u odnosu na ovu transpoziciju promenljivih).

$\square$

(1a) Posmatrajmo sada sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a čiji je prvi identitet $\bar{p}(x,x,y) \approx x$. Na osnovu leme 2.4.1, ako ovakav sistem karakteriše (ili implicira) svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, on mora imati bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Dakle, ovi sistemi izgledaju ovako:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx x \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases} \tag{N}$$

Ovu klasu sistema smo označili sa N. U nastavku razmatranja, umesto „proizvoljan sistem klase N" pisaćemo jednostavno „sistem N" .

Sistem N treba da bude realizovan u algebri $\mathbf{B}$ (naravno, i u algebrama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ iz primera 2 i 3 redom).

Analiziramo sistem N:

- Iz prvog identiteta, $\bar{p}(x,x,y) \approx x$, zaključujemo da interpretacija terma $\bar{p}(x,y,z)$ u jeziku algebre **B** mora biti najviše binarni term (u suprotnom dobijamo identitet $x \wedge x \wedge y \approx x$ koji nije zadovoljen u algebri **B**). Dakle, term $\bar{p}(x,y,z)$ može biti interpretiran kao promenljiva x, promenljiva y ili term $x \wedge y$, čime se, redom, dobijaju identiteti $x \approx x$, $x \approx x$ i $x \wedge x \approx x$, koji su zadovoljeni u **B**. Dalje, ako pretpostavimo da je u drugom identitetu sistema N (tj. u identitetu oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$), leva strana $\bar{p}(x,x,y)$, dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx x \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases}$$

Ovaj sistem može biti realizovan u **B** samo ako je moguće interpretirati $\bar{q}$ kao najviše binarni term. Medjutim, u ovom slučaju, na osnovu leme 2.4.13 sledi da ovakav sistem ima realizaciju u algebri $\mathbb{Z}_5^r$. Zaključujemo da u drugom identitetu sistema N leva strana mora biti ili $\bar{p}(x,y,y)$ ili $\bar{p}(x,y,x)$.

- Ukoliko se x i $\bar{p}(x,x,y)$ (tj. leva i desna strana prvog identiteta sistema N) ne pojavljuju u ostatku sistema N, tada su svi preostali identiteti ovog sistema neki (ili svi) iz sledećeg skupa identiteta (tj. sistema):

$$\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x).$$

Prvi identitet, $x \approx \bar{p}(x,x,y)$, zajedno sa navedenim sistemom, čini sistem koji je realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 4x+2y$ i $\bar{q} \longrightarrow 2x+2y+2z$. (Isto važi za prvi identitet zajedno sa bilo kojim podskupom navedenog sistema.) Zaključujemo da se $\bar{p}(x,x,y)$ ili x (tj. leva ili desna strana prvog identiteta sistema N) mora pojaviti bar u još jednom identitetu sistema N.

– Ukoliko se $\bar{p}(x,x,y)$ (ili samo x) pojavljuje u ostatku sistema N u identitetu oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ (odnosno $x \approx \bar{p}(\dots)$), dobićemo, kao deo sistema N, ili $\bar{p}(x,x,y) \approx x \approx \bar{p}(x,y,y)$, ili $\bar{p}(x,x,y) \approx x \approx \bar{p}(x,y,x)$. Kako želimo da sistem N bude realizovan u algebri **B**, zaključujemo da u oba slučaja $\bar{p}$ mora biti interpretiran kao promenljiva u jeziku ove algebre. Budući da je drugi identitet sistema N oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, term $\bar{q}(x,y,z)$ mora biti interpretiran kao najviše binarni term (jer u suprotnom se drugi identitet interpretira kao $x \approx x \wedge x \wedge y$ ili $y \approx x \wedge x \wedge y$, a ovi identiteti nisu zadovoljeni u algebri $\mathbf{B}$). Dakle, $\bar{p}$ i $\bar{q}$ bi bili interpretirani kao najviše binarni termi jezika algebre $\mathbf{B}$, što bi, na osnovu leme 2.4.13, značilo da je sistem N realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$. Zaključujemo da se $\bar{p}(x, x, y)$ (ili samo x) pojavljuje u ostatku sistema N u identitetu oblika $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(\dots)$ (odnosno $x \approx \bar{q}(\dots)$).

– Na osnovu prethodne tačke, sistem N sadrži identitet oblika $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $x \approx \bar{q}(\dots)$. Možemo zaključiti da sistem N, kao svoj deo (tj. podskup skupa identiteta), uključuje neki od sledećih sistema:

$$\bar{p}(x, x, y) \approx x \approx \bar{q}(x, x, y).$$

$$\bar{p}(x, x, y) \approx x \approx \bar{q}(y, x, x).$$

$$\bar{p}(x, x, y) \approx x \approx \bar{q}(x, y, x).$$

U svakom od ovih slučajeva $\bar{p}$ i $\bar{q}$ moraju biti interpretirani kao najviše binarni termi u jeziku algebre $\mathbf{B}$ (jer želimo da sistem N bude realizovan u $\mathbf{B}$). Na osnovu leme 2.4.13 sistem N je takodje realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$.

Na osnovu prethodnog razmatranja možemo zaključiti da sistem N, tj. bilo koji sistem klase N, ne može karakterisati (niti implicirati) svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

(1b) U ovoj tački ispitujemo sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a čiji je prvi identitet $\bar{p}(x, y, x) \approx x$. Na osnovu leme 2.4.1, možemo pretpostaviti da je drugi identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Ova klasa sistema izgleda ovako:

$$\begin{cases} \bar{p}(x, y, x) \approx x \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \qquad\vdots \end{cases} \tag{P}$$

Od bilo kojeg sistema klase P možemo, transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}$, dobiti ekvivalentan sistem koji pripada klasi N. U prethodnoj tački smo pokazali da nijedan od ovih sistema ne karakteriše (niti implicira) svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

(1c) U ovoj tački ispitujemo sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a čiji je prvi identitet $\bar{p}(x,y,y) \approx x$. Kao i u prethodnim tačkama, na osnovu leme 2.4.1, možemo pretpostaviti da je drugi identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Ova klasa sistema izgleda ovako:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,y,y) \approx x \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{Q}$$

Ako sistem klase Q (zvaćemo ga jednostavno „sistem Q") karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, on mora biti realizovan u algebri **B**. Iz prvog identiteta sistema Q vidimo da interpretacija terma $\bar{p}$ pri ovoj realizaciji mora biti $\bar{p} \longrightarrow x$. Medjutim, ukoliko je $\bar{p}$ interpretiran kao promenljiva, $\bar{q}$ mora biti interpretiran kao najviše binarni term (zbog drugog identiteta). Na osnovu leme 2.4.13, sistem Q je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, pa ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (niti implicirati). Zaključujemo da nijedan sistem klase Q ne karakteriše ovo svojstvo.

Možemo zaključiti da nijedan sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema (2.2), a koji uključuje neki od identiteta $x \approx \bar{p}(x,x,y)$, $x \approx \bar{p}(x,y,x)$, $x \approx \bar{p}(x,y,y)$, ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. Drugim rečima, nijedan od ova tri identiteta ne može figurisati u sistemu koji tražimo.

(2) U ovoj tački analiziramo sisteme čiji je prvi identitet jedan od identiteta $x \approx \bar{q}(x,x,y)$, $x \approx \bar{q}(x,y,x)$, $x \approx \bar{q}(y,x,x)$ (i čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2)).

Lako je videti da nema potrebe da analiziramo sve ove sisteme: sistem (2.2) je invarijantan u odnosu na permutacije promenljivih terma $\bar{q}(x,y,z)$. Dakle, svaki sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema (2.2), a čiji je prvi identitet $x \approx \bar{q}(x,y,x)$, ekvivalentan je nekom sistemu za čiji skup identiteta važi isto, a čiji je prvi identitet $x \approx \bar{q}(x,x,y)$. Ovaj ekvivalentan sistem se dobija transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$. Analogno važi za sisteme sa prvim identitetom $x \approx \bar{q}(y,x,x)$: u ovom slučaju ekvivalentan sistem sa prvim identitetom $x \approx \bar{q}(x,x,y)$ dobija se transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$.

Zaključujemo da je dovoljno ispitati sisteme čiji je prvi identitet $x \approx \bar{q}(x, x, y)$ (i čiji skupovi identiteta su podskupovi skupa identiteta sistema (2.2)).

Primetimo sledeće važne činjenice:

- Nema potrebe da ispitujemo sisteme koji sadrže bilo koji od identiteta $x \approx \bar{p}(x, x, y)$, $x \approx \bar{p}(x, y, x)$, $x \approx \bar{p}(x, y, y)$, jer smo u prethodnoj tački (**1**) pokazali da nijedan od ovih identiteta ne može figurisati u sistemu koji karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (i čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema (2.2)).
- Na osnovu leme 2.4.1, sistem koji tražimo mora da uključi najmanje jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Dakle, analiziramo sledeću klasu sistema:
$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases} \tag{R}$$
Ovu klasu sistema smo označili sa R.
- Ako pretpostavimo da je drugi identitet nekog sistema klase R oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(x, x, y)$, onda sistem koji posmatramo sadrži (kao svoj deo) sledeći skup identiteta:
$$\bar{p}(\dots) \approx x \approx \bar{q}(x, x, y)$$
Dakle, ovakav sistem sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (gde je leva strana, naravno, nešto od $\bar{p}(x, x, y)$, $\bar{p}(x, y, x)$, $\bar{p}(x, y, y)$). Već smo pokazali da sistem koji sadrži bilo koji od ovih identiteta ne može karakterisati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Zaključujemo da nema potrebe da ispitujemo sisteme klase R čiji je drugi identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(x, x, y)$.
- Na osnovu prethodnog, preostaje da analiziramo sisteme klase R čiji drugi identitet ima formu $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(x, y, x)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(y, x, x)$, odnosno sisteme sledeće dve potklase:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \vdots \end{cases} \tag{R1}$$

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \vdots \end{cases} \tag{R2}$$

Primetimo da se transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}(x, y, z)$ od svakog sistema klase $R2$ dobija ekvivalentan sistem klase $R1$. Konačno, može se zaključiti da je dovoljno analizirati sisteme klase $R1$.

Analizu sistema klase $R1$ podelićemo na tri dela:

Sisteme čiji je drugi identitet $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$ analiziramo u tački (**2a**).

Sisteme čiji je drugi identitet $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, y, x)$ analiziramo u tački (**2b**).

Sisteme čiji je drugi identitet $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$ analiziramo u tački (**2c**).

(**2a**) U ovoj tački analiziramo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže sledeća dva identiteta: $x \approx \bar{q}(x, x, y)$ i $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$.

Polazimo od sistema koji se sastoji samo od dva navedena identiteta:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \end{cases} \tag{2.64}$$

Sistem (2.64) je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ (i u proizvoljnoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, odnosno kada oba terma indukuju prvu projekciju. Sistem ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo, na osnovu leme 2.3.1. Sada posmatramo sisteme koji sadrže više od navedena dva identiteta (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.2)). Različiti slučajevi trećeg identiteta su analizirani u nastavku, u tačkama (2aa)–(2ah).

(2aa) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x, x, y) \approx x$, $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, x, y)$, $\bar{q}(x, y, x) \approx x$, $\bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ sistemu (2.64) dobijamo sledeći sistem:

$$x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$$

Sistem koji smo dobili sadrži identitet $x \approx \bar{p}(x, x, y)$, a dokazano je ranije (tačka (**1**)) da nijedan ovakav sistem ne može karakterisati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Dakle, nema potrebe da ispitujemo ni sisteme koji se dobijaju dodavanjem novih identiteta iz (2.2) ovom sistemu.

(2ab) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $x \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.64), dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.65}$$

U svakoj realizaciji sistema (2.65) u polumreži **B** iz primera 1 term $\bar{q}(x,y,z)$ mora biti interpretiran kao y, odnosno mora da indukuje drugu projekciju na ovoj algebri. To povlači da se term $\bar{p}(x,y,z)$ mora interpretirati kao z, što na osnovu leme 2.4.13 znači da je (2.65) realizovan u $\mathbb{Z}_5^r$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) možemo dobiti samo sisteme koji nisu realizovani u polumreži **B** (pa prema tome ne karakterišu kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost) ili sisteme koji su realizovani u **B** pri istim interpretacijama terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ kao sistem (2.65) (pa na osnovu leme 2.4.13 ne karakterišu ovo svojstvo).

(2ac) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.64), dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.66}$$

Sistem (2.66) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Potrebno je dodati još identiteta iz sistema (2.2). Dodavanjem identiteta možemo dobiti sisteme koji sadrže identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, pa kao takvi ne karakterišu svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnostyi (dokazano u tački (**1**)). Razmotrićemo samo preostala tri slučaja (tj. slučajeve kada dodavanje jednog identiteta ne dovodi do sistema koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) moguće je dobiti samo jedan sistem koji ne sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, i to je sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.67}$$

Napomena: dobijeni sistem smo označili brojem jer se razlikuje od svih prethodnih slučajeva. Ovo, donekle, predstavlja odstupanje od načina numerisanja - naime, do sada smo brojevima označavali samo sisteme od kojih se, dodavanjem identiteta, dobijaju novi sistemi koje treba analizirati. Ipak, na sistem (2.67) se pozivamo i kasnije.

Dokazaćemo sledeće:

Lema 2.4.14. *Sistem* (2.67) *nije realizovan u algebri* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *iz primera* 3.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Dakle, postoje interpretacije terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u jeziku $\{f\}$, označimo ove terme sa p i q, takve da algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ zadovoljava identitete:

$$\begin{cases} x \approx q(x,x,y) \\ p(x,x,y) \approx q(x,y,x) \approx q(y,x,x) \approx p(x,y,y) \approx p(x,y,x) \end{cases}$$

Ovo znači da algebre $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ zadovoljavaju iste identitete. Budući da je bazna operacija algebre $\mathbf{D}$ ternarna polumrežna operacija infimuma, svaka njena term–operacija je samo infimum odgovarajućih argumenata. Dakle, ukoliko algebra $\mathbf{D}$ zadovoljava identitet $x \approx q(x,x,y)$, to znači da term–operacija $q^{\mathbf{D}}$ ove algebre ne zavisi od svog trećeg argumenta. Ovo takodje znači da term q ne zavisi od svoje treće promenljive, tj. promenljiva z se ne pojavljuje sintaksno u termu $q(x,y,z)$ kojim smo interpretirali term $\bar{q}(x,y,z)$ iz sistema (2.67). Prema tome, term q u algebri $\mathbf{C}$ indukuje term–operaciju $q^{\mathbf{C}}$ koja ne zavisi od svog trećeg argumenta. Zaključujemo da ova term–operacija mora biti prva ili druga projekcija (algebra $\mathbf{C}$ nema drugih binarnih term–operacija osim projekcija, videti primer 2). Medjutim, algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ po pretpostavci zadovoljava i identitet $q(x,y,x) \approx q(y,x,x)$, što znači da i algebra $\mathbf{C}$ zadovoljava isti identitet, a to je nemoguće ako q indukuje prvu ili drugu projekciju na ovoj algebri. Dakle, algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ ne realizuje sistem (2.67). $\square$

Ovo znači da sistem (2.67) ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) dobija se samo ceo sistem (2.2) (koji takodje nije realizovan u $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3y+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) možemo dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (u tački (**1**) je dokazano da ovi sistemi ne karakterišu svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti) ili sistem (2.67) koji je već ispitan.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Dokaz je potpuno isti kao dokaz leme 2.4.14.

Završili smo analiziranje sistema (2.66). Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) ovom sistemu može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (u tački (**1**) je dokazano da ovakvi sistemi ne karakterišu svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti), ili sistem koji je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem koji nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(2ad) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.64), dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.68}$$

Sistem (2.68) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u proizvoljnoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Potrebno je dodati još jedan identitet iz sistema (2.2). Kao i u prethodnoj tački, ignorišemo slučajeve dodavanja novog identiteta koji za posledicu imaju sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$. Kada isključimo sve ove slučajeve, preostaje nam da analiziramo četiri sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.69}$$

Sistem (2.69) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) ovom sistemu možemo dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove slučajeve ignorišemo), ili sledeća dva sistema:

Prvi sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri **B** iz primera 1. (Iz prvog reda identiteta sledi da $\bar{q}$ treba da bude interpretiran kao promenljiva y, odnosno da indukuje drugu projekciju na **B**, ali onda ne postoji interpretacija za $\bar{p}$ takva da **B** zadovoljava sistem.) Dodavanjem identiteta iz (2.2) dobijamo samo ceo sistem (2.2) (koji takodje nije realizovan u **B**).

Drugi sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovo je sistem (2.67) koji je već analiziran.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Jedini sistem koji se dobija od ovog sistema dodavanjem identiteta iz sistema (2.2), a koji ne sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, je sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovo je prvi po redu sistem koji smo dobili dodavanjem jednog identiteta sistemu (2.69) (već je analiziran).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (dokaz je isti kao dokaz leme 2.4.14). Dodavanjem identiteta ovom sistemu može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove sisteme ignorišemo, ispitani su u tački (**1**)), ili sistem (2.67), ili ceo sistem (2.2).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow z$ i $\bar{q} \longrightarrow y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.2) dobija se sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, a već smo pokazali u tački (**1**) da nijedan ovakav sistem ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Ovim smo završili analiziranje sistema (2.68). Dodavanjem identiteta ovom sistemu može se dobiti sledeće: sistem koji je realizovan u proizvoljnoj algebri (pa i u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$), sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, pa kao takav ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (pokazano u tački (**1**)), sistem koji nije realizovan u algebri $\mathbf{B}$, sistem koji nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, sistem koji je već analiziran ranije ili ceo sistem (2.2).

(2ae) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$ sistemu (2.64) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.70}$$

Sistem (2.70) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$, pa kao takav ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo. Razmatramo dodavanje jednog identiteta iz sistema (2.2), pri čemu, kao i u prethodnim tačkama, ignorišemo slučajeve kada se dobija sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$. Analiziramo samo preostale slučajeve, odnosno četiri sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

Ovo je sistem (2.69) koji je već ispitan.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri **B** iz primera 1. (Iz prvog reda identiteta zaključujemo da bi term $\bar{q}(x, y, z)$ trebalo da bude interpretiran kao promenljiva y, odnosno da indukuje drugu projekciju na algebri **B**. Medjutim, ukoliko ovo važi, ne postoji interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ takva da **B** zadovoljava sistem.) Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) se, naravno, ne može dobiti sistem koji bi bio realizovan u algebri **B**.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3y + 3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x + 3y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p} \approx x$ (svi ovakvi sistemi su već analizirani) ili sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \approx \bar{p}(x, y, y) \end{cases}$$

Ovo je sistem (2.67) koji je već analiziran.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 2x + 2y + 2z$ i $\bar{q} \longrightarrow 4x + 2y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (svi ovakvi sistemi su već analizirani u tački (**1**)), ili sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases}$$

Ovo je sistem (2.67) koji je analiziran ranije.

Završili smo analiziranje sistema (2.70). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sledeće: sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (nijedan ovakav sistem ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti), sistem koji je već ispitan, sistem koji nije realizovan u algebri **B** ili sistem koji je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$.

(2af) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y)$ sistemu (2.64) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases} \tag{2.71}$$

Sistem (2.71) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow y$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Razmatramo dodavanje jednog identiteta iz sistema (2.2), pri čemu ignorišemo slučajeve kada se dobija sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$. Analiziramo samo preostale slučajeve, odnosno tri sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3z$ i $\bar{q} \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ovi sistemi su ispitani u tački (**1**) i nijedan od njih ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti), ili sistem (2.67) koji je ispitan ranije.
- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je već diskutovan. U pitanju je jedan od sistema koje smo dobili dodavanjem jednog identiteta sistemu (2.70) (četvrti po redu).
- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow x$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ovi sistemi su ispitani u tački (**1**) i nijedan od njih ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti), ili sistem (2.67) koji je ispitan ranije.

Završili smo analiziranje sistema (2.71). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sledeće: sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ pa kao takav ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, sistem realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ (takodje ne karakteriše svojstvo), ili sistem koji je ispitan ranije.

(2ag) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$ sistemu (2.64) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.72}$$

Sistem (2.72) je realizovan u proizvoljnoj algebri (pa i u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$) pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow x$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (već ispitan) ili tri sistema koji ne sadrže ovakav identitet (i koje analiziramo u nastavku).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je već analiziran. U pitanju je sistem koji se može dobiti dodavanjem jednog identiteta sistemu (2.70) (tačka (2ae)).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem koji smo analizirali u okviru tačke (2ad).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem koji smo analizirali u okviru tačke (2ae).

Završili smo analiziranje sistema (2.72). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti samo sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (svi ovakvi sistemi su već ispitani), ili sistem koji je analiziran ranije.

(2ah) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$ sistemu (2.64) dobijamo sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.73}$$

Sistem (2.73) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ (kao i u proizvoljnoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow x$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove sisteme smo već analizirali u tački (**1**)), ili četiri različita sistema koji ne sadrže ovakav identitet.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovo je sistem (2.69) koji je ispitan ranije.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem koji je analiziran u okviru tačke (2ab).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem koji je analiziran u okviru tačke (2ac).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem koji je analiziran u okviru tačke (2ae).

Završili smo analiziranje sistema (2.73). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti ili sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove sisteme smo već analizirali u tački (**1**)), ili neki od ranije ispitanih sistema.

Ispitali smo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji uključuju identitete (2.64).

(**2b**) U ovoj tački analiziramo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže sledeća dva identiteta: $x \approx \bar{q}(x,x,y)$ i $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$.

Polazimo od sistema koji se sastoji samo od dva navedena identiteta:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.74}$$

Primetimo da se od sistema (2.74) dobija sistem (2.64) transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$. Dakle, sistem (2.74) je ekvivalentan sistemu (2.64) koji je već ispitan u tački (**2a**).

(**2c**) U ovoj tački analiziramo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže sledeća dva identiteta: $x \approx \bar{q}(x,x,y)$ i $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$.

Polazimo od sistema koji se sastoji samo od dva navedena identiteta:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.75}$$

Sistem (2.75) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ (i u proizvoljnoj algebri) pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow x$. Sistem ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo, na osnovu leme 2.3.1. Sada posmatramo sisteme koji sadrže više od navedena dva identiteta (tj. dodajemo još identiteta iz sistema (2.2)). Različiti slučajevi trećeg identiteta su analizirani u nastavku, u tačkama (2ca)–(2cg).

(2ca) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $x \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.76}$$

Sistem (2.76) realizovan je u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow y$. Dodajemo još jedan identitet iz sistema (2.2), pri čemu ignorišemo slučajeve kada se dobija sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$. Dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je ekvivalentan drugom po redu sistemu koji je analiziran u tački (2ad), i od njega se može dobiti transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}(x, y, z)$.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y) \end{cases}$$

  Ovo je drugi po redu sistem analiziran u tački (2ad).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow 3y + 3z$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ne razmatramo) ili sledeći sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(y, x, x) \\ \bar{p}(x, y, y) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je već analiziran. To je prvi sistem koji smo dobili od sistema (2.69) dodavanjem jednog identiteta iz (2.2).

Ovim smo završili analiziranje sistema (2.76). Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) ovom sistemu može se dobiti sledeće: sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$, pa kao takav ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (dokazano u tački (**1**)), sistem koji je realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, ili sistem koji je već analiziran.

(2cb) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.77}$$

Sistem (2.77) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow 3x+3y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow 3x+3y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) ovom sistemu mogu se dobiti sistemi koji sadrže identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove sisteme ne analiziramo), i tri sistema koji ne sadrže identitet ovog oblika (a koji su analizirani u nastavku).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je ekvivalentan sistemu koji je analiziran u tački (2af) kao prvi po redu (dobija se dodavanjem jednog identiteta sistemu (2.71)). Od ovog sistema može se dobiti pomenuti sistem iz tačke (2af), i obrnuto, transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovo je sistem koji je analiziran kao prvi po redu u tački (2af).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_3^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow 2x+y+z$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow 2x+2y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti ili sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (svi ovakvi sistemi su već razmotreni u tački (**1**)), ili sistem (2.67) koji je već analiziran.

Završeno je analiziranje sistema (2.77). Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$. Dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sledeće: sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (svi ovakvi sistemi su analizirani u tački (**1**)), sistem koji je analiziran ranije, sistem koji je ekvivalentan sistemu analiziranom ranije, ili sistem realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_3^r$.

(2cc) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,y,x)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.78}$$

Sistem (2.78) je ekvivalentan sistemu (2.68) i jedan od drugog se mogu dobiti transpozicijom druge i treće promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$.

(2cd) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.79}$$

Sistem (2.79) je jednak sistemu (2.68) koji je već ispitan.

(2ce) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.80}$$

Sistem (2.80) je ekvivalentan sistemu (2.71) koji je već ispitan, i od njega se može dobiti transpozicijom prve i druge promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$ i druge i treće promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$.

(2cf) Dodavanjem identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.81}$$

Sistem (2.81) je ekvivalentan sistemu (2.71) i od njega se može dobiti transpozicijom prve dve promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$.

(2cg) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y)$ sistemu (2.75) dobićemo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.82}$$

Sistem (2.82) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$ i $\bar{q} \longrightarrow x$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (ove slučajeve ne diskutujemo, već su analizirani u tački (**1**)), ili četiri različita sistema koji ne sadrže identitet ovog oblika.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovo je sistem (2.69) koji je ispitan ranije.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovo je treći po redu sistem koji je analiziran u okviru tačke (2ca).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \end{cases}$$

  Ovo je poslednji sistem analiziran u okviru tačke (2cb).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{q}(x,x,y) \\ \bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases}$$

  Ovaj sistem je ekvivalentan sistemu koji je analiziran kao drugi po redu u okviru tačke (2af), i od njega se može dobiti transpozicijom prve i druge promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$.

Završili smo analiziranje sistema (2.82). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.2) može se dobiti ili sistem koji sadrži identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ (svi ovakvi sistemi su već analizirani u tački (**1**)), ili sistem koji je već analiziran u okviru tačke (**2**)), ili sistem koji je ekvivalentan ranije analiziranom sistemu.

Ispitani su svi sistemi čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.2), a koji sadrže identitet oblika $x \approx \bar{p}(\dots)$ ili $x \approx \bar{q}(\dots)$. Pokazano je da nijedan od ovih sistema ne karakteriše svojstvo kongreuncijske $\wedge$–poludistributivnosti, čime smo dokazali tvrdjenje 2.4.12. $\square$

2.4.2 Dva majority–terma

U ovom pododeljku razmatramo slučaj kada su oba terma $p_{\mathbf{A}}$ i $q_{\mathbf{A}}$ majority–termi algebre $\mathbf{A}$. To znači da algebra $\mathbf{A}$ zadovoljava sledeće identitete:

$$\begin{aligned} x &\approx p_{\mathbf{A}}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{A}}(x,y,x) \approx p_{\mathbf{A}}(y,x,x) \\ &\approx q_{\mathbf{A}}(y,x,x) \approx q_{\mathbf{A}}(x,y,x) \approx p_{\mathbf{A}}(x,x,y) \end{aligned} \tag{2.83}$$

Ako pretpostavimo da je sistem 2.83 upravo sistem M' dobijen interpretacijom jakog Maljcevljevog uslova M u jeziku $\mathcal{F} = \{f\}$ algebre $\mathbf{A}$ (videti početak tekućeg odeljka), onda bi sistem M (polazni jak Maljcevljev uslov jezika μ) izgledao ovako:

$$\begin{aligned} x &\approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,x) \\ &\approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Interpretacijom uslova (2.84) u jeziku algebre $\mathbf{B}$ dobijamo sistem M'' koji ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} x &\approx p_{\mathbf{B}}(x,x,y) \approx p_{\mathbf{B}}(x,y,x) \approx p_{\mathbf{B}}(y,x,x) \\ &\approx q_{\mathbf{B}}(y,x,x) \approx q_{\mathbf{B}}(x,y,x) \approx q_{\mathbf{B}}(x,x,y) \end{aligned} \tag{2.85}$$

Na osnovu činjenice 2.2.1, lako je utvrditi da sistem (2.85) nije realizovan u algebri $\mathbf{B}$, pa (2.84) ne može biti sistem koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. Dalji postupak je isti kao u prethodnom pododeljku: ispitali smo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.84).

Dokazaćemo sledeće:

Tvrdjenje 2.4.15. *Nijedan od sistema čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema prethodno označenog sa* (2.84),

$$\begin{aligned} x &\approx \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,x) \\ &\approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y), \end{aligned}$$

ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Dokaz.[8] Najpre primetimo da nema potrebe da analiziramo sisteme koji ne sadrže nijedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ ili $\bar{q}(\dots) \approx x$. Skup identiteta svakog takvog sistema je podskup sledećeg skupa identiteta:

$$\begin{aligned} &\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,x) \\ &\approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y). \end{aligned}$$

Ovaj sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow 2x+2y+2z$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dalje, svaki podskup ovog skupa identiteta je takodje

[8] Dokaz ovog tvrdjenja se završava na strani 111.

realizovan u istom reduktu pri istoj interpretaciji. Zaključujemo da ima smisla posmatrati samo sisteme koji sadrže bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx x$ ili $\bar{q}(\dots) \approx x$.

Na osnovu leme 2.4.1, svaki skup identiteta koji potencijalno karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost mora da sadrži bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$.

Dakle, posmatramo sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.84), a koji pripadaju jednoj od sledeće dve klase:

$$\begin{cases} \bar{p}(\dots) \approx x \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases} \tag{S1}$$

ili

$$\begin{cases} \bar{q}(\dots) \approx x \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases} \tag{S2}$$

Dalje, primetimo da je sistem (2.84) simetričan u odnosu na terme $\bar{p}$ i $\bar{q}$. To znači da od bilo kojeg sistema klase $S2$ možemo dobiti sistem klase $S1$, i obrnuto, zamenom terma $\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}$. Zaključujemo da je dovoljno posmatrati sisteme klase $S1$. Budući da je sistem (2.84) invarijantan u odnosu na permutacije promenljivih terma $\bar{p}$, dovoljno je analizirati sisteme klase $S1$ čiji je prvi identitet $x \approx \bar{p}(x, x, y)$.
U daljem razmatranju koristimo sledeću lemu:

Lema 2.4.16. *Neka je N sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema* (2.84)*, a koji je realizovan u algebri* $\mathbf{B}$ *pri interpretaciji u kojoj su $\bar{p}$ i $\bar{q}$ najviše binarni termi. Tada je N realizovan i u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$.*

Dokaz. Razmatramo realizaciju u $\mathbf{B}$, odnosno sve moguće slučajeve interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ i $\bar{q}(x, y, z)$.

- Neka je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran (u jeziku algebre $\mathbf{B}$) kao term $x \wedge y$. Ako je interpretacija terma $\bar{q}$ binarni term, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je u pitanju takodje term $x \wedge y$ (sistem (2.84) je invarijantan u odnosu na permutacije promenljivih u $\bar{p}$ i $\bar{q}$). Svi identiteti iz sistema (2.84) koje algebra $\mathbf{B}$ zadovoljava pri ovoj interpretaciji su:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \end{cases}$$

Medjutim, sve ove identitete takodje zadovoljava i redukt $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow 3x + 3y$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow 3x + 3y$.

Ako je term $\bar{q}(x, y, z)$ interpretiran kao samo jedna promenljiva (videti činjenicu (2.2.1)), uz pretpostavljenu interpretaciju za $\bar{p}$, tj. $x \wedge y$, onda bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je interpretacija terma $\bar{q}(x, y, z)$ promenljiva x (ponovo jer su svi identiteti u (2.84) simetrični u odnosu na permutacije promenljivih). Svi identiteti iz uslova (2.84) koje algebra **B** zadovoljava pri ovoj interpretaciji su:

$$x \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, y, x)$$

Sve ove identitete takodje zadovoljava i algebra $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow 3x + 3y$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow x$.

- Slucajevi kada je interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ u jeziku algebre **B** term $x \wedge z$ ili term $y \wedge z$ su analogni prethodnom (jer je sistem (2.84) invarijantan u odnosu na permutacije promenljivih).

- Kako je sistem (2.84) simetričan u odnosu na terme $\bar{p}$ i $\bar{q}$, preostaje samo da ispitamo slučaj kada su oba terma interpretirana kao samo po jedna promenljiva. Zbog pomenute simetričnosti sistema, možemo pretpostaviti da su oba terma interpretirana kao x. Svi identiteti iz uslova (2.84) koje algebra **B** zadovoljava pri ovoj interpretaciji su:

$$x \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{q}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, y, x)$$

Sve ove identitete takodje zadovoljava i algebra $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow x$.

$\square$

Pretpostavimo sada da je N sistem koji tražimo, tj. sistem čiji je skup identiteta podskup skupa identiteta sistema (2.84), čiji je prvi identitet $x \approx \bar{p}(x, x, y)$, i koji karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Već je rečeno da, pod ovom pretpostavkom, N mora da sadrži i identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$. Dakle, N pripada sledećoj klasi sistema:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots) \\ \vdots \end{cases} \tag{S3}$$

Napomena: pod klasom sistema $S3$ podrazumevamo sve sisteme čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.84), a koji sadrže identitet $x \approx \bar{p}(x, x, y)$ (koji uzimamo kao prvi po redu identitet u sistemu), zatim identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ (koji uzimamo kao drugi po redu), i, moguće, još neke identitete.

Lema 2.4.17. *Nijedan od skupova identiteta*

$$\begin{aligned} x \approx \bar{p}(x, x, y) &\approx \bar{p}(x, y, x) \qquad i \\ x \approx \bar{p}(x, x, y) &\approx \bar{p}(y, x, x) \end{aligned}$$

ne može biti podskup skupa identiteta sistema N.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Kako sistem N mora da bude realizovan u algebri $\mathbf{B}$, iz skupa identiteta $x \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, x)$ (ili $x \approx \bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(y, x, x)$) zaključujemo da je term $\bar{p}(x, y, z)$ interpretiran kao promenljiva x (odnosno y) pri ovoj realizaciji. Setimo se da N sadrži bar jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ (iz sistema (2.84)). Dakle, pošto je $\bar{p}$ interpretiran kao promenljiva (bilo x bilo y), $\bar{q}$ mora biti interpretiran kao najviše binarni term. Dobijamo da su, u interpretaciji koja realizuje sistem N u algebri $\mathbf{B}$, i $\bar{p}$ i $\bar{q}$ najviše binarni termi. Na osnovu leme 2.4.16 sledi da je N realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$, pa ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. $\Box$

Lema 2.4.18. *Nijedan od skupova identiteta*

$$\begin{aligned} x \approx \bar{p}(x, x, y) &\approx \bar{q}(x, y, x), \\ x \approx \bar{p}(x, x, y) &\approx \bar{q}(y, x, x) \qquad i \\ x \approx \bar{p}(x, x, y) &\approx \bar{q}(x, x, y) \end{aligned}$$

ne može biti podskup skupa identiteta sistema N.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: neki od tri navedena skupa identiteta je podskup skupa identiteta sistema N. Kako sistem N mora biti realizovan u algebri $\mathbf{B}$, sledi da termi $\bar{p}$ i $\bar{q}$ moraju biti interpretirani kao najviše binarni termi pri ovoj realizaciji. Na osnovu leme 2.4.16, N je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost. $\Box$

Na osnovu prethodne dve leme možemo zaključiti da se niti x niti $\bar{p}(x, x, y)$ ne pojavljuju u ostatku sistema N, tj. ne pojavljuju se ni u jednom identitetu osim prvog. (U suprotnom bismo dobili da N, ili njemu ekvivalentan sistem, sadrži neki od skupova identiteta navedenih u prethodne dve leme.) To znači da, osim prvog identiteta, sistem N sadrži samo neke (ili sve) identitete sledećeg sistema:

$$\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y). \tag{2.86}$$

Drugi identitet sistema N ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, što znači da postoji šest mogućnosti za izbor ovog identiteta (uz fiksirani prvi identitet, $x \approx \bar{p}(x,x,y)$). Pokazuje se da je dovoljno ispitati samo jednu od ovih šest mogućnosti:

Lema 2.4.19. *Od svih sistema klase $S3$, dovoljno je ispitati sisteme čija su prva dva identiteta $x \approx \bar{p}(x,x,y)$ i $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, odnosno sisteme sledeće potklase:*

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \\ \vdots \end{cases} \tag{S4}$$

Dokaz. Prvi identitet je fiksiran (u klasi $S3$ koju analiziramo), i to je $x \approx \bar{p}(x,x,y)$.

Ako je drugi identitet $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$ ili $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, onda se od takvog sistema može transpozicijom druge i treće (resp. prve i druge) promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$ dobiti ekvivalentan sistem koji pripada klasi $S4$.

Ako je drugi identitet bilo koji od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, od takvog sistema se, takodje, dobija ekvivalentan sistem koji pripada klasi $S4$. Potrebne permutacije promenljivih su, redom:

- Ukoliko je drugi identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y)$, potrebne su dve transpozicije: transpozicija prve dve promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$ i druge i treće promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$.

- Ukoliko je drugi identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x)$, takodje su potrebne dve transpozicije: transpozicija prve dve promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$ i prve dve promenljive terma $\bar{q}(x,y,z)$.

- Ukoliko je drugi identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$, dovoljna je jedna transpozicija i to je transpozicija prve dve promenljive terma $\bar{p}(x,y,z)$.

□

U nastavku analiziramo sisteme klase $S4$. (Setimo se, u sistemima ove klase svi identiteti osim prvog su identiteti sistema (2.86).)

Polazimo od sistema koji sadrži samo prva dva identiteta:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.87}$$

Sistem (2.87) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow y$. Potrebno je dodati još identiteta iz sistema (2.86). Različiti slučajevi koji nastaju dodavanjem trećeg identiteta sistemu (2.87) analizirani su u tačkama **(a)** – **(e)**.

(a) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.87) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.88}$$

Pokazaćemo da sistem (2.88) nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ iz primera 3: pretpostavimo suprotno, tj. da postoje interpretacije terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u jeziku $\{f\}$, označimo ove terme sa p i q, takve da algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ zadovoljava identitete:

$$\begin{cases} x \approx p(x,x,y) \\ p(y,x,x) \approx q(x,y,x) \approx p(x,y,x) \end{cases}$$

Ovo znači da algebre $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ zadovoljavaju iste identitete. Svaka term–operacija algebre $\mathbf{D}$ je infimum odgovarajućih argumenata (videti primer 3). Iz pretpostavke da algebra $\mathbf{D}$ zadovoljava identitet $x \approx p(x,x,y)$ sledi da term–operacija $p^{\mathbf{D}}$ ne zavisi od svog trećeg argumenta što znači da term $p(x,y,z)$ kojim je interpretiran term $\bar{p}(x,y,z)$ ne zavisi od promenljive z. Dakle z se ne pojavljuje (sintaksno) u termu $p(x,y,z)$. Prema tome, term p u algebri $\mathbf{C}$ indukuje term–operaciju $p^{\mathbf{C}}$ koja ne zavisi od svog trećeg argumenta, što znači da je ova term–operacija prva ili druga projekcija (ovo su jedine binarne term–operacije algebre $\mathbf{C}$). Ali algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ zadovoljava i identitet $p(y,x,x) \approx p(x,y,x)$, što znači da i algebra $\mathbf{C}$ zadovoljava isti identitet, a to je nemoguće ako p indukuje prvu ili drugu projekciju na ovoj algebri. Zaključujemo da algebra $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ ne realizuje sistem (2.88).

Dodavanjem novih identiteta iz sistema (2.86) ne može se dobiti sistem koji je realizovan u $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(b) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(y,x,x)$, $\bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.87) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{2.89}$$

Sistem (2.89) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow z$. Potrebno je dodati još identiteta iz sistema (2.86). Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.86) možemo dobiti tri različita sistema koje analiziramo u nastavku.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.90}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Dokaz je isti kao za sistem (2.88). Dodavanjem identiteta iz sistema (2.86) ne može se dobiti sistem koji je realizovan u ovoj algebri.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.91}$$

Sistem je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow 2x+4y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow 2x+2y+2z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.86) dobija se sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,x) \end{cases} \tag{2.92}$$

Ovaj sistem nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Dokaz je isti kao za sistem (2.88).

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.93}$$

Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow z$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.86) može se dobiti samo sistem (2.92) koji je već analiziran.

Završili smo analiziranje sistema (2.89). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.86) može se dobiti sledeće: sistem koji je realizovan u proizvoljnoj algebri, sistem koji je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ ili sistem koji nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

(c) Dodavanjem bilo kojeg od identiteta $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{p}(y,x,x)$, $\bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x)$ sistemu (2.87) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x,x,y) \\ \bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \end{cases} \tag{2.94}$$

Sistem (2.94) je ekvivalentan sistemu (2.89) i od njega se može dobiti transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}(x, y, z)$.

(d) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x)$ sistemu (2.87) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases} \tag{2.95}$$

Sistem (2.95) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow y$. Dodavanjem jednog identiteta iz sistema (2.86) dobijamo tri različita sistema.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases} \tag{2.96}$$

Sistem (2.96) nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Dokaz je isti kao za sistem (2.88). Dodavanjem identiteta iz sistema (2.86) ne može se dobiti sistem koji je realizovan u ovoj algebri.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \end{cases} \tag{2.97}$$

Sistem (2.97) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow y$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow x$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.86) može se dobiti samo sistem (2.92) koji je već analiziran.

- Može se dobiti sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \end{cases} \tag{2.98}$$

Sistem (2.98) je realizovan u proizvoljnoj algebri pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow x$ i $\bar{q}(x, y, z) \longrightarrow y$. Dodavanjem bilo kojeg identiteta iz sistema (2.86) može se dobiti samo sistem (2.92) koji je već analiziran.

Završeno je analiziranje sistema (2.95). Ovaj sistem je realizovan u proizvoljnoj algebri, a dodavanjem identiteta iz sistema (2.86) može se dobiti sistem koji je takodje realizovan u proizvoljnoj algebri, sistem koji nije realizovan u algebri $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, ili sistem koji je već analiziran.

(e) Dodavanjem identiteta $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y)$ sistemu (2.87) dobijamo sistem:

$$\begin{cases} x \approx \bar{p}(x, x, y) \\ \bar{p}(y, x, x) \approx \bar{q}(x, y, x) \\ \bar{p}(x, y, x) \approx \bar{q}(x, x, y) \end{cases} \tag{2.99}$$

Sistem (2.99) je ekvivalentan sistemu (2.95) i može se dobiti od ovog sistema transpozicijom prve i treće promenljive terma $\bar{q}(x, y, z)$.

Ispitani su svi sistemi čiji su skupovi identiteta podskupovi skupa identiteta sistema (2.84). Pokazano je da nijedan od ovih sistema ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, čime smo dokazali tvrdjenje 2.4.15. □

Na osnovu do sada dokazanih tvrdjenja 2.4.5, 2.4.12 i 2.4.15 možemo zaključiti sledeće: ispitani su svi sistemi sa termima $\bar{p}(x, y, z)$ i $\bar{q}(x, y, z)$ i dve promenljive x i y. Dobili smo samo jedan sistem (do na ekvivalentnost, odnosno permutaciju promenljivih) koji je kandidat za karakterizaciju svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (dokazano je da implicira ovo svojstvo). U pitanju je je sistem (2.6).

Preostaje da se ispitaju sistemi sa termima $\bar{p}$ i $\bar{q}$ koji uključuju više od dve promenljive.

2.4.3 Sistemi sa više od dve promenljive

U ovom pododeljku ispitujemo sisteme sa termima $\bar{p}$ i $\bar{q}$ koji uključuju više od dve promenljive.

Pretpostavimo da postoji sistem M koji uključuje samo dva ternarna terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$, takav da karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, i da u njemu postoji jedan ili više identiteta sa više od dve promenljive. U tačkama (**1**)–(**4**) analiziramo moguće slučajeve prema broju promenljivih.

(1) Ukoliko postoji identitet sa šest (različitih) promenljivih u sistemu M, on može imati jedan od sledeća tri oblika: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, v, w)$, $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, v, w)$

ili $\bar{q}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, v, w)$. Ova tri slučaja analiziramo u nastavku, u tačkama (1a), (1b) i (1c).

(1a) Neka sistem M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, v, w)$. Neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M. Onda postoji interpretacija $\bar{p} \longrightarrow p$ terma $\bar{p}$ (i, naravno, $\bar{q} \longrightarrow q$) u jeziku $\mathcal{F}$ takva da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet: $p(x, y, z) \approx p(u, v, w)$. Ovo znači da $\mathbf{X}$ takodje zadovoljava i identitet $p(x, x, x) \approx p(u, u, u)$ koji je sintaksna posledica prethodnog (dobija se kada se promenljive y i z zamene sa x, a v i w sa u). Budući da su termi $\bar{p}$ i $\bar{q}$ idempotentni (videti odeljak 2.1 i konvenciju 2.1.1), takve su i njihove interpretacije, pa dobijamo da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $x \approx u$, odnosno $\mathbf{X}$ je trivijalna algebra. Dakle, sistem M je realizovan samo u trivijalnoj algebri (tj. samo u trivijalnom varijetetu), pa ne može karakterisati nijedno netrivijano svojstvo (pa ni kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost).

(1b) Ukoliko sistem M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, v, w)$, razmatranje je isto kao u prethodnoj tački, izuzev što se dobija da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, x, x) \approx q(u, u, u)$ (gde su p i q, redom, interpretacije terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u jeziku $\mathcal{F}$). Ovo, naravno, znači da $\mathbf{X}$ zadovoljava i $x \approx u$, tj. $\mathbf{X}$ je trivijalna algebra.

(1c) Analogno prethodnim tačkama.

(**2**) Pretpostavimo da ne postoji identitet sa šest različitih promenljivih u sistemu M, ali postoji sa pet. Postoje ďva slučaja (tj. oblika ovakvog identiteta), koji su analizirani u nastavku, u tačkama (2a) i (2b).

(2a) Identitet koji posmatramo, a koji može biti oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, je takav da su na jednoj strani promenljive x, y i z a na drugoj samo promenljive u i v (pri čemu se jedna od ovih ponavlja). Primeri ovakvih identiteta su, recimo, $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, v, u)$, $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(v, v, u)$ i slično. Pretpostavimo da sistem M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, v, u)$ (svi ostali slučajevi su analogni). Neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M pri nekoj interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$. Ovo znači da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx p(u, v, u)$. Ako u ovom identitetu zamenimo promenljive y i z promenljivom x, a promenljivu v promenljivom u dobićemo (iz idempotentnosti) da $\mathbf{X}$ zadovoljava i identitet $x \approx u$, tj $\mathbf{X}$ je trivijalna algebra. Dakle, identiteti navedenog oblika ne mogu postojati u sistemu koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

(2b) Identitet koji posmatramo ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su na jednoj strani promenljive x, y i z, a na drugoj x, u i v. Primeri ovakvih identiteta su, recimo: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, x, v)$, $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, v, x)$. Posmatrajmo drugi od ova dva primera, svi ostali slučajevi su analogni: neka sistem M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, v, x)$ i neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$ i $\bar{q} \longrightarrow q$. Tada $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx q(u, v, x)$, pa time i identitet $p(x, y, z) \approx q(x, x, x)$, koji je sintaksna posledica prethodnog. Dakle, $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx x$, što znači da term p indukuje prvu projekciju na $\mathbf{X}$. Budući da je $\mathbf{X}$ proizvoljna algebra koja realizuje sistem M, zaključujemo da $\bar{p}$ mora biti interpretiran kao jedna promenljiva (tj. kao term koji indukuje projekciju) pri svakoj realizaciji sistema. Dakle, ukoliko zamenimo term $\bar{p}$ odgovarajućom promenljivom (u ovom slučaju je to x) u sistemu M, dobićemo ekvivalentan sistem M' koji ne sadrži term $\bar{p}$. (Sistemi M i M' su ekvivalentni u smislu da je M realizovan u proizvoljnoj algebri $\mathbf{X}$ ako i samo ako isto važi za M'). Medjutim, sistem M' sadrži samo term $\bar{q}$, pa ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (ovo je dokazano u pododeljku 2.3.2). Zaključujemo da ni sistem M ne karakteriše ovo svojstvo.

(**3**) Pretpostavimo da ne postoje identiteti sa šest ili pet različitih promenljivih u sistemu M, ali postoji jedan ili više identiteta sa četiri različite promenljive. Kao i u prethodnoj tački, razmatramo moguće oblike ovakvog identiteta. Postoje četiri slučaja, koji su analizirani u nastavku, u tačkama (3a) –(3d).

(3a) Identitet koji posmatramo (koji uključuje četiri promenljive) ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa jedne strane promenljive x, y i z, a sa druge samo jedna promenljiva, u. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(u, u, u)$, $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, u, u)$ (ili, ekvivalentno, $\bar{p}(x, y, z) \approx u$ i $\bar{q}(x, y, z) \approx u$). Pretpostavimo da prvi od navedenih identiteta pripada sistemu M. Neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$ i $\bar{q} \longrightarrow q$. To znači da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx p(u, u, u) \approx u$. Dalje, ako zamenimo promenljive y i z promenljivom x u prethodnom identitetu, dobijamo identitet $x \approx u$, takodje zadovoljen u algebri $\mathbf{X}$. Dakle, $\mathbf{X}$ je trivijalna algebra. Zaključujemo da je sistem M realizovan samo u trivijalnoj algebri (varijetetu), pa ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo.

(3b) Identitet koji posmatramo (koji uključuje četiri promenljive) ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa jedne strane promenljive x, y i z, a sa druge strane promenljive x i u (jedna od ovih se ponavlja). Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(u, x, u)$, $\bar{q}(x, y, z) \approx \bar{q}(x, u, x)$. Pretpostavimo da prvi od navedenih identiteta pripada sistemu M (razmatranje je analogno za sve ostale slučajeve). Neka je $\mathbf{X}$ algebra jezika $\mathcal{F}$ koja realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$. Tada $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx q(u, x, u)$. Ako u ovom identitetu zamenimo promenljivu u promenljivom x, dobićemo identitet $p(x, y, z) \approx x$, koji je sintaksna posledica prethodnog, pa je takodje zadovoljen u algebri $\mathbf{X}$. Ovo znači da term p indukuje prvu projekciju na $\mathbf{X}$. Budući da je $\mathbf{X}$ proizvoljna algebra koja realizuje sistem M, zaključujemo da $\bar{p}$ mora biti interpretiran kao jedna promenljiva (tj. kao term koji indukuje projekciju) pri svakoj realizaciji sistema M. Dakle, ukoliko zamenimo term $\bar{p}$ odgovarajućom promenljivom (u ovom slučaju je to x) u sistemu M, dobićemo ekvivalentan sistem M' koji ne sadrži term $\bar{p}$. Medjutim, sistem koji sadrži samo term $\bar{q}$ ne može karakterisati kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (pododeljak 2.3.2).

(3c) Identitet koji posmatramo (koji uključuje četiri promenljive) ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa jedne strane promenljive x, y i z, a sa druge strane promenljive x, y i u. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{q}(y, u, x)$, $\bar{q}(x, y, z) \approx \bar{q}(x, y, u)$. Pretpostavimo da prvi od navedenih identiteta pripada sistemu M. (Ostali slučajevi su analogni.) Neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$. Tada $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx q(y, u, x)$. Ako zamenimo promenljivu u promenljivom x u prethodnom identitetu, dobijamo identitet $p(x, y, z) \approx q(y, x, x)$ koji je sintaksna posledica prethodnog, pa je kao takav takodje zadovoljen u algebri $\mathbf{X}$. Desna strana ovog identiteta je $q(y, x, x)$, što je neki binarni term $r(x, y)$ jezika $\mathcal{F}$. Dakle, dobijamo da $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x, y, z) \approx r(x, y)$, odnosno term $\bar{p}$ mora biti interpretiran kao binarni term pri ovoj realizaciji. Budući da je $\mathbf{X}$ proizvoljna algebra koja realizuje sistem, zaključujemo da ovo važi za svaku realizaciju. Prema tome, možemo zameniti term $\bar{p}(x,y,z)$ termom $\bar{r}(x,y)$ u sistemu M i tako dobiti ekvivalentan sistem M'. (U jednoj od prethodnih tačaka smo precizirali šta podrazumevamo pod *ekvivalentnim* sistemima: sistem M je realizovan u proizvoljnoj algebri $\mathbf{X}$ ako i samo ako to važi za sistem M'.) Medjutim, sistem M' sadrži samo jedan binarni i jedan ternarni term ($\bar{r}$ i $\bar{q}$ redom), pa kao takav ne karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (dokazano u pododeljku 2.3.3).

(3d) Identitet koji posmatramo (koji uključuje četiri promenljive) ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa jedne strane promenljive x i y, a sa druge strane promenljive u i v. Primeri ovakvih identiteta su $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(u,u,v)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(v,u,v)$. Pretpostavimo da sistem M sadrži prvi od navedenih identiteta (ostali slučajevi su analogni). Neka algebra $\mathbf{X}$ realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$. Tada $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x,x,y) \approx p(u,u,v)$. Ukoliko zamenimo promenljivu x promenljivom y i promenljivu u promenljivom v u ovom identitetu, dobićemo identitet $y \approx v$ koji je takodje zadovoljen u $\mathbf{X}$. Dakle, $\mathbf{X}$ je trivijalna algebra, pa je M realizovan samo u trivijalnom varijetetu, što znači da ne karakteriše nijedno netrivijalno svojstvo.

(**4**) Pretpostavimo da ne postoje identiteti sa više od tri različite promenljive u sistemu M, i da postoji jedan ili više identiteta sa tačno tri različite promenljive. Kao i u prethodnim tačkama, razmatramo moguće oblike ovakvih identiteta. Postoji pet slučajeva, koji su analizirani u nastavku, u tačkama (4a) –(4e).

(4a) Identitet koji posmatramo ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu se sa obe strane pojavljuju promenljive x, y i z. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{p}(x,z,y)$, $\bar{q}(x,y,z) \approx \bar{q}(y,x,z)$, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{p}(y,z,x)$. Sistem M, koji po pretpostavci karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, može da sadrži bilo koji od ovakvih identiteta.

(4b) Identitet koji posmatramo ima oblik $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu se sa obe strane pojavljuju promenljive x, y i z. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{q}(x,z,y)$, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{q}(y,z,x)$, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{q}(y,x,z)$. Pretpostavimo da sistem M sadrži prvi od navedenih identiteta, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{q}(x,z,y)$ (razmatranje je analogno za ostale slučajeve). Ovo znači da u celom sistemu M term $\bar{q}(x,y,z)$ možemo zameniti sa $\bar{p}(x,z,y)$, čime se dobija ekvivalentan sistem M' koji sadrži samo term $\bar{p}$. Sistem M' ne može karakterisati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (pododeljak 2.3.2), pa ga ne karakteriše ni sistem M.

(4c) Posmatrani identitet je oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$ ili $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su na jednoj strani promenljive x, y, z, a na drugoj strani su samo dve od ove tri. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{p}(x,x,y)$, $\bar{p}(x,y,z) \approx \bar{q}(x,y,y)$. Pretpostavimo da sistem M sadrži prvi od navedenih identiteta, ostali slučajevi su analogni. Neka algebra $\mathbf{X}$ jezika $\mathcal{F}$ realizuje sistem M pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$. To znači da ova algebra zadovoljava identitet $p(x,y,z) \approx p(x,x,y)$. Desna strana ovog identiteta, $p(x,x,y)$, je zapravo neki binarni term $r(x,y)$ jezika $\mathcal{F}$. Dakle, algebra $\mathbf{X}$ zadovoljava identitet $p(x,y,z) \approx r(x,y)$. Budući da je $\mathbf{X}$ proizvoljna algebra koja realizuje sistem M, zaključujemo da isto važi pri svakoj realizaciji. Dakle, u sistemu M možemo term $\bar{p}(x,y,z)$ zameniti termom $\bar{r}(x,y)$, čime dobijamo ekvivalentan sistem M'. Kako sistem M' ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (pododeljak 2.3.3), isto važi i za sistem M.

(4d) Posmatrani identitet je oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa svake strane identiteta po dve različite promenljive, a ukupan broj različitih promenljivih u identitetu je tri. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(x,z,x)$, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(z,z,x)$. Sistem M može sadržati bilo koji od ovakvih identiteta.

(4e) Posmatrani identitet je oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, pri čemu su sa svake strane identiteta po dve različite promenljive, a ukupan broj različitih promenljivih u identitetu je tri. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{q}(x,z,x)$, $\bar{p}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,z,z)$. Primetimo sledeće: sistem M po pretpostavci karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, što znači da mora biti realizovan u algebri $\mathbf{B}$ iz primera 1, što znači da se $\bar{p}$ i $\bar{q}$ moraju interpretirati kao najviše binarni termi u jeziku ove algebre. Dokazaćemo sledeću lemu:

Lema 2.4.20. *Neka je S sistem koji sadrži proizvoljan broj identiteta u kojima učestvuju dva ternarna terma $\bar{p}(x,y,z)$ i $\bar{q}(x,y,z)$ i promenljive x, y i z. Ukoliko je sistem S realizovan u algebri $\mathbf{B}$ pri interpretaciji u kojoj su $\bar{p}$ i $\bar{q}$ najviše binarni termi, onda je ovaj sistem realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.*

Dokaz. Razmatramo realizaciju u $\mathbf{B}$, odnosno sve moguće slučajeve interpretacija terma $\bar{p}(x, y, z)$ i $\bar{q}(x, y, z)$.

- Pretpostavimo da su oba terma interpretirana kao promenljive, odnosno da indukuju projekcije na algebri $\mathbf{B}$. (Na primer: $\bar{p} \longrightarrow x$, $\bar{q} \longrightarrow y$.) Na osnovu leme 2.3.1, sledi da je M trivijalan sistem, pa je kao takav realizovan u algebri $\mathbb{Z}_5^r$.
- Pretpostavimo da je term $\bar{p}$ interpretiran kao promenljiva, a $\bar{q}$ kao binarni term. Bez ograničenja opštosti možemo posmatrati interpretaciju $\bar{p} \longrightarrow x$, $\bar{q} \longrightarrow y \wedge z$ (svi ostali slučajevi razmatraju se analogno ovom). Na osnovu ovakve interpretacije, koja po pretpostavci realizuje sistem S u algebri $\mathbf{B}$, može se zaključiti sledeće o identitetima ovog sistema:

  (1) U svim identitetima oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, na prvoj poziciji sa leve i desne strane mora biti ista promenljiva (neka od x, y, z).

  (2) U svim identitetima oblika $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, na drugoj i trećoj poziciji sa leve i desne strane mora biti isti par promenljivih (do na transpoziciju), na primer: $\bar{q}(x, x, y) \approx \bar{q}(z, y, x)$, $\bar{q}(x, y, z) \approx \bar{q}(z, y, z)$, $\bar{q}(x, z, z) \approx \bar{q}(y, z, z)$.

  (3) U svim identitetima oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, ista promenljiva se nalazi na prvoj pozciji sa leve strane i na drugoj i trećoj poziciji desno. Na primer: $\bar{p}(z, x, y) \approx \bar{q}(y, z, z)$.

  Sistem S čiji identiteti zadovoljavaju tačke (1)–(3) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow x$, $\bar{q} \longrightarrow 3y + 3z$.
- Pretpostavimo da su oba terma interpretirani kao binarni termi. Bez ograničenja opštosti možemo posmatrati interpretaciju $\bar{p} \longrightarrow x \wedge y$, $\bar{q} \longrightarrow y \wedge z$ (svi ostali slučajevi razmatraju se analogno ovom). Iz pretpostavke da ova interpretacija realizuje sistem S u algebri $\mathbf{B}$, zaključujemo sledeće:

  (1) U svim identitetima oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$, na prvoj i drugoj poziciji sa leve i desne strane mora biti isti par promenljivih (do na transpoziciju), na primer: $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(y, x, x)$, $\bar{p}(z, y, z) \approx \bar{p}(z, y, x)$, $\bar{p}(x, x, z) \approx \bar{p}(x, x, y)$.

  (2) U svim identitetima oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, na prvoj i drugoj poziciji sa leve strane i na drugoj i trećoj poziciji sa desne strane mora biti isti par promenljivih (do na transpoziciju), na

primer: $\bar{p}(z,x,y) \approx \bar{q}(x,z,x)$, $\bar{p}(y,x,x) \approx \bar{q}(y,x,y)$, $\bar{p}(x,x,z) \approx \bar{q}(y,x,x)$.

(3) U svim identitetima oblika $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, na drugoj i trećoj poziciji sa leve i desne strane mora biti isti par promenljivih (do na transpoziciju), na primer: $\bar{q}(z,z,y) \approx \bar{q}(x,z,y)$, $\bar{q}(z,z,x) \approx \bar{q}(x,x,z)$, $\bar{q}(z,y,y) \approx \bar{q}(x,y,y)$.

Sistem S čiji identiteti zadovoljavaju tačke (1)–(3) je realizovan u reduktu $\mathbb{Z}_5^r$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow 3x+3y$, $\bar{q} \longrightarrow 3y+3z$.

$\square$

Na osnovu prethodne leme zaključujemo da sistem M, koji po pretpostavci karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, ne može uključivati identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, takav da su sa svake strane po dve različite promenljive, a ukupan broj različitih promenljivih u identitetu je tri.

Analizirani su svi slučajevi identiteta koji uključuju više od dve promenljive. Možemo zaključiti sledeće: ukoliko sistem M, koji sadrži samo terme $\bar{p}(x,y,z)$ i $\bar{q}(x,y,z)$ i po pretpostavci karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, uključuje jedan ili više identiteta sa više od dve različite promenljive, to mogu biti samo identiteti sa tri različite promenljive, i to sledeće dve vrste:

- Identiteti oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, u kojima se sa obe strane pojavljuju promenljive x, y i z (tačka (4a) iz prethodne analize).

- Identiteti oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$, u kojima se sa jedne strane pojavljuju promenljive x i y, a sa druge x i z (tačka (4d) iz prethodne analize).

Dalje, sistem M koji posmatramo je realizovan u algebrama $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ (primeri 2, 1 i 3 redom). Zamenimo sada promenljivu z u sistemu M redom promenljivama x i y (tj. svaki identitet koji sadrži promenljive x, y i z zamenimo parom identiteta: u prvom od ova dva identiteta svako pojavljivanje promenljive z je zamenjeno promenljivom x, a u drugom promenljivom y). Dobili smo sistem M' koji je sintaksna posledica sistema M. Sistem M' sadrži više identiteta, ali oni uključuju samo promenljive x i y. Budući da je posledica sistema M, sistem M' je takodje realizovan u algebrama $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Dokažimo sledeću lemu:

Lema 2.4.21. *Ukoliko je sistem M' realizovan u nekom netrivijalnom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom, onda je u istom reduktu realizovan i sistem M.*

Dokaz.

(1) Pretpostavimo najpre da sistem M sadrži samo jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ (ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$), u kojem se sa obe strane pojavljuju promenljive x, y i z. (Pretpostavljamo da svi ostali identiteti sistema M uključuju samo promenljive x i y.) Bez ograničenja opštosti možemo posmatrati identitet sa termom $\bar{p}$. Razmotrimo sve moguće slučajeve ovakvog identiteta:

(1a) Pretpostavimo da M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(x, z, y)$. Ako zamenimo promenljivu z redom promenljivama x i y dobićemo sledeća dva identiteta (novog sistema M'): $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y)$, $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, y, y)$. Dakle, sistem M' sadrži ova dva identiteta umesto polaznog, a svi ostali identiteti su isti kao u sistemu M. Drugi identitet, $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(x, y, y)$, je trivijalan (tj. zadovoljen u proizvoljnoj algebri), pa se kao takav može eliminisati. Prvi identitet, $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y)$, realizovan je u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \beta y + \beta z$, gde $\alpha + 2\beta = 1$. Primetimo da je identitet $p(x, y, z) \approx p(x, z, y)$ takodje zadovoljen u posmatranom reduktu pri istoj interpretaciji. Dakle, ako je sistem M' realizovan u nekom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom (tj. postoji interpretacija terma $\bar{q}$ u jeziku ovog redukta, koja zajedno sa interpretacijom $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \beta y + \beta z$, $\alpha + 2\beta = 1$, realizuje sistem M'), to znači da je takodje i sistem M realizovan u istom reduktu pri istoj interpretaciji.

(1b) Pretpostavimo da M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(y, x, z)$. Sistem M', umesto ovog, sadrži sledeća dva identiteta: $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(y, x, y)$ i $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(y, x, x)$ (svi ostali identiteti sistema M' su isti kao u sistemu M). Sledeća interpretacija terma $\bar{p}$ realizuje ova dva identiteta u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom: $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \alpha y + \beta z$, gde $2\alpha + \beta = 1$. Ostatak razmatranja je isti kao u prethodnoj tački.

(1c) Pretpostavimo da M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(z, y, x)$. To znači da M' sadrži sledeća dva identiteta: $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, y, x)$ i $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(y, y, x)$. Prvi od ova dva identiteta je trivijalan, a drugi je realizovan u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom pri interpretaciji: $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \beta y + \alpha z$, gde $2\alpha + \beta = 1$. Ostatak razmatranja je isti kao u prethodnim tačkama.

(1d) Pretpostavimo da M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(y, z, x)$. To znači da M' sadrži sledeća dva identiteta: $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(y, x, x)$ i $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(y, y, x)$. Ova dva identiteta su realizovana u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom pri interpretaciji: $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \alpha y + \alpha z$, gde $3\alpha = 1$. Ostatak razmatranja je isti kao u prethodnim tačkama.

(1e) Pretpostavimo da M sadrži identitet $\bar{p}(x, y, z) \approx \bar{p}(z, x, y)$. To znači da M' sadrži sledeća dva identiteta: $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, y)$ i $\bar{p}(x, y, y) \approx \bar{p}(y, x, y)$. Ova dva identiteta su realizovana u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom pri interpretaciji: $\bar{p} \longrightarrow \alpha x + \alpha y + \alpha z$, gde $3\alpha = 1$. Ostatak razmatranja je isti kao u prethodnim tačkama.

(2) Pretpostavimo sada da sistem M sadrži samo jedan identitet oblika $\bar{p}(\dots) \approx \bar{p}(\dots)$ (ili $\bar{q}(\dots) \approx \bar{q}(\dots)$), u kojem se sa jedne strane pojavljuju promenljive x i y, a sa druge x i z. (Pretpostavljamo da svi ostali identiteti sistema M uključuju samo promenljive x i y.) Bez ograničenja opštosti možemo posmatrati identitet sa termom $\bar{p}$. Razmatramo dva moguća slučaja ovakvog identiteta:

(2a) U posmatranom identitetu promenljiva x se pojavljuje (bar jednom) na istoj poziciji sa leve i desne strane. Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(z, z, x)$, $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, z, x)$, itd. Posmatraćemo prvi od navedenih identiteta (razmatranje ostalih je analogno): zamenom promenljive z redom promenljivama x i y dobijamo identitete $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(x, x, x)$ i $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(y, y, x)$. Ova dva identiteta su realizovana u punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom pri interpretaciji $\bar{p}(x, y, z) \longrightarrow z$ (i samo pri ovoj interpretaciji). Identitet $\bar{p}(x, y, x) \approx \bar{p}(z, z, x)$ je takodje zadovoljen pri ovoj interpretaciji. Važi isto kao i do sada: ukoliko postoji interpretacija terma $\bar{q}$ u jeziku posmatranog redukta, takva da, zajedno sa datom interpretacijom terma $\bar{p}$, realizuje sistem M', onda ista interpretacija realizuje i sistem M u ovom reduktu.

(2b) U posmatranom identitetu promenljiva x nije na istim pozicijama sa leve i desne strane (tj. ni na jednoj od tri pozicije se ne pojavljuje promenljiva x sa obe strane). Primeri ovakvih identiteta su: $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(z,x,z)$, $\bar{p}(x,y,y) \approx \bar{p}(z,z,x)$, itd. Posmatrajmo prvi od navedenih identiteta (za ostale je razmatranje analogno): zamenom promenljive z redom promenljivama x i y dobijamo identitete $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,x)$ i $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,y)$. Dakle, sistem M' sadrži ova dva identiteta umesto identiteta $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(z,x,z)$, a svi ostali identiteti su isti kao u sistemu M. Sistem M' nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom, jer ne postoji interpretacija koja realizuje par navedenih identiteta. Naime, iz prvog identiteta, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(x,x,x)$, zaključujemo da term–operacija indukovana termom $\bar{p}$ (u reduktu) ne zavisi od druge promenljive, odnosno, term $\bar{p}$ mora biti interpretiran ovako: $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow \alpha x + \beta z$, gde je $\alpha + \beta = 1$. Medjutim, drugi identitet, $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(y,x,y)$, nije zadovoljen pri ovakvoj interpretaciji. Dakle, $M1$ nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom. Medjutim, isto važi i za sistem M, jer identitet $\bar{p}(x,y,x) \approx \bar{p}(z,x,z)$ onemogućava realizaciju sistema M u ovim reduktima: ako je term $\bar{p}(x,y,z)$ interpretiran kao $\alpha x + \beta y + \gamma z$, gde je $\alpha + \beta + \gamma = 1$, iz navedenog identiteta dobijamo $\alpha + \gamma = \beta$ (koeficijenti uz x levo i desno), $\alpha + \gamma = 0$ (koeficijenti uz z levo i desno) i $\alpha + \gamma = 1$ (koeficijenti uz x kada zamenimo z sa x), odnosno dobijamo $0 = 1$.

Na osnovu prethodne analize možemo zaključiti sledeće: svaka interpretacija koja realizuje dva identiteta koji se dobijaju od polaznog identiteta sa tri promenljive zamenom promenljive z redom promenljivama x i y, takodje realizuje i polazni identitet (u posmatranom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom).

Dakle, ukoliko polazni sistem M sadrži više identiteta sa tri promenljive, sistem M' će sadržati odgovarajući par identiteta (samo sa promenljivama x i y) za svaki od njih. Sistem M' je realizovan u nekom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom samo ako postoji jedinstvena interpretacija koja realizuje sve ove dobijene parove identiteta, kao i ostale identitete sistema M' (koji su isti kao u sistemu M). Ova interpretacija takodje realizuje i sistem M. $\square$

Setimo se da sistem M karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, pa je realizovan u algebrama $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, i nije realizovan ni u jednom (netrivijalnom) punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom (videti tvrdjenje 2.2.5 i činjenicu 2.2.6).

Sistem M' je sintaksna posledica sistema M, pa je, kao takav, realizovan u istim algebrama (pri istim interpretacijama). Na osnovu prethodne leme sledi da nije realizovan ni u jednom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom. Dakle, u pitanju je sistem koji sadrži samo promenljive x i y i zadovoljava navedena dva uslova.

Kao rezultat analize izložene u ovom poglavlju dobili smo da postoji tačno jedan *minimalan* sistem (do na permutaciju promenljvih) sa promenljivama x i y koji zadovoljava navedene uslove, i to je sistem (2.6):

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x). \end{cases} \tag{SM 1}$$

Napomena: zbog jednostavnosti, sistem (2.6) označili smo sa (SM 1), i u daljem tekstu disertacije koristimo ovu oznaku.

Prema prethodnom, sistem M' je ili jednak sistemu (SM 1) (tj. sistemu (2.6)), ili sadrži sve identitete sistema (SM 1) i još neke. U oba slučaja, sistem M sa tri promenljive ima kao sintaksnu posledicu dobijeni sistem M', pa samim tim i sistem (SM 1). Dakle, sistem M je, ukoliko postoji, jači uslov od pronadjenog sistema (SM 1). U ovoj tački možemo zaključiti da je sistem (SM 1) kandidat za sintaksno najslabiju karakterizaciju svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti jakim Maljcevljevim uslovom (pokazano je da (SM 1) implicira ovo svojstvo). [9]

Analizom koju smo izložili u ovom poglavlju dokazana je sledeća teorema:

Teorema 2.4.22. *Ukoliko postoji jak Maljcevljev uslov M sa dva ternarna terma $\bar{p}(x,y,z)$ i $\bar{q}(x,y,z)$, takav da karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta, važi sledeće:*

1. *Sistem (SM 1) takodje karakteriše ovo svojstvo.*
2. *Sistem (SM 1) je sintaksna posledica uslova M.*
3. *Sistem (SM 1) je naslabiji od svih jakih Maljcevljevih uslova koji karakterišu ovo svojstvo.*

[9] Sintaksna jačina Maljcevljevih uslova precizirana je relacijom preduredjenja; videti odeljak **1.4**.

Poglavlje 3

Algebre polimorfizama

Sistem (SM 1) izolovan u prethodnom poglavlju je kandidat za naslabiju karakterizaciju svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima. Dokazali smo da je realizacija sistema (SM 1) dovoljan uslov (tj. implicira ovo svojstvo), ali još uvek nije dokazano da je i potreban.

U ovom poglavlju opisujemo narednu etapu istraživanja: ispitivanje realizacije sistema (SM 1) na velikom broju konačnih algebri koje generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete.

Računarskom pretragom analizirali smo sve *algebre polimorfizama* digrafa veličine najviše pet čvorova. Konstatovano je da na ovim algebrama, odnosno varijetetima koje one generišu, sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Drugim rečima, algebra polimorfizama proizvoljnog digrafa veličine najviše pet čvorova generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet ako i samo ako realizuje sistem (SM 1).

Računarska pretraga, tj. analiza pomenutih algebri koju opisujemo u ovom poglavlju jednim delom se oslanja na rezultate koje su dobili L. Barto i D.Stanovsky ([11]).

3.1 Algebre polimorfizama malih digrafa

Digraf je uredjeni par $\mathbb{G} = (V, E)$, gde je G konačan skup čvorova, a $E \subseteq V \times V$ je skup grana (ili ivica). Polimorfizam (n–arni) digrafa $\mathbb{G} = (V, E)$ je preslikavanje $f : V^n \to V$ koje je kompatibilno sa relacijom E, tj. za bilo kojih n grana ovog digrafa, (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$,$(a_n, b_n) \in E$, par $(f(a_1, \ldots a_n), f(b_1, \ldots b_n))$ je takodje grana (pripada E). Algebra polimorfizama datog digrafa $\mathbb{G} = (V, E)$ je algebra sa univerzumom V čije bazne operacije su svi polimorfizmi ovog digrafa. Budući da je kompozicija polimorfizama takodje polimorfizam, sve term–operacije ove algebre su takodje polimorfizmi datog digrafa, što znači da su skupovi baznih i term–operacija jednaki.

Konvencija 3.1.1. *Digraf* $\mathbb{G} = (V, E)$ *realizuje Maljcevljev uslov* M *ukoliko algebra polimorfizama ovog digrafa realizuje uslov* M*.*

Već smo rekli da je u ovoj etapi istraživanja potrebno ispitati realizaciju sistema (SM 1) na što većem broju konačnih algebri koje generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete. Algebre polimorfizama malih digrafa se nameću kao prirodan izbor iz više razloga:

- Digrafi su jednostavne strukture, pa omogućavaju relativno lako ispitivanje egzistencije polimorfizama malih arnosti (računarskom pretragom).

- Digrafi su takodje i mnogobrojne strukture, što znači da ispitivanje realizacije sistema (SM 1) na algebrama polimorfizama ima smisla, odnosno pruža nam sliku ponašanja velikog broja algebri sa $\wedge$–poludistributivnim mrežama kongruencija u odnosu na dati sistem.

- Digrafi su dovoljno opšte strukture za proučavanje Maljcevljevih uslova: postoji veza izmedju realizacije Maljcevljevih uslova na digrafima i na konačnim relacionim strukturama (tj. na odgovarajućim algebrama polimorfizama). Da bismo podrobnije objasnili ovu vezu neophodno je definisati *Problem zadovoljenja uslova.*

Problem zadovoljenja uslova (Constraint Satisfaction Problem, CSP) može se definisati na više načina. Navodimo definiciju preko homomorfizma za fiksiranu relacionu strukturu $\mathbb{A}$. U poglavlju **4** predstavljena je definicija Problema preko vrednosti promenljivih.

Jezik ili *signatura* relacionih struktura je skup $\mathcal{R}$ *relacijskih simbola*, takav da je svakom članu r skupa $\mathcal{R}$ pridružen pozitivan ceo broj n. Ovaj ceo broj nazivamo *arnost* od r, i kažemo da je r n–arni relacijski simbol. Konačna relaciona struktura jezika $\mathcal{R}$ je uredjeni par $\mathbb{A} = (A, R^{\mathbb{A}})$, gde je A neprazan konačan skup, a $R^{\mathbb{A}}$ je familija relacija na A, takva da svakom n–arnom relacijskom simbolu r iz $\mathcal{R}$ odgovara n–arna relacija $r^{\mathbb{A}} \in R^{\mathbb{A}}$, $r^{\mathbb{A}} \subseteq A^n$. Ako su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ dve konačne relacione strukture jezika $\mathcal{R}$, homomorfizam iz $\mathbb{A}$ u $\mathbb{B}$ je preslikavanje $h : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ koje je kompatibilno sa relacijama, odnosno za n–arni relacijski simbol $r \in \mathcal{R}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ važi $r^{\mathbb{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Rightarrow r^{\mathbb{B}}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$.

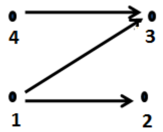
Definicija 3.1.2. *Za fiksiranu konačnu relacionu strukturu $\mathbb{A}$, Problem zadovoljenja uslova nad $\mathbb{A}$, ili skraćeno $CSP(\mathbb{A})$, može se formulisati kao sledeći problem odlučivanja: ako je $\mathbb{X}$ ulazna konačna relaciona struktura istog jezika kao $\mathbb{A}$, da li postoji homomorfizam $\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{A}$?*

Računska složenost Problema zadovoljenja uslova je polje vrlo aktivnog istraživanja poslednjih godina. Najvažnije otvoreno pitanje je Hipoteza dihotomije (T.Feder i M. Vardi, [25]), koja tvrdi da je za proizvoljnu konačnu relacionu strukturu $\mathbb{A}$, problem $CSP(\mathbb{A})$ ili rešiv u polinomnom vremenu ili NP–kompletan.

Veliki napredak u istraživanju kompleksnosti Problema zadovoljenja uslova omogućili su radovi [31], [15], [16] u kojima je pokazano da kompleksnost problema $CSP(\mathbb{A})$ zavisi samo od polimorfizama relacione strukture $\mathbb{A}$. Specijalno, ako su svi unarni polimorfizmi strukture $\mathbb{A}$ bijekcije, složenost problema $CSP(\mathbb{A})$ zavisi samo od idempotentnih Maljcevljevih uslova koji su zadovoljeni u $\mathbb{A}$. Ovi rezultati, dakle, postavljaju polimorfizme konačnih relacionih struktura i Maljcevljeve uslove na ovim strukturama u fokus daljeg istraživanja. U tom kontekstu, od velikog je značaja proučavanje digrafa – naime, u [25] je pokazano da za svaku konačnu relacionu strukturu $\mathbb{A}$ postoji digraf $\mathbb{G}$ takav da su $CSP(\mathbb{A})$ i $CSP(\mathbb{G})$ svodljivi jedan na drugi, u oba smera, u polinomnom vremenu (*P–svodljivi* jedan na drugi).

Na kraju, navodimo teoremu koja precizira vezu izmedju realizacije Maljcevljevih uslova na digrafima i relacionim strukturama uopšte.

Cikcak je četvoroelementni digraf $\mathbb{C} = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (4, 3)\})$, odnosno sledeći digraf:



Teorema 3.1.3. *(Bulin, Delić, Jackson, Niven [18])*

Za svaku konačnu relacionu strukturu $\mathbb{A}$ postoji digraf $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}$ takav da:

1. *$CSP(\mathbb{A})$ je L–svodljiv*[1] *na $CSP(\mathbb{D}_{\mathbb{A}})$, a $CSP(\mathbb{D}_{\mathbb{A}})$ je P–svodljiv na $CSP(\mathbb{A})$.*

[1]L–svodljiv stoji za "Logspace reducible"; ovo znači da je količina memorije potrebna za svodjenje jednog problema na drugi logaritam veličine ulaznih podataka. U pitanju je zapravo memorijski zahtev, odnosno veza, ali odgovarajuća vremenska složenost je bolja od polinomne ili polinomna u najgorem slučaju.

2. Relaciona struktura $\mathbb{A}$ je primitivno pozitivno definabilna iz $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}$, pa prema tome za sve Maljcevljeve uslove M važi: ukoliko $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}$ realizuje uslov M, onda i $\mathbb{A}$ realizuje isti uslov, odnosno

$$\mathbb{D}_{\mathbb{A}} \vDash M \Rightarrow \mathbb{A} \vDash M$$

3. Ako je M linearan, idempotentan Maljcevljev uslov u kojem je svaki od identiteta ili balansiran[2] *ili ima najviše dve promenljive, i digraf koji smo nazvali Cikcak realizuje uslov M, Cikcak $\vDash M$, onda važi:*

$$\mathbb{A} \vDash M \Rightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{A}} \vDash M$$

3.2 Dvoelementni i troelementni digrafi

Na osnovu rezultata koji su izloženi u [11], postoji 10 neizomorfnih digrafa sa dva čvora i svaki od njih ima ternarni nu–polimorfizam (nu3–polimorfizam)[3]. Dakle, odgovarajuće algebre polimorfizama su konačne algebre koje imaju majority term–operaciju, pa kao takve generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete i takodje realizuju sistem (SM 1). (Ovo je dokazano u primeru 2 za algebru $\mathbf{A}$, ali lako se vidi da važi u opštem slučaju, tj. za bilo koju konačnu algebru koja ima majority term–operaciju.)
Prema tome, sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u varijetetu generisanom algebrom polimorfizama bilo kojeg dvoelementnog digrafa[4].

Pre nego što započnemo analiziranje troelementnih digrafa, definišimo tzv. *2–polumrežnu operaciju*: term $f(x, y)$ indukuje 2–polumrežnu operaciju (2–semilattice ili 2–sml) na algebri $\mathbf{X}$ (istog jezika) ako i samo ako važi sledeće:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\models f(x,x) \approx x, \\ \mathbf{X} &\models f(x,y) \approx f(y,x), \\ \mathbf{X} &\models f(f(x,y),x) \approx f(x,y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

[2] Identitet je *balansiran* ukoliko su na levoj i desnoj strani isti skupovi promenljivih.

[3] Ternarni nu–term (polimorfizam) je isto što i majority–term (polimorfizam). Videti definiciju 1.4.5.

[4] Setimo se da je dokazano da (SM 1) implicira ovo svojstvo u proizvoljnoj konačnoj algebri. Dokaz je na strani 46, a sistem (SM 1) je označen sa (2.6).

Tvrdjenje 3.2.1. *Konačna algebra koja ima 2–polumrežnu term–operaciju generiše kongruencijski* $\wedge$*–poludistributivan varijetet. Ova algebra, takodje, realizuje sistem (SM 1).*

Dokaz. Neka je $\mathbf{X}$ konačna algebra jezika $\mathcal{F}$ i neka term $f(x,y)$ ovog jezika indukuje 2–polumrežnu term–operaciju na ovoj algebri. To znači da algebra $\mathbf{X}$ zadovoljava identitete koje smo naveli u (3.1). Dalje, neka su v i w termi jezika $\mathcal{F}$ definisani ovako:

$$v(x,y,z) = f(f(x,y),z),$$
$$w(x,y,z,u) = f(f(f(x,y),z),u).$$

Lako je proveriti da algebra $\mathbf{X}$ zadovoljava sledeće identitete:

$$v(x,x,x) \approx x,$$
$$v(x,x,y) \approx v(x,y,x) \approx v(y,x,x),$$
$$w(x,x,x,x) \approx x,$$
$$w(x,x,x,y) \approx w(x,x,y,x) \approx w(x,y,x,x) \approx w(y,x,x,x).$$

Ovo znači da su termi v i w, redom, 3–wnu i 4–wnu term za algebru $\mathbf{X}$[5]. Pored toga, algebra $\mathbf{X}$ zadovoljava i sledeće (takodje se utvrdjuje jednostavnom proverom):

$$v(x,x,y) \approx w(x,x,x,y) \approx f(x,y).$$

Zaključujemo da su zadovoljeni uslovi teoreme 1.4.7, što znači da algebra $\mathbf{X}$ generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet.

Algebra $\mathbf{X}$ realizuje sistem (SM 1) pri interpretaciji $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow f(f(x,y),z)$, $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow f(f(x,y),z)$. ☐

Primetimo da, ukoliko digraf (proizvoljne veličine) ima 3–wnu i 4–wnu polimorfizme, v i w redom, takve da važi $v(x,x,y) \approx w(x,x,x,y)$, onda odgovarajuća algebra polimorfizama zadovoljava uslove teoreme 1.4.7, što znači da generiše varijetet sa $\wedge$–poludistributivnim mrežama kongruencija. Za ova dva polimorfizma kažemo da definišu istu binarnu operaciju (ovo je operacija indukovana binarnim termom $x \circ y := v(x,x,y)$, odnosno $x \circ y := w(x,x,x,y)$).

Iz rezultata koji su izloženi u [11] može se zaključiti sledeće o troelementnim digrafima: ukoliko imaju 3–wnu i 4–wnu polimorfizme koji definišu istu binarnu operaciju, onda imaju majority–polimorfizam ili 2–sml polimorfizam (ili oba). Dakle,

[5]Navedeni identiteti predstavljaju definiciju wnu–terma neke algebre; videti definiciju 1.4.5.

za algebre polimorfizama troelementnih digrafa važi sledeće: ukoliko generišu varijetet sa $\wedge$–poludistributivnim mrežama kongruencija, onda takodje imaju i majority term–operaciju ili 2–polumrežnu term–operaciju (ili obe), pa prema tome realizuju sistem (SM 1).
Zaključujemo da sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u varijetetu generisanom algebrom polimorfizama proizvoljnog troelementnog digrafa.

3.3 Četvoroelementni digrafi

Iz [11] se o polimorfizmima četvoroelementnih digrafa može zaključiti sledeće:

- Ukoliko digraf ima majority–polimorfizam ili 2–sml polimorfizam, onda ima 3–wnu i 4–wnu polimorfizme v i w koji definišu istu binarnu operaciju (odnosno algebra polimorfizama zadovoljava uslove teoreme 1.4.7, pa generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet).
- Digraf ima 2–sml polimorfizam ako i samo ako ima 2–wnu polimorfizam[6].
- Ukoliko isključimo digrafe koji imaju majority–polimorfizam, kao i one koji imaju 2–wnu polimorfizam, za preostale digrafe važi sledeće: ovi digrafi imaju 3–wnu i 4–wnu polimorfizme koji definišu istu binarnu operaciju (tj. algebra polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet) ako i samo ako imaju 3–wnu polimorfizam. Drugim rečima, na ovim digrafima dovoljno je proveriti egzistenciju 3–wnu polimorfizma da bismo znali da li odgovarajuća algebra polimorfizama generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. (Nakon toga, na algebrama polimorfizama koje zadovoljavaju ovaj uslov možemo testirati realizaciju sistema (SM 1).)
- Postoji 29 digrafa koji nemaju majority niti 2–wnu polimorfizam, a imaju 3–wnu polimorfizam, tj. 29 algebri polimorfizama na kojima treba ispitati realizaciju sistema (SM 1).

U postupku koji opisujemo u nastavku ovog poglavlja najpre smo izolovali pomenutih 29 digrafa, a zatim testirali realizaciju sistema (SM 1) na odgovarajućim algebrama polimorfizama. Dobili smo da sve ove algebre realizuju sistem, pa se može zaključiti da sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti

[6] 2–wnu polimorfizam je binarna idempotentna komutativna operacija; videti definiciju 1.4.5.

u varijetetu generisanom algebrom polimorfizama proizvoljnog četvoroelementnog digrafa.

3.3.1 Procedura

Ispitivanje četvoroelementnih digrafa je uradjeno kroz niz koraka (čitav C–kod je izložen u [35]):

1. Najpre generišemo sve digrafe veličine četiri.
2. Zatim pronadjemo sve neizomorfne medju njima.
3. Definišemo matricu podalgebri za algebre polimorfizama neizomorfnih digrafa (ova matrica nije neophodna, ali olakšava provere).
4. Identifikujemo digrafe koji imaju majority–polimorfizam i isključujemo ih iz daljeg ispitivanja (njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete, ali znamo da realizuju sistem (SM 1), kao što je već objašnjeno ranije).
5. Identifikujemo digrafe koji imaju wnu2–polimorfizam (tj. binarnu idempotentnu komutativnu operaciju) i njih takodje isključimo iz istog razloga kao u prethodnoj tački.
6. Medju preostalim digrafima tražimo one koji imaju wnu3–polimorfizam. Dobijamo 29 digrafa. Njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete, ali ne znamo da li realizuju sistem (SM 1).
7. U poslednjem koraku testiramo realizaciju sistema (SM 1) na pomenutim algebrama. Pokazuje se da sve one realizuju ovaj sistem.

U nastavku izlažemo malo podrobniji opis svakog od prethodnih koraka (detaljno objašnjenje je dato sa izvornim kodom u [35], uz veliki broj komentara u okviru koda).

1. Generisanje četvoroelementnih digrafa:

Četvoroelementnih digrafa ima ukupno $2^{16} = 65536$. Smatramo da su čvorovi svakog od ovih digrafa označeni sa 0, 1, 2 i 3. Svaki digraf smo predstavili pomoću niza od 16 elemenata tipa karakter. Svaki član niza odgovara jednoj grani posmatranog digrafa, pri čemu ima vrednost '1' ako grana postoji, odnosno '0' ako ne postoji. Pretpostavljeni redosled grana u ovom nizu je sledeći: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $\ldots$, $(3,2)$, $(3,3)$. Generisanje svih četvoroelementnih digrafa (tj. popunjavanje svih 65536 nizova karakterima '0' i '1') uradjeno je na sledeći način:

- Polazimo od niza koji sadrži 16 karaktera '0'. Ovaj niz predstavlja digraf koji nema nijednu granu, pa uzimamo da je on prvi po redu.
- Ovaj niz karaktera konvertujemo u binarni broj (u slučaju prvog niza ovaj broj se sastoji od 16 cifara 0).
- Dobijeni binarni broj uvećavamo za 1. Dobijamo broj koji odgovara sledećem nizu (digrafu).
- Konvertujemo ovaj binarni broj u string (tj. niz karaktera '0' i '1') i dodeljujemo ga nizu koji predstavlja sledeći digraf.
- Postupak se ponavlja na isti način i završava se kada se izgeneriše poslednji digraf, odnosno niz koji sadrži 16 karaktera '1'.

Već je rečeno da imamo 65536 nizova duzine 16 (i tipa karakter). Ovi nizovi nisu memorisani u formi matrice, već kao niz struktura od 65536 elemenata. Niz struktura, za razliku od matrice, omogućava da se svakom digrafu (tj. nizu od 16 karaktera) pridruži izvestan broj promenljivih (proizvoljnih tipova) koje bi ukazivale na svojstva posmatranog digrafa. Ovde smo svakom digrafu pridružili nekoliko karakterskih promenljivih, koje se koriste kao tzv. „flegovi", odnosno čije vrednosti mogu biti samo '0' ili '1'. Namena ovih promenljivih je da čuvaju informacije o tome da li je posmatrani digraf izomorfna kopija (nekog digrafa koji mu prethodi u ovom nizu digrafa, tj. struktura), kao i koje polimorfizme ima. Inicijalno su svi flegovi postavljeni na '0', a kada se konstatuje da je digraf izomorfna kopija ili da ima neki od polimorfizama koje ispitujemo, odgovarajući fleg se podigne na '1'.

2. Identifikacija neizomorfnih digrafa:

   Za identifikaciju neizomorfnih digrafa koristili smo sledeću proceduru:

- Pronalazimo prvi po redu digraf iz niza svih digrafa (odnosno prvi po redu element niza struktura koji smo opisali) koji ima nulu, '0', kao vrednost flega za izomorfizam (tj. nije izomorfna kopija bilo kojeg od digrafa koji mu prethode u nizu).
- Prolazimo kroz ostatak niza (tj. kroz digrafe sa većim indeksima od posmatranog digrafa) i za svaki od njih koji ima isti broj grana kao posmatrani digraf ispitujemo da li je izomorfan sa ovim digrafom.
- Svaki put kada pronadjemo izomorfnu kopiju posmatranog digrafa, postavimo njen fleg za izomorfizam na '1' (signalizacija kopije).
- Kada identifikujemo sve kopije ovog fiksiranog digrafa, nastavljamo dalje kroz niz do prvog sledećeg digrafa koji ima '0' na flegu za izomorfizam (nije kopija prethodnih) i ponavljamo isti postupak za ovaj digraf.

Procedura koju smo opisali je zapravo malo modifikovan metod *brutalne sile*. (Metod brutalne sile u pravom smislu podrazumevao bi da testiramo da li su svaka dva digrafa medjusobno izomorfna.) Modifikacija se sastoji u tome da ovde ispitujemo da li su izomorfni samo digrafi sa istim brojem grana. Budući da broj digrafa sa četiri čvora nije isuviše veliki, ovaj metod radi dovoljno brzo. Identifikovano je 3044 četvoroelementnih digrafa koji su medjusobno neizomorfni. Svi ostali digrafi su izomorfne kopije ovih.

3. Identifikacija podalgebri:

   Identifikacija podalgebri nije neophodna, ali ubrzava ovu vrstu ispitivanja, tj. testiranje da li fiksirani digraf ima odredjeni polimorfizam. Naime, ukoliko operacija nije zatvorena na nekoj podalgebri algebre polimorfizama posmatranog digrafa, ona svakako nije polimorfizam.

   Algebra polimorfizama četvoroelementnog digrafa može imati najviše $2^4 - 1 = 15$ podalgebri. Četvoroelementne podalgebre ne razmatramo - to su, zapravo, cele algebre, pa nema smisla posmatrati ih kao podalgebre. Jednoelementne podalgebre isključujemo iz razmatranja jer nam nisu od pomoći, budući da su svi polimorfizmi koje ispitujemo idempotentni. Preostaje najviše 10 dvoelementnih i troelementnih podalgebri za svaki digraf, pa smo formirali matricu tipa karakter sa deset kolona i 3044 vrste koja čuva informacije o podalgebrama za svaki od neizomorfnih digrafa. Svi elementi matrice su inicijalno postavljeni na '0'. Pretpostavljeni redosled podalgebri u svakoj vrsti (tj. za svaki digraf) je sledeći: $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\ldots$, $\{1,2,3\}$. Element matrice ima vrednost '0' ukoliko odgovarajući skup nije podalgebra (posmatranog digrafa, odnosno algebre polimorfizama), i vrednost '1' ako jeste. Podalgebre smo identifikovali pomoću funkcije koja radi ukupno četiri provere za svaki od skupova navedenih iznad, tj. za svaku potencijalnu podalgebru (svakog digrafa). Ovo znači da nismo proveravali sve dovoljne uslove za podalgebre, pa samim tim nismo ni pronalazili sve podalgebre, ali pristup koji smo primenili značajno ubrzava čitav postupak. Opisaćemo pomenute četiri provere na primeru skupa $\{0, 2\}$ (pretpostavljamo da smo fiksirali neki digraf i proveravamo da li je $\{0, 2\}$ podalgebra odgovarajuće algebre polimorfizama):

- Najpre proveravamo da li postoji čvor $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ u ovom digrafu takav da su $(0, p)$ i $(2, p)$ jedine grane koje „ulaze" u čvor p. Ako je ovo slučaj, $\{0, 2\}$ je podalgebra algebre polimorfizama datog digrafa, pa ćemo postaviti odgovarajući element matrice na '1' i preskočiti sve preostale provere za skup $\{0, 2\}$.
- Ukoliko u prvoj proveri nismo dobili da imamo podalgebru $\{0, 2\}$, proveravamo naredni uslov: da li postoji čvor $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ u ovom digrafu takav da su $(p, 0)$ i $(p, 2)$ jedine grane koje „izlaze" iz čvora p. Ako je ovo slučaj, to ponovo znači da je $\{0, 2\}$ podalgebra (al. pol.), pa se odgovarajući element matrice postavlja na '1' i preostale dve provere za skup $\{0, 2\}$ se preskaču.
- Treći uslov koji se proverava za dati skup je sledeći: da li su 0 i 2 jedini čvorovi ovog digrafa do kojih vode usmerene grane (od bilo kojih čvorova). Ako je uslov ispunjen, $\{0, 2\}$ je podalgebra (al. pol.). Postavljamo odgovarajući element matrice na '1' i preskačemo poslednju proveru.
- Četvrti uslov: da li su 0 i 2 jedina dva čvora ovog digrafa takva da iz njih kreću usmerene grane (do bilo kojih čvorova). Ako je uslov ispunjen, $\{0, 2\}$ je podalgebra (al. pol.), pa postavljamo odgovarajući element matrice na '1'. Ukoliko uslov nije ispunjen, smatramo da $\{0, 2\}$ nije podalgebra (kao što je rečeno, ne vršimo sve provere za podalgebre) i odgovarajući element matrice se ne menja (ostaje '0').

4. Identifikacija digrafa koji imaju majority–polimorfizam:

   Izdvajanje digrafa koji imaju majority–polimorfizam uradjeno je pomoću para rekurzivnih funkcija koje rade dodeljivanje vrednosti sa vraćanjem unazad (*backtracking*) na 24–elementnom nizu.

Naime, majority–polimorfizam je ternarni polimorfizam m datog digrafa za koji važi sledeće: $m(a,a,b) = m(a,b,a) = m(b,a,a) = a$, za sve $a,b \in \{0,1,2,3\}$. Ovo znači da su vrednosti ovog polimorfizma poznate (fiksirane) uvek kada su bar dva argumenta jednaka, pa je njegove vrednosti potrebno definisati samo u slučajevima kada su sva tri argumenta različita, tj. za tačno 24 uredjene trojke argumenata.

Formirali smo niz, ponovo strukturnog tipa, u kojem svaki od elemenata sadrži trojku različitih argumenata za majority–polimorfizam i promenljivu karakterskog tipa koja sadrži vrednost koja je trenutno dodeljena majority–polimorfizmu na posmatranoj trojki argumenata. Redosled elemenata niza je sledeći: "012" (i vrednost polimorfizma za ovu trojku argumenata), "013" (i vrednost u ovoj trojki), ..., "321" (i vrednost). Inicijalno su sve vrednosti postavljene na 'a', što, naravno, nije dozvoljena vrednost polimorfizma. Funkcije koje postavljaju vrednosti majority–polimorfizma rade sledeće:

- Prva funkcija, nazvana f_m, dodeljuje prvu po redu vrednost (to jest 0) kao vrednost majority–polimorfizma za trojku argumenata na kojoj se trenutno nalazimo (tj. za koju treba dodeliti vrednost polimorfizmu).
- Ista funkcija zatim poziva funkciju za proveru (ovu funkciju smo nazvali *check*) koja testira da li je dodeljena vrednost polimorfizma, zajedno sa svim prethodno dodeljenim vrednostima ovog polimorfizma (tj. ovog niza) parcijalna operacija kompatibilna sa relacijom digrafa.
- Ukoliko funkcija *check* vrati potvrdan odgovor, vrednost koja je dodeljena polimorfizmu na aktuelnoj trojki argumenata je dozvoljena, pa se funkcija f_m pomera na prvi sledeći element niza, tj. na prvu sledeću trojku argumenata za majority–polimorfizam. Sada treba postaviti vrednost polimorfizma na ovoj trojki argumenata, i funkcija f_m rekurzivno poziva samu sebe.
- Ukoliko funkcija *check* vrati odričan odgovor, vrednost koja je trenutno dodeljena polimorfizmu na aktuelnoj trojki argumenata zajedno sa prethodno dodeljenim vrednostima nije kompatibilna sa relacijom digrafa. U ovom slučaju funkcija f_m dodeljuje prvu veću vrednost (tj. 1, ukoliko je prethodna vrednost bila 0, 2, ukoliko je prethodna vrednost bila 1 itd.) polimorfizmu na posmatranoj trojki argumenata i ponovo poziva funkciju *check*.

- Ukoliko je ova vrednost dozvoljena, f_m se pomera se na prvi sledeći element niza, i rekurzivno poziva samu sebe, kao što je već opisano.

- Ukoliko ova vrednost nije dozvoljena pokušava se, na isti način, sa većim vrednostima (ako postoje).

- Ako nijedna od vrednosti 0, 1, 2, 3 ne može biti dodeljena tekućem elementu niza, tj. ne može biti vrednost majority–polimorfizma za aktuelnu trojku argumenata, funkcija f_m poziva drugu rekurzivnu funkciju, nazvanu *backwards* (tj. *unazad*), da dodeli nove vrednosti, ako je to moguće, prethodno definisanim elementima niza (tj. da postavi nove vrednosti majority–polimorfizma na trojkama argumenata koje prethode aktuelnoj).

- Funkcija *backwards* najpre pokušava da dodeli novu (veću) vrednost polimorfizma za trojku argumenata koja neposredno prethodi tekućoj (tj. da promeni vrednost članu niza koji neposredno prethodi tekućem članu). Ukoliko je to moguće, kontrola se vraća funkciji f_m, koja će ponovo pokušati da definiše vrednost tekućeg člana (počevši od 0).

- Ukoliko je nemoguće dodeliti veću vrednost članu niza koji prethodi tekućem, bilo zbog toga što ovaj član već ima vrednost 3, ili zbog toga što veća vrednost nije dozvoljena s obzirom na relaciju digrafa i prethodno definisane vrednosti, funkcija *backwards* se rekurzivno pomera unazad, tj. poziva samu sebe za član niza čiji je indeks za dva manji od indeksa tekućeg člana.

- Funkcija *backwards* vraća potvrdan odgovor funkciji f_m ukoliko je uspešno dodelila nove vrednosti svim elementima niza koji prethode tekućem. Kada kažemo „nove vrednosti", to zapravo znači da se vrednost bar jednog od ovih elemenata niza promenila u odnosu na stanje pre poziva ove funkcije. Dakle, pozitivan odgovor funkcije *backwards* znači: „napravljena je bar jedna promena u nizu prethodnih vrednosti".

- Kada funkcija *backwards* vrati potvrdan odgovor, funkcija f_m počinje ponovo od tekućeg elementa dodeljujući mu vrednost 0, i ponavlja se procedura opisana iznad.

- Ukoliko se ispostavilo da je nemoguće dodeliti nove vrednosti prethodnim elementima niza (tj. funkcija *backwards* je završila sa radom i vratila negativan rezultat), funkcija f_m se završava, ostavljajući 'a' kao vrednost tekućeg elementa niza i takodje kao vrednost svih sledećih elemenata. Ovo će se kasnije detektovati kao nepostojanje majority–polimorfizma.

- Kada funkcije f_m i *backwards* završe sa radom, moguća su dva ishoda: ako su sve 24 vrednosti majority–polimorfizma postavljene, pronadjen je majority–polimorfizam na digrafu koji testiramo, a ukoliko vrednost 'a' stoji na poslednjem elementu niza, nema majority–polimorfizma (dovoljno je testirati samo poslednji element niza nakon što funkcije završe).

Opisani metod radi dovoljno brzo u sekvencijalnom modu i kao rezultat se dobija da postoji 1690 digrafa koji imaju majority–polimorfizam. Fleg za majority–polimorfizam se postavlja na '1' kod svakog od ovih digrafa i oni se isključuju iz daljeg ispitivanja. Kao što je već rečeno, njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete i realizuju sistem (SM 1).

5. Identifikacija digrafa koji imaju wnu2– polimorfizam:

Setimo se da je wnu2–operacija binarna idempotentna komutativna operacija. Za svaki fiksirani digraf neke ovakve operacije su polimorfizmi, dok druge to nisu. Ovo objašnjava ideju primenjenu u ovoj fazi ispitivanja: najpre generišemo sve binarne idempotentne komutativne operacije na četvoroelementnom skupu $\{0, 1, 2, 3\}$ koji predstavlja čvorove digrafa, a zatim za svaki digraf proveravamo da li je neka od ovih operacija njegov polimorfizam.

Binarnu idempotentnu komutativnu operaciju dovoljno je definisati na šest parova argumenata, tj. na $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ i $(2, 3)$. (Zbog pretpostavljene idempotentnosti vrednosti operacije na parovima oblika (i, i) su jednake i, a na svakom paru oblika (i, j) za $i > j$ vrednost je ista kao na paru (j, i).)

Procedura primenjena u ovom koraku je sledeća:

- Najpre kreiramo matricu koja sadrži sve idempotentne komutativne binarne operacije na skupu $\{0, 1, 2, 3\}$ (odnosno sve wnu2–operacije na ovom skupu). Svaka operacija predstavljena je šestoelementnom vrstom ove matrice koja sadrži vrednosti operacije na parovima argumenata $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ i $(2, 3)$ redom. (Elementi matrice su vrednosti operacije, tj. elementi skupa $\{0, 1, 2, 3\}$.) Budući da za svaki par argumenata postoje 4 moguće vrednosti operacije, ukupan broj operacija, a samim tim i vrsta ove matrice, je $4^6 = 4096$.

- Za svaki (fiksirani) digraf krećemo se kroz matricu i proveravamo kompatibilnost svake operacije (tj. svake vrste) sa digrafom. Ovu proveru radi funkcija koju smo nazvali f_{pair}.

- Ukoliko se pronadje kompatibilna operacija, pronašli smo wnu2–polimorfizam datog digrafa, pa se odgovarajući fleg povezan sa digrafom postavlja na '1' i prelazi se na sledeći digraf (tj. nema potrebe da proveravamo kompatibilnost preostalih operacija iz matrice sa datim digrafom).

Navešćemo kratak primer provere kompatibilnosti: pretpostavimo da na fiksiranom digrafu ispitujemo operaciju (predstavljenu vrstom pomenute matrice) koja ima 0 kao vrednost u $(1, 2)$, tj. $f(1, 2) = 0$. Za sve čvorove x i y ovog digrafa takve da postoje grane $(x, 1)$ i $(y, 2)$, treba da postoji grana $(f(x, y), 0)$. Treba da važi i obrnuto, tj. za sve čvorove x i y takve da postoje grane $(1, x)$ i $(2, y)$, mora da postoji i grana $(0, f(x, y))$.

Sve digrafe koji imaju wnu2–polimorfizam isključujemo iz daljeg ispitivanja. Njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete i realizuju sistem (SM 1).

6. Identifikacija digrafa koji imaju wnu3–polimorfizam:

Do sada smo identifikovali digrafe koji imaju majority–polimorfizam i/ili wnu2-polimorfizam i isključili ih iz ispitivanja. Kao što smo objasnili ranije, iz skupa preostalih digrafa potrebno je izdvojiti one koji imaju wnu3–polimorfizam, jer to znači (na osnovu [11]) da algebra polimorfizama zadovoljava uslove teoreme 1.4.7, pa generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. Nakon toga želimo da proverimo da li ove algebre realizuju sistem (SM 1).

Wnu3–polimorfizam je ternarni polimorfizam w datog digrafa takav da važi: $w(a, a, a) = a$ i $w(a, a, b) = w(a, b, a) = w(b, a, a)$ za sve $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$[7]. Dakle, potrebno je definisati po dve vrednosti ovog polimorfizma za svaki par argumenata (a, b) gde $a \neq b$, naime $w(a, a, b)$ i $w(a, b, b)$ (pri čemu nema potrebe da posmatramo obrnuti par (b, a)). Osim toga, potrebno je definisati vrednosti polimorfizma na svim trojkama argumenata u kojima su svi argu-

[7] Videti definiciju wnu–terma, 1.4.5.

menti medjusobno različiti. To znači da treba definisati ukupno 36 vrednosti wnu3–polimorfizma na svakom posmatranom digrafu.

Pokazalo se da način koji smo koristili za pronalaženje majority–polimorfizma (par rekurzivnih funkcija koje vrše dodeljivanje vrednosti polimorfizma sa proverom i vraćanjem unazad, tj. *backtracking*) u ovom slučaju ne funkcioniše dovoljno dobro. Naime, niz kojem treba dodeliti vrednosti je sada predugačak (36 elemenata, nasuprot 24 kod majority–polimorfizma), pa se zbog toga generiše previše rekurzivnih poziva pomenutih funkcija.

Ovaj problem je prevazidjen tako što smo skratili deo niza na kojem rade rekurzivne funkcije: moguće je preliminarno dodeliti neke vrednosti početnim elementima niza, čime početak niza postaje poznat (fiksiran), a onda pokušati dodelu vrednosti na ostaku niza pomoću opisanih rekurzivnih funkcija. Ukoliko rekurzivne funkcije dodele vrednosti svim elementima niza, dobili smo wnu3–polimorfizam, a ukoliko to nije moguće, dodeljujemo neke druge vrednosti početnim elementima niza i pokušavamo ponovo.

Procedura je sledeća:

- Najpre identifikujemo dvoelementne podalgebre svih digrafa koje posmatramo (setimo se, radi se o preostalim digrafima, tj. onima koji nemaju majority niti wnu2–polimorfizam).
- Ovi digrafi mogu imati izmedju 0 i 6 dvoelementnih podalgebri, pa smo ih podelili u kategorije prema ovom broju.
- Dalji postupak je sličan za sve kategorije digrafa. Zbog jednostavnosti, objasnićemo ga detaljnije za dve od postojećih 7 kategorija: za digrafe koji imaju svih 6 dvoelementnih podalgebri i za digrafe koji imaju 5.
- Ako digraf ima svih 6 dvoelementhih podalgebri, tj $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ i $\{2,3\}$, to nam daje restrikciju mogućih vrednosti wnu3–polimorfizma na izvesnim trojkama argumenata. Naime, vrednost wnu3–polimorfizna za trojku argumenata "001" (a samim tim i za "010" i "100") može biti samo 0 ili 1. Slično, za trojku argumenata "002" ("020", "200"), vrednost može biti samo 0 ili 2. Ovakvih trojki argumenata ima 12, i za svaku od njih wnu3–polimorfizam može uzeti jednu od dve dozvoljene vrednosti.
- U narednom koraku generišemo matricu koja sadrži sve moguće (dozvoljene) vrednosti polimorfizma na 12 trojki argumenata: "001", "002",

"003","011","022", "033", "112", "113", "122", "133", "223", "233". Ova matrica ima 12 kolona koje odgovaraju navedenim trojkama argumenata redom, i 2^{12} vrsta. Elementi matrice su moguće vrednosti polimorfizma na ovim trojkama argumenata, tj 0 i 1 u prvoj koloni, 0 i 2 u drugoj, itd. Ovih 12 trojki argumenata postavljamo na početak *backtracking* niza (tj. prvih 12 elemenata ovog niza sadrže navedene trojke argumenata i promenljive kojima treba dodeliti vrednost polimorfizma na ovim trojkama). U ostatku niza elementi, odnosno trojke argumenata sa pridruženim promenljivama, navedeni su u leksikografskom poretku.

- Sada dodeljujemo prvu vrstu matrice kao prvih 12 vrednosti wnu3–polimorfizma, i pokušavamo da rekurzivnim funkcijama (*backtracking* metodom) popunimo ostatak niza koji je dužine 24. Ukoliko je ovo nemoguće, dodeljujemo vrednosti sledeće vrste matrice kao prvih 12 vrednosti polimorfizma i pokušavamo ponovo. Ako za neku vrstu matrice postoji traženi polimorfizam, postavlja se odgovarajući fleg (digrafa) na '1' i prelazi se na sledeći digraf. Ukoliko, pak, ni za jednu vrstu nije moguće dodeliti vrednosti ostatku niza, konstatujemo da digraf nema wnu3–polimorfizam.

- Ovo je znatno unapredilo proceduru, pošto se rekurzivne funkcije na ovaj način izvršavaju na nizu koji ima 24 elementa. Rekurzivne funkcije koje ovde koristimo su malo drugačije od funkcija f_m i *backwards* koje smo koristili za majority–polimorfizam: ovde funkcije dodeljuju vrednosti polimorfizma samo od 13. člana niza do kraja, i vraćaju se unazad samo do 13. člana niza. Dakle, na početku niza uopšte ne intervenišu, ali prilikom dodeljivanja vrednosti elementu niza proveravaju kompatibilnost ove vrednosti sa svim prethodno definisanim vrednostima uključujući i početak niza.

- U slučaju digrafa koji ima pet dvoelementnih podalgebri stvari su nešto komplikovanije: postoji šest mogućih skupova od pet podalgebri i za svaki od njih treba kreirati novu matricu vrednosti polimorfizma na odredjenim trojkama argumenata i promeniti *backtracking* niz tako da elementi koji sadrže ove trojke argumenata budu na početku.

- Pogledajmo primer: ako su podalgebre $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$ i $\{1,3\}$, matrica mogućih vrednosti polimorfizma ima pet kolona i 2^5 vrsta, pri čemu su u prvoj koloni samo vrednosti 0 i 1, u drugoj 0 i 2, itd. Dalje, prvih 10 elemenata niza na kojem se obavlja dodela vrednosti polimorfizma moraju sadržati trojke argumenata "001", "002", "003", "011", "022", "033", "112", "122", "113", "133", kao i odgovarajuće promenljive kojima se dodeljuju vrednosti polimorfizma na ovim trojkama. Postupak je isti kao u prethodnom slučaju, tj. dodeljujemo vrstu po vrstu matrice kao vrednosti polimorfizma na prvih 10 članova niza i pokušavamo *backtracking* od 11. člana do kraja.

- Za svaki izbor pet podalgebri potrebno je kreirati novu matricu mogućih vrednosti polimorfizma i permutovati izvesne elemente *backtracking* niza. Dakle, ovaj deo ispitivanja mora da se izvrši kroz šest iteracija. Rekurzivne funkcije su gotovo iste kao rekurzivne funkcije za slučaj šest dvoelementnih podalgebri, jedino je potrebno promeniti početnu tačku za ove funkcije sa 13. elementa niza na 11. element niza (jer iz matrice dodeljujemo vrednosti za prvih 10 elemenata). Cela ova procedura je detaljno objašnjena u [35]. Deo niza na kojem se radi *backtracking* (tj. na kojem rade rekurzivne funkcije) u ovom slučaju ima 26 elemenata. Brzina izvršavanja je zadovoljavajuća.
- U svim preostalim slučajevima, tj. kod digrafa koji imaju četiri, tri, dve ili jednu dvoelementnu podalgebru, postupak je isti. U svakom od ovih slučajeva treba kreirati novu matricu mogućih vrednosti polimorfizma za svaki izbor podalgebri, i takodje promeniti početak *backtracking* niza tako da elementi sa odgovarajućim trojkama argumenata budu na početku. Rekurzivne funkcije koje dodeljuju vrednosti wnu3–polimorfizma moraju startovati od različitih pozicija u nizu. Ovo znači da je potrebno korigovati i iterirati ovaj deo koda više puta da bi se dobili kompletni rezultati.
- Procedura koju smo opisali funkcioniše jako dobro: na sreću, svi digrafi koji imaju wnu3–polimorfizam su medju onima koji imaju dvoelementne podalgebre (bar jednu). Na opisani način pronašli smo svih 29 traženih digrafa (poznato je da ih ima 29 na osnovu [11]).
- Izdvojimo interesantnu činjenicu: ako dodelimo vrednosti za prva dva člana 36–elementnog niza i startujemo *backtracking* funkcije na ostatku, tj. na dužini 34, kod se izvršava dovoljno brzo (slučaj sa jednom dvoelementnom podalgebrom). Kao što smo ranije rekli, *backtracking* na dužini 36 bio je nemoguć (nije se završio čak ni posle nekoliko sati za pojedine

digrafe). Dakle, pronašli smo prelomnu tačku ovog rekurzivnog postupka.

7. Testiranje realizacije sistema (SM 1) na algebrama polimorfizama pronadjenih 29 digrafa:

   Postupak je sledeći:

   - Najpre pronadjemo wnu3–polimorfizam za digraf koji ispitujemo. Ovo je potencijalni polimorfizam q (interpretacija terma $\bar{q}$ iz sistema (SM 1)).
   - Interpretacija terma $\bar{p}$ iz sistema (SM 1) je neki polimorfizam p koji treba definisati (ako je to moguće). Ternarni polimorfizam p na četvoroelementnom digrafu ima ukupno 64 vrednosti na 64 trojke argumenata. Zbog pretpostavljene idempotentnosti ovog polimorfizma, preostaje da se definiše 60 vrednosti. Iz identiteta $\bar{p}(x, x, y) \approx \bar{p}(x, y, y)$ sistema (SM 1) sledi da je $p(0, 0, 1) = p(0, 1, 1)$, $p(0, 0, 2) = p(0, 2, 2)$, itd. Ovakvih parova vrednosti ima 12, što znači da p treba definisati na 48 trojki argumenata.
   - Na osnovu sistema (SM 1), polimorfizmi p i q imaju iste vrednosti na 12 trojki argumenata: "010", "020", "030", "101", "121", "131", "202", "212", "232", "303", "313" i "323". Dodelićemo vrednosti pronadjenog polimorfizma q na ovim trojkama argumenata polimorfizmu p na istim trojkama. Ovo nam daje 12 početnih vrednosti polimorfizma p, odnosno definiše početak *backtracking* niza.
   - Sledeći korak je *backtracking* na ostatku niza, odnosno parom rekurzivnih funkcija pokušavamo da dodelimo preostalih $48 - 12 = 36$ vrednosti za polimorfizam p. Funkcije koje rade *backtracking* i sve potrebne provere su tačno one koje smo opisali ranije (kod ispitivanja majority i wnu3–polimorfizama), pa ih nećemo ponovo opisivati. Mogu se pronaći u izvornom kodu u [35].
   - Kao rezultat dobijamo da svih 29 digrafa imaju polimorfizme p i q koji odgovaraju sistemu (SM 1), odnosno algebre polimorfizama ovih digrafa realizuju sistem (SM 1).

Ovde možemo izdvojiti jedan kuriozitet – prilikom traženja polimorfizma p sprovodimo *backtracking* na nizu od 36 elemenata i brzina izvršavanja ovih rekurzivnih funkcija je zadovoljavajuća. Prilikom definisanja wnu3–polimorfizma bezuspešno smo pokušavali *backtracking* na duzini 36. Može se zaključiti da, u slučaju kada je wnu3–polimorfizam (q) već pronadjen, traženje polimorfizma p proizvodi daleko manje rekurzivnih poziva u odnosu na traženje wnu3–polimorfizma, mada se sprovodi na istoj dužini niza. Takodje, kod svakog od ovih 29 digrafa polimorfizam p je pronadjen za prvi wnu3–polimorfizam q koji smo pronašli, odnosno, kada se uzme prvi, tj. po vrednostima najmanji wnu3–polimorfizam q, može se pronaći polimorfizam p takav da interpretacija $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$ realizuje sistem (SM 1)) na algebri polimorfizama posmatranog digrafa.

3.3.2 Vremenska složenost

U ovom pododeljku ocenićemo vremensku složenost svakog od koraka (tj. delova koda) izloženih iznad. Koraci su numerisani isto kao u prethodnom pododeljku.

1. Generisanje četvoroelementnih digrafa:

   Vreme potrebno za generisanje svih digrafa veličine četiri (ili bilo koje date veličine) je linearna funkcija broja digrafa date veličine. Ukoliko označimo broj digrafa sa N generisanje bi trajalo $C * N$ jedinica vremena, pri čemu je C neka konstantna vrednost. Preciznije, broj digrafa date veličine je $N = 2^{2^n}$, gde je n broj čvorova, tako da ovaj korak traje $C * 2^{2^n}$ jedinica vremena.

2. Identifikacija neizomorfnih digrafa:

   Kao što smo već objasnili, prilikom identifikovanja neizomorfnih digrafa primenjen je metod sličan metodu brutalne sile (*brute force*), u smislu da nismo testirali da li su svaka dva digrafa medjusobno izomorfna, već da li su medjusobno izomorfni digrafi sa istim brojem grana. Ova modifikacija doprinosi brzini izvršavanja, ali vremenska složenost ostaje ista: ako je N broj svih digrafa date veličine, ovaj korak traje $C*N^2$ jedinica vremena, gde je C neka konstantna vrednost. Vremensku složenost možemo izraziti i kao funkciju broja čvorova: $C*(2^{2^n})^2$. Brzina izvršavanja je zadovoljavajuća za četvoroelementne digrafe, ali za petoelementne smo koristili drugačiji pristup (odeljak **3.4**).

3. Identifikacija podalgebri:

   Funkcija koja identifikuje podalgebre zahteva konstantno vreme za svaki digraf, ukupno $C * N$ vremenskih jedinica, gde je C konstantna vrednost a N broj neizomorfnih digrafa.

4. Identifikacija digrafa koji imaju majority–polimorfizam:

   Setimo se, traženje majority–polimorfizma sprovedeno je pomoću para rekurzivnih funkcija. Prva funkcija, nazvana f_m u izvornom kodu u [35], postavlja vrednost polimorfizma na tekućoj uredjenoj trojci argumenata, ako je to moguće, i onda se rekurzivno pomera na sledeći element niza. Druga funkcija, nazvana *backwards*, ponovo postavlja sve prethodno definisane vrednosti polimorfizma (pri čemu bar jedna vrednost mora biti drugačija od prethodno definisane) kada nije moguće postaviti vrednost na tekućoj trojci argumenata.

   Razmotrimo vremensku složenost ovog dela koda, analizirajući samo najgori slučaj: pretpostavimo da postavljamo vrednost polimorfizma u elementu niza sa indeksom i, tj. na i-toj po redu uredjenoj trojci argumenata. Ukoliko je nemoguće postaviti ovu vrednost s obzirom na prethodno postavljene vrednosti, funkcija *backwards* može biti pozvana od strane funkcije f_m čak 4^i puta pre nego što f_m nastavi dalje. (Ovo je broj načina za postavljanje vrednosti na prethodnih i članova ovog niza.) Svaki poziv funkcije *backwards* može generisati 4^{i-1} novih poziva ove funkcije, a svaki od njih može proizvesti još 4^{i-2} novih poziva, itd. Dakle, prilikom postavljanja vrednosti polimorfizma na elementu niza sa indeksom i, može se javiti čak $4^i * 4^{i-1} * 4^{i-2} * \cdots * 4 = 4^{i*(i+1)/2}$ poziva funkcije *backwards*. Ako pretpostavimo da se ovo dešava pri postavljanju vrednosti svakog elementa niza, dobijamo $\Sigma_{i=1}^{i=M} 4^{i*(i+1)/2}$ poziva ove funkcije, gde je M dužina niza na kojem sprovodimo *backtracking*, odnosno broj vrednosti koje treba postaviti za odredjeni polimorfizam. Možemo aproksimirati prethodnu sumu na $\mathbf{C * 4^{M*(M+1)/2}}$, gde je C neka konstantna vrednost (pošto $\Sigma_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{4^i} = 4/3$). Dakle, vremenska složenost ove procedure je $\mathbf{C * 4^{M*(M+1)/2}}$ jedinica vremena, gde je C konstantna vrednost, a M je broj vrednosti koje treba postaviti za odredjeni polimorfizam. Ovo je ekstremno visoka vremenska složenost.

   U kodu takodje postoji veliki broj provera i petlji u sklopu ovih rekurzivnih funkcija, ali one ne doprinose redu veličine vremenske složenosti. Procedura koju smo opisali izvršena je za $M = 24$, jer majority–polimorfizam zahteva da se definiše 24 vrednosti za 24 trojke argumenata. Ista procedura nije mogla da se završi za $M = 36$ pri traženju wnu3–polimorfizma, što nam daje uvid u kritičnu dužinu niza za ovaj postupak.

   Dobijenu vremensku složenost možemo izraziti kao funkciju broja čvorova: ako digraf ima n čvorova treba definisati ukupno $n * (n-1) * (n-2)$ vrednosti za majority–polimorfizam, pa bi niz na kojem se sprovodi *backtracking* bio iste te dužine. Vremenska složenost: $\mathbf{C * n^{n*(n-1)*(n-2)*(n*(n-1)*(n-2)+1)/2}}$.

5. Identifikacija digrafa koji imaju wnu2–polimorfizam:

   Pri identifikaciji digrafa koji imaju wnu2–polimorfizam, najpre smo kreirali matricu svih idempotentnih binarnih komutativnih operacija. Dimenzije ove matrice su $n^{n*(n-1)/2} \times n*(n-1)/2$, gde je n broj čvorova (u ovom slučaju 4). Za svaki digraf prolazi se kroz matricu i proverava kompatibilnost sa svakom operacijijom (vrstom), pri čemu provera zahteva konstantnu količinu vremena. Prema tome, vremenska složenost ovog dela koda je $C * n^{n*(n-1)/2} * N$, gde je C neka konstantna vrednost, n je broj čvorova i N je broj digrafa koje ispitujemo.

6. Identifikacija digrafa koji imaju wnu3–polimorfizam:

   Vremenska složenost ovog dela koda je ista kao pri identifikaciji digrafa koji imaju majority–polimorfizam, jer smo upotrebili iste funkcije za *backtracking*. Složenost je $\mathbf{C * 4^{M*(M+1)/2}}$, gde je C neka konstantna vrednost a M je broj vrednosti koje treba definisati za odredjeni polimorfizam (ovde wnu3). Deo niza na kojem se sprovodi *backtracking* je skraćen sa dužine $M = 36$ (nemoguće) na dužinu najviše 34 (moguće) na način koji smo opisali iznad. Generisanje potrebnih matrica vrednosti polimorfizma ne utiče na ukupnu složenost ovog metoda – ona je jako velika zbog broja rekurzivih poziva. Iteracije koje smo pomenuli ranije, a koje su potrebne da bi se dobili kompletni rezultati, takodje ne utiču na složenost. One mogu samo da promene konstantnu vrednost C u navedenom izrazu.

7. Testiranje realizacije sistema (SM 1):

   Složenost dela koda koji ispituje egzistenciju polimorfizama p i q koji odgovaraju sistemu (SM 1) je čak veća nego pri traženju majority–polimorfizma ili wnu3–polimorfizma. U ovom slučaju potrebno je najpre pronaći wnu3–polimorfizam q, a zatim polimorfizam p (ako postoji) za ovaj fiksirani wnu3–polimorfizam q. U slučaju da takav polimorfizam p ne postoji, traži se novi wnu3–polimorfizam q, i zatim odgovarajući polimorfizam p, itd. Ovo znači da je gornja granica vremenske složenosti $\mathbf{C * 4^{M*(M+1)/2} * 4^{M_1*(M_1+1)/2}}$, gde je C neka konstantna vrednost a M i M_1 brojevi vrednosti koje treba definisati za ove polimorfizme (q i p redom).

Činjenica da je za svaki digraf polimorfizam p pronadjen u paru sa prvim wnu3–polimorfizmom q koji smo pronašli (tj. u paru sa najmanjim wnu3–polimorfizmom za dati digraf) znatno je olakšala i ubrzala celu proceduru, ali ne utiče na složenost metoda.

3.4 Petoelementni digrafi

Slučaj digrafa sa pet čvorova je blizu granice onoga što se trenutno može istraživati računarskom pretragom. Iz ovog razloga smo za ispitivanje ovih digrafa koristili ne samo C-kodove već i *Paradox*[8].

Iz [11] se može zaključiti da za petoelementne digrafe važi isto što i za četvoroelementne: ukoliko isključimo digrafe koji imaju majority–polimorfizam i wnu2–polimorfizam, preostali digrafi imaju wnu3 i wnu4 polimorfizme koji definišu istu binarnu operaciju ako i samo ako imaju wnu3–polimorfizam. (Odnosno algebre polimorfizama ovih preostalih digrafa generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete ako i samo ako imaju wnu3 term–operaciju, tj. ako i samo ako posmatrani digrafi imaju wnu3–polimorfizam.)

Na osnovu [11] postoji ukupno 3475 digrafa koji nemaju majority–polimorfizam niti wnu2–polimorfizam, a imaju wnu3–polimorfizam.

Postupkom koji opisujemo u nastavku izolovali smo ovih 3475 digrafa i testirali realizaciju sistema (SM 1) na odgovarajućim algebrama polimorfizama. Dobija se da sve ove algebre realizuju sistem, pa se može zaključiti da sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u varijetetu generisanom algebrom polimorfizama proizvoljnog petoelementnog digrafa.

3.4.1 Procedura

Ispitivanje petoelementnih digrafa uradjeno je kroz niz istih koraka kao ispitivanje četvoroelementnih ([35]):

1. Najpre generišemo sve digrafe veličine pet.

2. Zatim pronadjemo sve neizomorfne medju njima.

3. Definišemo matricu podalgebri za algebre polimorfizama neizomorfnih digrafa.

[8] Paradox je tzv. *model builder*. Ovde ga koristimo za proveru zadovoljivosti.

4. Identifikujemo digrafe koji imaju wnu2–polimorfizam (tj. binarnu idempotentnu komutativnu operaciju) i isključimo ih iz daljeg ispitivanja (njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete, ali znamo da realizuju sistem (SM 1)).

5. Identifikujemo digrafe koji imaju majority–polimorfizam i njih takodje isključujemo iz daljeg ispitivanja iz istog razloga kao u prethodnoj tački.

6. Medju preostalim digrafima tražimo one koji imaju wnu3–polimorfizam. Njihove algebre polimorfizama generišu kongruencijski $\wedge$–poludistributivne varijetete, ali ne znamo da li realizuju sistem (SM 1).

7. U poslednjem koraku testiramo realizaciju sistema (SM 1) na pomenutim algebrama. Pokazuje se da sve one realizuju ovaj sistem.

Koraci 1, 2, 3 i 4 uradjeni su pomoću C–kodova, dok smo u koracima 5, 6 i 7 koristili Paradox.

Izložićemo najpre podrobniji opis koraka 1, 2, 3 i 4, kao i analizu vremenske složenosti odgovarajućih procedura. (Detaljno objašnjenje zajedno sa odgovarajućim C–kodovima može se pronaći u [35].) Upotreba Paradox–a objašnjena je u posebnom pododeljku.

1. Generisanje petoelementnih digrafa:

   Petoelementnih digrafa ima ukupno 2^{25}. Smatramo da su čvorovi svakog od ovih digrafa označeni sa 0, 1, 2, 3 i 4. Svaki digraf smo predstavili pomoću niza od 25 elemenata tipa karakter. Svaki član niza odgovara jednoj grani posmatranog digrafa, pri čemu ima vrednost '1' ako grana postoji, odnosno '0' ako ne postoji. Pretpostavljeni redosled grana u ovom nizu je sledeći: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(1,0)$, $\dots$, $(4,3)$, $(4,4)$. Generisanje svih petoelementnih digrafa (tj. popunjavanje nizova karakterima '0' i '1') uradjeno je na isti način kao generisanje četvoroelementnih. Digrafi su memorisani u nizu struktura čiji svaki element sadrži jedan digraf i odredjeni broj promenljivih tipa karakter (flegovi) koje mogu imati vrednosti '0' ili '1'. One pokazuju da li je digraf izomorfna kopija i koje polimorfizme ima. Inicijalno su sve postavljene na '0'.

2. Identifikacija neizomorfnih digrafa:

   Za identifikaciju neizomorfnih digrafa koristili smo sledeću proceduru:

- Flegovi za izomorfizam za sve digrafe su inicijalno postavljeni na '0' („nije kopija").

- Uzimamo prvi digraf, generišemo sve njegove izomorfne kopije i podignemo njihove flegove za izomorfizam na '1'.

- Zatim uzimamo prvi po redu digraf koji ima '0' na flegu za izomorfizam, generišemo njegove izomorfne kopije, postavimo njihove flegove za izomorfizam na '1', itd.

- Svaka izomorfna kopija digrafa je niz karaktera '0' i '1', medjutim, ako ovaj string konvertujemo u binarni broj, a zatim u odgovarajući dekadni broj, dobijamo indeks izomorfne kopije u nizu struktura koji sadrži sve digrafe. Dakle, izračunavamo poziciju kopije u nizu digrafa, umesto da je tražimo, što znatno ubrzava postupak.

- Ovaj metod identifikacije neizomorfnih digrafa sličan je metodu identifikacije prostih brojeva poznatom pod nazivom *Eratostenovo sito.*

- Na opisani način identifikovali smo 291968 neizomorfnih petoelementnih digrafa.

3. Identifikacija podalgebri:

   Slično kao u slučaju četvoroelementnih digrafa, identifikujemo dvoelementne, troelementne i četvoroelementne podalgebre algebri polimorfizama neizomorfnih digrafa (jednoelementne i petoelementne podalgebre nisu od interesa). Digraf može imati najviše 25 ovih podalgebri, pa kreiramo matricu koja ima 25 kolona i odgovarajući broj vrsta. Funkcija koja proverava da li su podskupovi skupa čvorova nekog digrafa podalgebre njegove algebre polimorfizama slična je odgovarajućoj funkciji koju smo opisali kod četvoroelementnih digrafa.

4. Identifikacija digrafa koji imaju wnu2–polimorfizam:

   Zbog broja digrafa i komutativnih idempotentnih binarnih operacija na petoelementnom skupu čvorova, ovo ispitivanje je uradjeno u paralelnom modu. Kod je izvršen na 13 procesora u *master–slave* hijerarhiji. Koraci su slični kao kod četvoroelementnih digrafa:

   - Smeštamo u novi niz sve neizomorfne digrafe koje smo identifikovali ranije.

- Kreiramo matricu koja sadrži sve binarne komutativne idempotentne operacije na skupu od pet čvorova. Zbog idempotentnosti i komutativnosti, ovakvu operaciju je dovoljno definisati na 10 parova argumenata: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ i $(3, 4)$. Dakle, ova matrica ima 10 kolona. Elementi matrice su elementi skupa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Za svaki fiksirani digraf testiramo kompatibilnost sa operacijama iz matrice. Ukoliko se pronadje kompatibilna operacija, pronašli smo wnu2–polimorfizam za dati digraf. Odgovarajući fleg ovog digrafa se postavlja na '1' i prelazi se na sledeći digraf (i na početak matrice operacija).
- Izdvajamo digrafe koji nemaju wnu2–polimorfizam, jer na njima nastavljamo ispitivanje.

Master–slave hijerarhija koju smo prethodno pomenuli implementirana je na sledeći način:

- Svakom od slave–procesora dodeljen je sopstveni niz neizomorfnih digrafa, kao i matrica podalgebri i matrica idempotentnih binarnih komutativnih operacija.
- Master–procesor distribuira ostalima indekse digrafa koje treba da ispitaju (po jedan za svaki slave–procesor).
- Nakon što slave–procesor vrati odgovor za konkretan digraf (ima, odnosno nema wnu2–polimorfizam), master-procesor podiže, ako je potrebno, odgovarajući fleg ovog digrafa u svom nizu digrafa, a zatim prosledjuje ovom slave–procesoru indeks novog digrafa.
- Kada su svi digrafi ispitani, master–procesor izdvaja one koji nemaju wnu2–polimorfizam.

3.4.2 Vremenska složenost

Ocenićemo vremensku složenost prethodno opisanih koraka:

1. Generisanje petoelementnih digrafa:

   Vreme potrebno za generisanje svih digrafa sa pet čvorova je linearna funkcija broja digrafa, dakle $C * N$, pri čemu je N broj digrafa, ili $C * 2^{2^n}$, gde je n broj čvorova (ovde pet).

2. Identifikacija neizomorfnih digrafa:

   Identifikacija neizomorfnih digrafa na način koji je prethodno opisan zahteva $C * N$ jedinica vremena, pri čemu je N broj svih digrafa. Naime, generisanje izomorfnih kopija konkretnog digrafa a zatim izračunavanje njihovih pozicija u nizu i postavljanje odgovarajućih flegova na '1' zahteva konstantnu količinu vremena. Primetimo da smo spustili vremensku složenost (u odnosu na postupak primenjen kod četvoroelementnih digrafa) za red veličine, naime sa $C * N^2$ na $C * N$.

3. Identifikacija podalgebri:

   Kao i u slučaju četvoroelementnih digrafa, kreiranje matrice podalgebri zahteva $C * N$ jedinica vremena, pri čemu je N broj neizomorfnih digrafa sa pet čvorova.

4. Identifikacija digrafa koji imaju wnu2–polimorfizam:

   Kreiranje matrice svih idempotentnih komutativnih binarnih operacija na skupu od pet čvorova i zatim, ispitivanje da li digrafi imaju ovu vrstu operacije (tj. wnu2–polimorfizam), zahteva $C * n^{n*(n-1)/2} * N$ jedinica vremena, gde je n broj čvorova, ovde pet, a N je broj neizomorfnih digrafa ove veličine. Izraz koji predstavlja vremesku složenost je već obrazložen za četvoroelementni slučaj. Primetimo samo da izvršavanje ovog dela koda u paralelnom modu ne menja njegovu vremensku složenost, već samo utiče na konstantni faktor C.

3.4.3 Paradox

Za ispitivanje egzistencije majority–polimorfizma, wnu3–polimorfizma, i polimorfizama p i q koji realizuju sistem (SM 1) koristili smo specijalan softver nazvan *Paradox model builder*.

Paradox je takodje izvršavan u paralelnom modu pod Linux shell–om. Ulazna datoteka za Paradox sadrži opis konkretnog digrafa i polimorfizma koji tražimo na tom digrafu. Sve ulazne datoteke su generisane u programskom jeziku C kao tekstualne datoteke.

Predstavićemo primer ulazne datoteke koja je upotrebljena prilikom traženja polimorfizama p i q na jednom od digrafa.

```
cnf(mt, axiom, p(X,X,X)=X).
cnf(mt, axiom, p(X,X,Y)=p(X,Y,Y)).
```

```
cnf(pr, axiom, ~gr(X0,X1) | ~gr(X2,X3) | ~gr(X4,X5) |
gr(p(X0,X2,X4),p(X1,X3,X5))).
cnf(wnu, axiom, q(X,X,X)=X).
cnf(wnu, axiom, q(X,X,Y)=q(X,Y,X)).
cnf(wnu, axiom, q(X,X,Y)=q(Y,X,X)).
cnf(pr, axiom, ~gr(X0,X1) | ~gr(X2,X3) | ~gr(X4,X5) |
gr(q(X0,X2,X4),q(X1,X3,X5))).
cnf(mt, axiom, p(X,Y,X)=q(Y,X,X)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n0,n0)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n0,n1)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n0,n2)).
cnf(graph, axiom, gr(n0,n3)).
cnf(graph, axiom, gr(n0,n4)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n1,n0)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n1,n1)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n1,n2)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n1,n3)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n1,n4)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n2,n0)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n2,n1)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n2,n2)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n2,n3)).
cnf(graph, axiom, gr(n2,n4)).
cnf(graph, axiom, gr(n3,n0)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n3,n1)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n3,n2)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n3,n3)).
cnf(graph, axiom, gr(n3,n4)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n4,n0)).
cnf(graph, axiom, gr(n4,n1)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n4,n2)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n4,n3)).
cnf(graph, axiom, ~gr(n4,n4)).
cnf(elems, axiom, n0!=n1).
cnf(elems, axiom, n0!=n2).
cnf(elems, axiom, n0!=n3).
```

cnf(elems, axiom, n0!=n4).
cnf(elems, axiom, n1!=n2).
cnf(elems, axiom, n1!=n3).
cnf(elems, axiom, n1!=n4).
cnf(elems, axiom, n2!=n3).
cnf(elems, axiom, n2!=n4).
cnf(elems, axiom, n3!=n4).
cnf(elems, axiom, (X=n0 | X=n1 | X=n2 | X=n3 | X=n4)).

3.5 Hipoteza

Budući da smo zaključili da sistem (SM 1) karakteriše svojstvo kongruencijeske $\wedge$–poludistributivnosti u varijetetu generisanom algebrom polimorfizama proizvoljnog digrafa veličine najviše pet čvorova, možemo postaviti hipotezu:

Hipoteza 3.5.1. *Lokalno konačan varijetet ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti ako i samo ako realizuje sistem (SM 1):*

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{SM 1}$$

Poglavlje 4

Kolaps hijerarhije ograničene širine

U ovom poglavlju izložićemo rezultate rada [4] koje koristimo za dokazivanje glavnih rezultata ove disertacije. Sadržaj poglavlja je najvećim delom preuzet iz [4], uz izvestan broj objašnjenja i napomena autora ove disertacije.

4.1 Notacija i terminologija

Skup $\{f \mid f : V \longrightarrow D\}$ svih preslikavanja iz V u D označavamo sa D^V. Oznaku $f_{|W}$ koristimo za restrikciju $f \in D^V$ na podskup $W \subseteq V$. Ako je $C \subseteq D^V$, možemo uvesti restrikciju ovog skupa preslikavanja na $W \subseteq V$, kao skup odgovarajućih restrikcija: $C_{|W} = \{f_{|W} \mid f \in C\} \subseteq D_{|W}$. Ukoliko je W jednočlan skup, $W = \{x\}$, pisaćemo jednostavno $C_{|x}$ umesto $C_{|\{x\}}$. Ovaj skup se može identifikovati sa podskupom od D (u pitanju je podskup od $D^{\{x\}}$, ali možemo umesto funkcija posmatrati njihove slike).

Uredjenje skupa $C \subseteq D^V$ je $|V|$ –arna relacija oblika $\{(f(x_1), \ldots, f(x_k)) \mid f \in C\}$ gde je $(x_1, \ldots, x_k)$ lista svih elemenata iz V.

Ako je $t : D^n \longrightarrow D$ bilo koja n–arna operacija na D i $f_1, \ldots, f_n \in D^V$, može se posmatrati kompozicija ovih preslikavanja $t(f_1, \ldots, f_n) : V \longrightarrow D$, definisana ovako: $(t(f_1, \ldots, f_n))(x) = t(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x \in V$.

Specijalno, ako je $\mathbf{D}$ algebra, $\mathbf{D}^V$ je stepen algebre $\mathbf{D}$ (ukoliko V ima n elemenata i preslikavanja iz V u D identifikujemo sa njihovim slikama, dobijamo direktan stepen $\mathbf{D}^n$).

4.2 Problem zadovoljenja uslova

U literaturi se javljaju tri definicije Problema zadovoljenja uslova (Constraint Satisfaction Problem, skraćeno CSP): preko homomorfizma, preko zadovoljivosti i preko vrednosti promenljivih. U ovom poglavlju koristimo varijaciju definicije preko vrednosti promenljivih. Definicija Problema preko homomorfizma izložena je na početku poglavlja **3**.

U standardnoj definiciji preko vrednosti promenljivih, instanca Problema zadovoljenja uslova obuhvata sledeće:

- Konačan skup promenljivih V,
- Konačan domen D,
- Konačnu listu (ili skup) uslova oblika $(\mathbf{x}, R)$, pri čemu je $\mathbf{x}$ k–torka promenljivih (ne nužno različitih), $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in V^k$, a R je k–arna relacija $R \subseteq D^k$ koju nazivamo *relacija uslova* $(\mathbf{x}, R)$.

Pitanje je da li postoji preslikavanje $f : V \longrightarrow D$ takvo da $f(\mathbf{x}) \in R$ za svaki uslov $(\mathbf{x}, R)$.

Uslovi u kojima se promenljive ponavljaju mogu se zameniti uslovima bez ponavljanja. Na primer, uslov $((x, y, x), R)$ može se zameniti parom uslova $((x, y, z), R)$, $((x, z), =)$, gde je z nova promenljiva. Osim toga, redosled promenljivih se može menjati proizvoljno – na primer, uslov $((x, y), R)$ je ekvivalentan uslovu $((y, x), R^{-1})$ gde je R^{-1} inverzna relacija. Na ovaj način se dobija „neuredjena” verzija definicije koja nam ovde više odgovara.

Definicija 4.2.1. *Instanca Problema zadovoljenja uslova (CSP–instanca) je uredjena trojka $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ pri čemu je*

- *V neprazan, konačan skup promenljivih*
- *D neprazan, konačan domen*
- *$\mathcal{C}$ konačan neprazan skup uslova, gde je svaki uslov podskup C od D^W. Ovde je W podskup skupa promenljivih V koji nazivamo* opseg *uslova C, a kardinalnost $|W|$ skupa W naziva se* arnost *uslova C.*

Pitanje je da li postoji rešenje za instancu $\mathcal{I}$, odnosno funkcija $f : V \longrightarrow D$ takva da, za svaki uslov $C \in \mathcal{C}$, recimo sa opsegom W, restrikcija $f_{|W}$ pripada C.

Instanca je *trivijalna* ako sadrži prazan uslov, odnosno uslov $\emptyset = C \subseteq D^W$, za neki $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Ovakva instanca, očigledno, nema rešenje.

Može se posmatrati restrikcija Problema zadovoljenja uslova, u smislu da se može ograničiti skup relacija koje mogu da figurišu u uslovima.

Definicija 4.2.2. *Jezik uslova, u oznaci* Γ, *je skup relacija na konačnom skupu* D *koji (jezik) sadrži binarnu relaciju jednakosti. Problem zadovoljenja uslova nad jezikom* Γ, *koji označavamo sa* $CSP(\Gamma)$, *je potklasa Problema zadovoljenja uslova definisana svojstvom da svaki uslov ima uredjenje koje pripada* Γ.

Dakle, instanca je u klasi $CSP(\Gamma)$ ako za svaki njen uslov postoji uredjenje koje pripada Γ. Objasnimo ovo podrobnije:

Neka je instanca $\mathcal{I}$ u klasi $CSP(\Gamma)$ i neka je $C \subseteq D^W$ jedan uslov ove instance arnosti n. Ovaj uslov možemo shvatiti kao skup dozvoljenih preslikavanja skupa promenljivih W u domen D. Ovde implicitno postoji n–arna relacija R koja odgovara ovom uslovu (u smislu standardne definicije preko vrednosti promenljivih), naime $R \subseteq D^n$ sadrži uredjene n–torke vrednosti ovih dozvoljenih preslikavanja, odnosno uredjene n– torke dozvoljenih vrednosti za promenljive iz W. (Smatramo da su promenljive iz W uredjene na neki način, recimo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.) Pretpostavili smo da instanca $\mathcal{I}$ koju posmatramo pripada klasi $CSP(\Gamma)$, a to znači da postoji permutacija promenljivih iz W (koja, naravno implicira i odgovarajuću permutaciju dozvoljenih vrednosti, odnosno neku permutaciju elemenata unutar uredjenih n –torki relacije R), takva da se od relacije R dobija neka relacija iz skupa Γ. Naravno, može se raditi i o identičkoj permutaciji, u slučaju kada $R \in \Gamma$.

4.3 Kolaps hijerahije ograničene relacione širine

U ovom odeljku definišemo pojam *relacione širine* jezika uslova i formulišemo *teoremu o trihotomiji relacione širine.*

4.3.1 Relaciona širina

Pojam relacione širine odnosi se na jezik uslova Γ u Problemu zadovoljenja uslova $CSP(\Gamma)$.

Uvodimo najpre pojam (k, l)– minimalne instance Problema zadovoljenja uslova.

Definicija 4.3.1. *Neka su* $l \geq k > 0$ *prirodni brojevi. Instanca* $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ *Problema zadovoljenja uslova je* (k, l)*–minimalna ako važi sledeće:*

(M1) *Svaki najviše l–elementni skup promenljivih je sadržan u opsegu nekog uslova iz $\mathcal{C}$.*

(M2) *Za svaki skup W od najviše k promenljivih i svaki par uslova C_1 i C_2 iz $\mathcal{C}$ čiji opsezi sadrže W, restrikcije uslova C_1 i C_2 na W su iste.*

(k, k)–minimalna instanca se takodje naziva k–minimalna.

Iz definicije (k, l)–minimalne instance lako se vidi da je svaka (k, l)–minimalna instanca takodje i (k', l')–minimalna za sve k' i l' takve da $k' \leq k$ i $l' \leq l$ $(l' \geq k' > 0)$.

Takodje iz definicije dobijamo sledeće:

Činjenica 4.3.2. *(k, l)–minimalna instanca Problema zadovoljenja uslova nema rešenje ako i samo ako je trivijalna.*

Za fiksirane k i l $(l \geq k > 0)$, svaka instanca $\mathcal{I}$ Problema zadovoljenja uslova se može konvertovati u (k, l)–minimalnu instancu u polinomnom vremenu. Direktan način za ovu konverziju je algoritam koji sledi (nazvan $algoritam(k, l) - -minimalnosti$):

1. Za svaki l–elementni skup $W \subset V$ koji nije sadržan u opsegu nijednog uslova, skupu uslova dodajemo uslov D^W. Ovakav uslov dozvoljava sva preslikavanja iz W u D, odnosno sve moguće vrednosti promenljivih iz W su dozvoljene.

2. Ponavljamo sledeću proceduru sve dok se ne stabilizuje (odnosno do trenutka kada više nema promena): za svaki skup W od najviše k promenljivih i svaki par uslova C_1 i C_2 iz $\mathcal{C}$ čiji opsezi sadrže W, uklanjamo iz C_1 i C_2 sve funkcije f za koje važi $f_{|W} \notin C_{1|W} \cap C_{2|W}$.

Tvrdjenje 4.3.3. *Uslovi koji preostaju kada se opisani postupak završi zavise samo od početnog skupa uslova $\mathcal{C}$, a ne i od redosleda uklanjanja funkcija iz uslova.*

Dokaz. Svaka (k, l)–minimalna instanca $\mathcal{J}$ implicitno sadrži jedinstveni uslov P_W za svaki dati najviše k–elementni skup promenljivih W. Zaista, za $W \subseteq V$, $|W| \leq k$, postoji uslov C čiji opseg sadrži W (prema $(M1)$) i restrikcija $P_W = C_{|W}$ ne zavisi od izbora uslova C (prema $(M2)$).

Dalje, neka je $C \subseteq D^U$ proizvoljan uslov u instanci $\mathcal{J}$ (U je neki podskup skupa promenljivih V ove instance).

Važi sledeće: za svaki $W \subseteq U$ veličine najviše k i svaki $f \in P_W$, postoji funkcija $g \in C$ takva da $g_{|W} = f$ i $g_{|Z} \in P_Z$ za svaki $Z \subseteq U$, $|Z| \leq k$. Zaista, kako $C_{|W} = P_W$

(prema $(M2)$), postoji $g \in C$ takav da $g_{|W} = f$ i, ponovo prema $(M2)$, $g_{|Z} \in P_Z$ za svaki $Z \subseteq U$ veličine najviše k ($g_{|Z}$ pripada svim restrikcijama $C_{|Z}$ uslova čiji opsezi sadrže skup promenljivih Z, pa pripada i P_Z). Ovo svojstvo (k,l)–minimalne instance nazvaćemo $k - \textit{unapred}$[1].

Iz $(M1)$ sledi da, za svaki skup $U \subseteq V$ veličine l, instanca $\mathcal{J}$ zadovoljava k–unapred osobinu za neki uslov sa opsegom U, pa prema tome zadovoljava ovu osobinu za uslov D^U (budući da je ovo širi skup).

Takodje je lako videti da preslikavanje g u uslovu $C \subseteq D^U$ „preživljava" izvršavanje algoritma (k,l)–minimalnosti, tj. ostaje u uslovu C, ako i samo ako $g_{|W} \in P_W$ za svaki $W \subseteq U$ veličine najviše k. Dobijamo da rezultat algoritma (k,l)–minimalnosti ne zavisi od redosleda uklanjanja funkcija iz uslova. $\square$

Ovo znači da se od polazne instance $\mathcal{I}$ primenom algoritma dobija jedinstvena (k,l)–minimalna instanca $\mathcal{J}$. Ovu instancu nazivamo *(k,l)–minimalna instanca pridružena instanci $\mathcal{I}$.*

Za skupove rešenja polazne instance $\mathcal{I}$ i dobijene (k,l)–minimalne instace $\mathcal{J}$ važi sledeće:

- Funkcije koje uklanjamo iz uslova u drugom koraku algoritma imaju nedozvoljene vrednosti na odgovarajućim skupovima promenljivih (jer nisu u preseku uslova), pa ne mogu biti deo rešenja polazne instance $\mathcal{I}$. Dakle, postupkom se ne eliminiše nijedno rešenje, tj. ukoliko polazna instanca ima rešenje, ima ga i dobijena (k,l) minimalna instanca $\mathcal{J}$. (Ili, ekvivalentno, ukoliko je dobijena instanca $\mathcal{J}$ trivijana, tj. nema rešenje, nema ga ni polazna instanca $\mathcal{I}$.)

- U suprotnom slučaju, tj. ako instanca $\mathcal{J}$ ima rešenje, ne može se, u opštem slučaju, tvrditi da polazna instanca ima rešenje. Jezici uslova za koje važi i ova obrnuta implikacija čine posebnu klasu – klasu jezika sa relacionom širinom (k,l).

Definicija 4.3.4. *1. Jezik uslova Γ ima relacionu širinu (k,l) ako za svaku instancu $\mathcal{I}$ problema $CSP(\Gamma)$, $\mathcal{I}$ ima rešenje ukoliko je (k,l)–minimalna instanca pridružena instanci $\mathcal{I}$ netrivijalna (tj. ima rešenje).*

2. Ukoliko jezik uslova Γ ima relacionu širinu (k,k), kažemo da ima relacionu širinu k.

[1] Originalni naziv osobine u [4] je $k - forth$.

3. *Jezik uslova* Γ *ima* ograničenu *relacionu širinu ako ima relacionu širinu* (k, l) *za neke* k *i* l.

U [25] je pokazano da svaki jezik relacione širine $(1, k)$ za neki k ima širinu 1. Glavni rezultat rada [24] dokazuje da svaki jezik širine 2 ima širinu 1. Jedna od posledica rezultata izloženih u ovom poglavlju (posledica 4.5.7) je da svaki jezik koji ima ograničenu relacionu širinu ima relacionu širinu $(2, 3)$. Na osnovu ovoga dobijamo sledeću trihotomiju za relacionu širinu:

Teorema 4.3.5. *(Trihotomija relacione širine)*
Za svaki jezik uslova Γ *važi tačno jedna od sledećih izjava.*

1. Γ *ima relacionu širinu* 1.

2. Γ *ima relacionu širinu* $(2, 3)$ *i nema relacionu širinu* 2*, niti* $(1, l)$ *za bilo koji* $l \geq 1$.

3. Γ *nema ograničenu relacionu širinu.*

4.4 Karakterizacija ograničene širine

U ovom odeljku predstavljamo više karakterizacija ograničene relacione širine proizvoljnog jezika uslova Γ.

Najpre uvodimo pojmove koji se koriste u ovom odeljku i ostatku poglavlja.

Skup operacija na nepraznom skupu A je *klon operacija* na A ukoliko sadrži sva projektivna preslikavanja (svih arnosti) i zatvoren je za kompoziciju operacija. Na primer, skup svih term–operacija proizvoljne algebre je klon (term–operacija ove algebre). Takodje, skup svih polimorfizama datog digrafa[2] predstavlja klon (polimorfizama ovog digrafa).

Ako je W konačan skup, podskup C algebre $\mathbf{A}^W$ je podalgebra stepena ($\mathbf{A}^W$) algebre $\mathbf{A}$ ako je zatvoren za sve operacije algebre $\mathbf{A}^W$ (odnosno za sve operacije algebre $\mathbf{A}$ primenjene po koordinatama, videti odeljak 4.1).

Ako je $\mathbf{C}$ podalgebra stepena $\mathbf{A}^W$, $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}^W$, onda je projekcija $\mathbf{C}$ na bilo koji podskup $U \subseteq W$ takodje podalgebra stepena algebre $\mathbf{A}$ (ovde stepena $\mathbf{A}^U$). Specijalno, projekcija na bilo koju koordinatu $x \in W$ je poduniverzum od $\mathbf{A}$.

[2]Polimorfizam digrafa smo definisali na strani 123/124.

Definicija 4.4.1. *Neka je* Γ *jezik uslova na konačnom domenu* D. *Operacija* t *na* D *naziva se* polimorfizam *jezika* Γ *ako je svaka relacija* $R \in \Gamma$ *kompatibilna*[3] *sa operacijom* t. *Skup* D *zajedno sa svim polimorfizmima jezika* Γ *formira klon* $\mathbf{D}$, klon polimorfizama *jezika* Γ.

Na primer, operacija $f : D \longrightarrow D$ je unarni polimorfizam jezika Γ ukoliko za relaciju $R \in \Gamma$, arnosti n, i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ vazi sledeća implikacija: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \Rightarrow (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in R$.

Definicija 4.4.2. *Jezik uslova* Γ *je* jezgro *ako su svi njegovi unarni polimorfizmi bijekcije.*

U [41] je pokazano da se svakom jeziku uslova Γ može se pridružiti jedinstveno jezgro Γ' takvo da Γ ima relacionu širinu (k, l) akko Γ' ima ovu širinu.

Lema 4.4.3. *[41]*

1. *Za svaki* $k \leq l$, *jezik uslova ima relacionu širinu* (k, l) *ako i samo ako njegovo jezgro ima ovu širinu.*

2. *Jezik uslova* Γ *koji je jezgro ima ograničenu relacionu širinu ako i samo ako* Γ *zajedno sa svim jednočlanim unarnim relacijama ima ovo svojstvo.*

Primetimo da ukoliko je Γ jezik uslova sa svim unarnim jednočlanim relacijama, tj. $\{d\} \in \Gamma$ za sve $d \in D$, onda je klon $\mathbf{D}$ polimorfizama idempotentan, tj. za svaku operaciju t klona $\mathbf{D}$ važi $t(d, \ldots, d) = d$ za sve $d \in D$.

Napomena: U daljem tekstu ovog poglavlja klon polimorfizama $\mathbf{D}$ nekog jezika uslova Γ identifikuje se sa odgovarajućom algebrom – u pitanju je algebra čiji je univerzum skup D, a skup baznih operacija (pa samim tim i skup term–operacija) je posmatrani klon polimorfizama.

Navešćemo dve teoreme ([41], [5], [7]), koje, objedinjene, daju sledeći važan rezultat: konačan jezik uslova Γ koji sadrži sve jednočlane unarne relacije ima ograničenu relacionu širinu ako i samo ako klon polimorfizama $\mathbf{D}$ ovog jezika generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet (u literaturi se za desnu stranu ove ekvivalencije koristi skraćenica $\mathbf{D}$ je $SD(\wedge)$).

[3]Kompatibilnost operacije sa binarnom relacijom definisali smo u kontekstu polimorfizma digrafa, videti stranu 123/124. Kompatibilnost operacije sa n–arnom relacijom, za neki $n \in \omega$, definiše se analogno.

Teorema 4.4.4. *[41]*

Neka je Γ jezik uslova koji sadrži sve jednočlane unarne relacije i neka je $\mathbf{D}$ *njegov klon polimorfizama. Ako Γ ima ograničenu relacionu širinu, onda varijetet generisan sa* $\mathbf{D}$ *ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti (tj.* $\mathbf{D}$ *je $SD(\wedge)$).*

Teorema 4.4.5. *[5, 7]*

Neka je Γ konačan jezik uslova sa svim jednočlanim unarnim relacijama i neka je $\mathbf{D}$ *njegov klon polimorfizama. Ako varijetet generisan sa* $\mathbf{D}$ *ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda Γ ima ograničenu relacionu širinu.*

Sledeća teorema predstavlja karakterizaciju klonova koji imaju $SD(\wedge)$ svojstvo[4]:

Teorema 4.4.6. *[45]*

Idempotentan klon $\mathbf{D}$ *sa konačnim univerzumom D je $SD(\wedge)$ ako i samo ako postoji $n \in \omega$ takav da* $\mathbf{D}$ *ima wnu–operaciju t arnosti m za svaki $m \geq n$.*

Problem zadovoljenja uslova se može parametrizovati pomoću algebri.

Definicija 4.4.7. *Neka je* $\mathbf{D}$ *algebra. Problem zadovoljenja uslova nad* $\mathbf{D}$*, u oznaci $CSP(\mathbf{D})$, je CSP ograničen na instance u kojima je svaki uslov podalgebra stepena algebre* $\mathbf{D}$ *(tj. podalgebra od $\mathbf{D}^W$ za neki skup W).*

Neka je Γ jezik uslova na konačnom domenu D, i $\mathbf{D}$ je odgovarajući klon polimorfizama. Dalje, neka je $\mathcal{I}$ proizvoljna instanca problema $CSP(\Gamma)$, i $C \subseteq D^W$ uslov ove instance. Setimo se, uslov C predstavlja skup dozvoljenih preslikavanja skupa promenljivih W u domen D. Ako pretpostavimo da W ima n elemenata, ovaj uslov se može identifikovati sa n–arnom relacijom $R \subseteq D^n$ (ova relacija pripada jeziku uslova Γ, ili se od nje može, odgovarajućom permutacijom promenljivh skupa W, dobiti relacija koja pripada Γ, videti stranu 171). Budući da su polimorfizmi klona $\mathbf{D}$, po definiciji, kompatibilni sa relacijama jezika uslova Γ, dobijamo da se primenom operacija iz $\mathbf{D}$ (po koordinatama) na n–torke relacije R (tj. na elemente uslova C) takodje dobija n–torka relacije R (odnosno element iz uslova C). Dakle C nije samo podskup skupa D^W, već je i podalgebra algebre $\mathbf{D}^W$, odnosno podalgebra stepena algebre $\mathbf{D}$. Na osnovu prethodne definicije zaključujemo da je instanca $\mathcal{I}$ problema $CSP(\Gamma)$ takodje instanca $CSP(\mathbf{D})$.

Lema 4.4.8. *Neka je* $\mathbf{D}$ *algebra i $k \leq l$. Tada je (k, l)–minimalna instanca pridružena instanci $CSP(\mathbf{D})$ takodje instanca $CSP(\mathbf{D})$.*

[4]Ova karakterizacija je navedena u odeljku **1.4** kao Teorema 1.4.6. Navodimo je ponovo zbog razlike u formulaciji.

Dokaz. Potrebno je dokazati sledeće: ukoliko na instancu problema $CSP(\mathbf{D})$ primenimo algoritam (k,l)–minimalnosti, kao rezultat dobijamo takodje instancu problema $CSP(\mathbf{D})$. Na osnovu definicije 4.4.7, dovoljno je dokazati da eliminacijom funkcija iz uslova u koraku 2 ovog algoritma dobijamo podalgebre stepena algebre $\mathbf{D}$.

Neka je W skup promenljivih, neka su C_1, C_2 uslovi čiji opsezi sadrže W, i pretpostavimo da su C_1, C_2 podalgebre stepena od $\mathbf{D}$. Neka je $P = C_{1|W} \cap C_{2|W}$. Projekcije C_1 i C_2 na skup promenljivih W su takodje podalgebre stepena od $\mathbf{D}$, a isto važi i za njihov presek. Dakle, P je podalgebra stepena od $\mathbf{D}$. Nakon uklanjanja funkcija, C_i postaje $C_i' = \{f \in C_i \mid f_{|W} \in P\}$, a ovo je takodje podalgebra stepena od $\mathbf{D}$. □

4.5 Praška instanca

Na osnovu teoreme 4.3.5, hijerahija relacione širine završava tačno na nivou $(2,3)$. Objašnjenje ovog fenomena je da puna jačina $(2,3)$–minimalnosti nije neophodna da bi se garantovalo rešenje. Naime, pokazuje se da je dovoljno da instanca bude 1–minimalna i da zadovoljava odredjeno svojstvo globalne povezanosti koje je posledica $(2,3)$–minimalnosti (a nije posledica (k,l)–minimalnosti za $k < 2$ ili $l < 3$).

Instance koje zadovoljavaju ovo slabije svojstvo nazivamo *praške instance*. Ovaj koncept je upotrebljen za dokazivanje centralnog rezultata ovog poglavlja, tj. teoreme 4.5.4.

Pre nego što definišemo prasku instancu, neophodno je uvesti neke pretpostavke i pojmove.

Od ove tačke sve instance koje razmatramo su 1–minimalne (ovo su $(1,1)$–minimalne instance, videti definiciju 4.3.1). Za ovakvu instancu $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ i promenljivu $x \in V$ pišemo P_x umesto $P_{\{x\}}$ (videti pododeljak 4.3.1 za definiciju ovog skupa). U okolnostima kada želimo da naglasimo instancu pisaćemo $P_x^{(\mathcal{I})}$. Definicija $(1,1)$–minimalnosti je ekvivalentna sa sledećim uslovom: za svako x u V postoji P_x takav da je svaki uslov na nekom skupu W poddirektan proizvod skupova P_x, gde x pripada W. (Poddirektan proizvod skupova P_x znači da je uslov podskup direktnog proizvoda ovih skupova, takav da je njegova projekcija na svaku koordinatu ceo P_x.)

Definicija 4.5.1. *Neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ 1–minimalna CSP instanca.* Putanja *dužine $k-1 > 0$ od x_1 do x_k (u $\mathcal{I}$) je uredjena $(2k-1)$–torka $p = (x_1, C_1, x_2, C_2, \ldots,$ $x_{k-1}, C_{k-1}, x_k)$, pri čemu $x_i \in V$ za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$, $C_i \in \mathcal{C}$, i $\{x_i, x_{i+1}\}$ je u* *opsegu uslova C_i za svaki $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Skup svih promenljivih iz putanje p označavamo sa $\|p\|$, odnosno $\|p\| = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Putanja p je zatvorena ukoliko je $x_1 = x_k$.*

Realizacija *putanje p u instanci $\mathcal{I}$ je uredjena $(k-1)$–torka $(f_1, \ldots, f_{k-1})$ takva da, za svaki $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ važi $f_i \in C_i$ i $f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1})$. Kažemo da ova realizacija povezuje $f_1(x_1)$ i $f_{k-1}(x_k)$. Kažemo da putanja p povezuje $a \in P_x$ i $b \in P_y$ ako postoji realizacija putanje p koja povezuje a i b.*

Za $X \subseteq V$, $x \in X$ i $a, b \in P_x$, kažemo da su a i b povezani u X ako postoji putanja p od x do x koja povezuje a i b takva da $\|p\| \subseteq X$ (ovaj pojam zavisi od promenjive x, što bi uvek trebalo da bude jasno iz konteksta).

Ako je p putanja od x do y i $A \subseteq P_x$, definišemo podskup $A + p$ od P_y na sledeći način:

$$A + p = \{b \in P_y : (\exists a \in A)\ p \text{ povezuje } a \text{ i } b\}.$$

Ako su $p = (x_1, C_1, \ldots, x_k)$ i $q = (y_1, C'_1, \ldots, y_l)$ dve putanje takve da $x_k = y_1$, definišemo $p + q = (x_1, C_1, \ldots, x_k = y_1, C'_1, \ldots, y_l)$ i $-p = (x_k, \ldots, C_1, x_1)$.

Za zatvorenu putanju p i $m \geq 1$ može se definisati

$$m \times p = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{m\times}.$$

Pisaćemo $A - p$ umesto $A + (-p)$. Kako je $(A+p)+q = A+(p+q)$ (uvek kada izrazi imaju smisla) može se prosto pisati $A + p + q$. Takodje primetimo da $P_x + p = P_y$, $A \subseteq A + p - p$ i $A + (x, C, x) = A$, gde je p putanja od x do y, $A \subseteq P_x$, i C je uslov čiji opseg sadrži x.

Sada možemo definisati prašku instancu.

Definicija 4.5.2. *CSP instanca $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ je* praška instanca *ako je 1–minimalna i za svaki $x \in V$, svaku zatvorenu putanju p od x do x, i svaka dva elementa $a, b \in P_x$ važi sledeće: ako su a i b povezani u $\|p\|$, tada postoji $k > 0$ takav da putanja $k \times p$ povezuje a i b.*

Praška instanca je slabiji uslov od $(2,3)$–minimalne instance:

Lema 4.5.3. *Svaka $(2,3)$–minimalna instanca je praška instanca.*

Dokaz. Dokaz leme se može pronaći u [5], kao Lemma IV.8. □

Teorema koja sledi je centralni rezultat rada [4]. Naime, Teorema o trihotomiji relacione širine, 4.3.5, je posledica ove teoreme.

Teorema 4.5.4. *Neka je* $\mathbf{D}$ *idempotentan* $SD(\wedge)$ *klon. Tada svaka netrivijalna praška instanca problema* $CSP(\mathbf{D})$ *ima rešenje.*

Dokaz. Dokaz teoreme je, zbog dužine, izložen u odeljku 4.6 ovog poglavlja. □

Navešćemo neke direktne posledice ove teoreme:

Posledica 4.5.5. *Neka je* $\mathbf{D}$ *idempotentan* $SD(\wedge)$ *klon. Tada svaka* $(2,3)$*–minimalna instanca problema* $CSP(\mathbf{D})$ *ima rešenje.*

Dokaz. Tvrdjenje sledi iz leme 4.5.3 i teoreme 4.5.4. □

Posledica 4.5.6. *Neka je* Γ *jezik uslova koji sadrži sve jednočlane unarne relacije i neka je* $\mathbf{D}$ *odgovarajući klon polimorfizama. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni.*

1. $\mathbf{D}$ *je* $SD(\wedge)$.

2. Γ *ima relacionu širinu* $(2,3)$.

3. Γ *ima ograničenu relacionu širinu.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{D}$ ima svojstvo $SD(\wedge)$ (setimo se, ovo znači da $\mathbf{D}$ generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet), i neka je $\mathcal{I}$ instanca problema $CSP(\Gamma)$. Tada je $\mathcal{I}$ instanca problema $CSP(\mathbf{D})$ (videti stranu 176) i, prema lemi 4.4.8, $(2,3)$–minimalna instanca $\mathcal{J}$ koja odgovara instanci $\mathcal{I}$ je takodje instanca $CSP(\mathbf{D})$. Ukoliko je $\mathcal{J}$ netrivijalna, onda ima rešenje prema posledici 4.5.5.

Implikacija „$2 \Rightarrow 3$" je trivijalna a „$3 \Rightarrow 1$" sledi iz teoreme 4.4.4. □

Posledica 4.5.7. *Neka je* Γ *jezik uslova. Ako* Γ *ima ograničenu relacionu širinu, onda* Γ *ima relacionu širinu* $(2,3)$.

Dokaz. Pretpostavimo da Γ ima ograničenu relacionu širinu. Neka je Γ' jezgro od Γ prošireno svim unarnim jednočlanim relacijama i neka je $\mathbf{D}$ algebra polimorfizama od Γ'. Prema lemi 4.4.3, Γ' ima ograničenu relacionu širinu, pa iz teoreme 4.4.4 dobijamo da $\mathbf{D}$ generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet ($\mathbf{D}$ je $SD(\wedge)$). Prema posledici 4.5.6, Γ' ima relacionu širinu $(2,3)$, što znači da Γ ima relacionu širinu $(2,3)$. □

Dve korisne osobine praških instanci su predstavljene narednim lemama:

Lema 4.5.8. *Neka je* $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ *praška instanca,* $x \in V$*, i* p *zatvorena putanja od* x *do* x*. Tada postoji* $m > 0$ *takav da za svaki* $k \geq m$ *i svaka dva elementa* $a, b \in P_x$ *važi sledeće: ako su* a *i* b *povezani u* $\|p\|$*, onda* $k \times p$ *povezuje* a *i* b*.*
Dokaz. *Dokaz leme se može pronaći u [5], Lemma IV.10, deo (Pα).* □

Lema 4.5.9. *Neka je* $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ *praška instanca,* $x, y \in V$*,* p *putanja od* x *do* y*,* q *putanja od* y *do* x*,* $A \subseteq P_x$*,* $B \subseteq P_y$*, i* $C \in \mathcal{C}$ *uslov čiji opseg sadrži* $\{x, y\}$*. Ako je* $A + p = B$ *i* $B + q = A$*, onda je* $A + (x, C, y) = B$*.*

Dokaz. Dokaz leme se može pronaći u [5], Lemma IV.10, deo $(P\beta)$. □

Sledeće osobine praških instanci se mogu dokazati indukcijom pomoću leme 4.5.9.

(**P1**) Za svaku zatvorenu putanju p od x do x i svaki $A \subseteq P_x$, ako je $A + p = A$, onda je $A + p - p = A$.

(**P2**) Za svake dve zatvorene putanje p, q od x do x i svaki $A \subseteq P_x$, ako je $A+p+q = A$, onda je $A + p = A$.

4.6 Dokaz teoreme 4.5.4

Ideja dokaza teoreme 4.5.4 je da se praška instanca postepeno smanjuje sve dok se ne dobije da svi skupovi P_x imaju samo po jedan element. Tako dobijamo očigledno rešenje za ovu instancu – preslikavanje koje promenljivoj x dodeljuje jedinstveni element skupa P_x.

Neka je $\mathbf{D}$ idempotentan $SD(\wedge)$ klon i neka je $\mathcal{I} = (V, D, \mathcal{C})$ praška instanca problema $CSP(\mathbf{D})$ takva da $|P_x| > 1$ za neki $x \in V$. Svaki skup P_x je poduniverzum od $\mathbf{D}$ (pošto je projekcija podalgebre stepena od $\mathbf{D}$), i odgovarajuću podalgebru od $\mathbf{D}$ označićemo sa $\mathbf{P}_x$.

Pronaći ćemo n–arnu operaciju t algebre $\mathbf{D}$, neprazan podskup $X \subseteq V$, i podskupove $P_x^i \subseteq P_x$, $x \in V$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ takve da:

($D1$) P_x^0 je pravi podskup od P_x za svaki $x \in X$,
$P_x^i = P_x$ za svaki $x \in V \setminus X$, $i \in \{0, \ldots, n\}$,

($D2$) P_x^i je poduniverzum od $\mathbf{P}_x$ za svaki $x \in V$, $i \in \{0, \ldots, n\}$,

($D3$) $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$ za svaki $x \in X$, $y \in V$, $i \in \{0, \ldots, n\}$ i svaki uslov $C \in \mathcal{C}$ čiji opseg sadrži $\{x, y\}$,

($D4$) $t(a_1, \ldots, a_n) \in P_x^0$ za sve $x \in V$, $a_1, \ldots, a_n \in P_x$, takve da $a_i \in P_x^i$ važi za sve osim za najviše jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Konstrukcija zavisi od prisustva, odnosno odsustva, tzv. *apsorbujućih poduniverzuma.*

Definicija 4.6.1. *Poduniverzum A idempotentnog klona* $\mathbf{P}$ *je* apsorbujući *ako postoji operacija t klona* $\mathbf{P}$ *arnosti $n > 1$, takva da $t(a_1, \ldots, a_n) \in A$ kad god je $a_i \in P$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $a_i \in A$ za sve osim najviše jednog $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
Apsorbujući poduniverzum A od $\mathbf{P}$ *je* pravi *ako $\emptyset \neq A \neq P$.*

Slučaj kada neki skup P_x, $x \in V$, ima pravi apsorbujući poduniverzum razmatramo u pododeljku 4.6.1. U ovom slučaju operacija t može biti bilo koja operacija koja je svedok apsorpcije.

Slučaj kada nijedan skup P_x nema pravi apsorbujući poduniverzum razmatramo u pododeljku 4.6.2. Operaciju t u ovom slučaju dobijamo na osnovu sledeće teoreme:

Teorema 4.6.2. *Neka je* $\mathbf{P}$ *idempotentan $SD(\wedge)$ klon. Tada postoji operacija t klona* $\mathbf{P}$ *i elementi $c_1, \ldots, c_n, b \in P$ tako da $t(a_1, \ldots, a_n) = b$ kad god $a_i \in P$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $a_i = c_i$ za sve osim najviše jednog $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Konstrukcija je malo komplikovanija nego u slučaju kada postoji pravi apsorbujući poduniverzum jer nedostatak apsorpcije ima veliki uticaj na oblik relacija, što se vidi iz teoreme koja sledi.
Podskup R skupa $P \times Q$ nazivamo *povezanim* ako je projekcija na prvu (drugu, redom) koordinatu jednaka P (Q, resp.) i tranzitivno zatvorenje relacije $\{(a,b) \in P^2 : (\exists c \in Q)(a,c),(b,c) \in R\}$ je jednako P^2.

Teorema 4.6.3. *Neka je* $\mathbf{D}$ *klon koji generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet, R poduniverzum od* $\mathbf{D}^2$*, P i Q projekcije R na prvu i drugu koordinatu redom, i neka su* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *odgovarajuće podalgebre od* $\mathbf{D}$*. Ako ni* $\mathbf{P}$ *ni* $\mathbf{Q}$ *nemaju pravi apsorbujući poduniverzum i R je povezan, onda $R = P \times Q$.*

U pododeljku 4.6.3 pokazaćemo da uklanjanjem uredjenih k-torki iz skupova P_x^0 dobijamo prašku instancu $\mathcal{J}$ problema $CSP(\mathbf{D})$, sa $P_x^{(\mathcal{J})} = P_x^0$ za sve $x \in V$. Ovo će kompletirati dokaz, jer na osnovu ($D2$) najmanje jedan od skupova P_x postaje manji, pa ponavljanjem ove procedure dobijamo instancu sa $|P_x| = 1$ za sve $x \in V$.
Neke jednostavne algebarske činjenice koje se koriste u dokazu izložene su u sledeće dve leme.

Lema 4.6.4. *Neka $x, y \in V$, p putanja od x do y.*

(1) Skup $S = \{(a,b) \in P_x \times P_y : \ p$ povezuje a i $b\}$ je poduniverzum od $\mathbf{D}$ *i njegova projekcija na prvu (drugu, resp.) koordinatu je P_x (P_y, resp.).*

(2) Ako je s k–arna operacija klona $\mathbf{D}$, $A_1, \ldots, A_k, B \subseteq P_x$ i $s(a_1, \ldots, a_k) \in B$ za sve $a_i \in A_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, onda za sve $a'_1, \ldots, a'_k \in P_y$ takve da $a'_i \in A_i + p$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ imamo $s(a'_1, \ldots, a'_k) \in B + p$.

(3) Ako je A poduniverzum (apsorbujući poduniverzum, resp.) od $\mathbf{P}_x$, onda je $A + p$ poduniverzum (apsorbujući poduniverzum, resp.) od $\mathbf{P}_y$.

Dokaz. Prvi deo od (1) sledi iz činjenice da je operacija klona $\mathbf{D}$ primenjena (po komponentama) na realizacije putanje p takodje realizacija p. Drugi deo sledi iz 1–minimalnosti.

(2) sledi iz (1).

Da bismo dokazali (3) primenjujemo (2) na $A_1 = \cdots = A_k = B = A$ (u delu sa apsorpcijom uzimamo $A_i = P_x$ za jedan i). □

Lema 4.6.5. *Ako $R, S \leq \mathbf{D}^2$ onda je relaciona kompozicija*

$$R \circ S = \{(a, c) \in D \times D : (\exists b \in D)(a, b) \in R \text{ i } (b, c) \in S\}$$

takodje poduniverzum od $\mathbf{D}^2$.

Dokaz. Direktnom proverom. □

4.6.1 Apsorpcija

Pretpostavimo da $z \in V$ je takav da $\mathbf{P}_z$ ima pravi apsorbujući poduniverzum E. Neka je t operacija algebre $\mathbf{P}_z$ (i $\mathbf{D}$) koja je svedok apsorpcije i neka je n njena arnost.

Definišemo preduredjenje (tj. refleksivnu i tranzitivnu binarnu relaciju) na skupu svih parova (A, x) takvih da $x \in V$ i $A \subsetneq P_x$:

$$(A, x) \leq (B, y) \text{ akko } B = A + p \text{ za neku putanju } p \text{ od } x \text{ do } y.$$

Neka je $\mathcal{M}$ maksimalna komponenta ovog preduredjenja veća ili jednaka (E, z).

Tvrdjenje 4.6.6. *Za sve $x \in V$, ako $(A, x), (B, x) \in \mathcal{M}$, onda $A = B$.*

Dokaz. Pošto je $(A, x) \leq (B, x) \leq (A, x)$, postoje zatvorene putanje p, q od x do x takve da $A + p = B$ i $B + q = A$. Onda je $A + p + q = A$ i, prema osobini (P2) iz prethodnog odeljka, dobijamo $A = A + p = B$. □

Neka je X skup svih promenljivih koje se pojavljuju u nekom paru iz $\mathcal{M}$. Za svaki $x \in X$, prethodno tvrdjenje dozvoljava nam da definišemo $P^0_x = P^1_x = \cdots = P^n_x$

kao jedinstveni podskup od P_x takav da $(P_x^i, x) \in \mathcal{M}$. Prema tome, imamo $\mathcal{M} = \{(P_x^i, x) : x \in X\}$.
Za $x \in X$ uzećemo da je $P_x^i = P_x$ za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Preostaje da se verifikuju osobine od (D1) do (D4). (D1) je zadovoljeno prema konstrukciji. (D2) i (D4) važe trivijalno za $x \in V \setminus X$. Za promenjive $x \in X$ upotrebićemo deo (3) leme 4.6.4: kako je svaki P_x^i, za $x \in X$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, dobijen od (E, z) dodavanjem putanje od z do x, P_x^i je apsorbujući poduniverzum od $\mathbf{P}_x$, pa su prema tome osobine (D2) i (D4) zadovoljene.
Da bismo verifikovali (D3), uzimamo $x \in X$, $y \in V$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, i uslov $C \in \mathcal{C}$ čiji opseg sadrži $\{x, y\}$. Ako je $y \in X$, onda, budući da je $(P_x^i, x) \leq (P_y^i, y) \leq (P_x^i, x)$, postoje putanje p od x do y i q od y do x takve da $P_x^i + p = P_y^i$ i $P_y^i + q = P_x^i$. Sada je $P_x^i + (x, C, y) = P_y^i$ na osnovu leme 4.5.9. Ako, pak, $y \in V \setminus X$, onda je $P_x^i + (x, C, y) = P_y = P_y^i$, pošto bi u suprotnom par $(P_x^i + (x, C, y), y)$ pripadao preduredjenom skupu, što znači da bi važilo $y \in X$ zbog maksimalnosti $\mathcal{M}$.

4.6.2 Bez apsorpcije

U ovom pododeljku pretpostavljamo da nijedna algebra $\mathbf{P}_x$ nema pravi apsorbujući poduniverzum.
Kongruencija $\sim$ algebre $\mathbf{P}$ je *maksimalna* ako je jedina kongruencija koja sadrži $\sim$ i nije jednaka $\sim$ puna kongruencija P^2. Kako je dijagonala $\{(a, a) : a \in P\}$ takodje kongruencija algebre $\mathbf{P}$, svaka najmanje dvoelementna konačna algebra ima maksimalnu kongruenciju.
Neka je $z \in V$ bilo koja promenljiva takva da $|P_z| > 1$ i neka je $\sim$ maksimalna kongruencija na $\mathbf{P}_z$. Na osnovu teoreme 4.6.2, imamo n–arnu operaciju t na $\mathbf{P}_z$ i elemente $c_1, \ldots, c_n, b \in P_z$ takve da $t(a_1, \ldots, a_n) = b$ kad god $a_i \in P_z$ i $|\{i : a_i \neq c_i\}| \leq 1$. Uzećemo da je $P_z^0 = b/_\sim$ i $P_z^i = c_i/_\sim$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Skup X je definisan sa: $X = \{x \in V \mid \textit{postoji putanja } p_x \textit{ od } z \textit{ do } x \textit{ takva da } P_z^0 + p \subsetneq P_x\}$.
Fiksiraćemo putanje p_x iz definicije X (kada imamo višestruki izbor uzimamo bilo koju). Za $x \in X$ uzećemo $P_x^i = P_z^i + p_x$ za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$, a za $x \in V \setminus X$ uzimamo $P_x^i = P_x$.
Preostaje da se verifikuju osobine od (D1) do (D4).
Osobina (D1) je zadovoljena prema konstrukciji.
Osobine (D2) i (D4) su trivijalne za $x \in V \setminus X$. Dokazaćemo da važe za $x = z$:

Tvrdjenje 4.6.7. *Osobine (D2) i (D4) su zadovoljene za $x = z$.*

Dokaz. Osobina (D2) sledi iz idempotentnosti klona $\mathbf{D}$: ako je s k–arna operacija algebre $\mathbf{P}_x$ i $c_1, \ldots, c_k \in P_z^i$, tada $t(c_1, \ldots, c_k) \sim t(c_1, \ldots, c_1) = c_1$, pa $t(c_1, \ldots, c_k) \in c_1/_\sim = P_z^i$.
Osobina (D4): ako $a_i \in P_z$ za sve i i $a_i \in P_z^i$ za sve osim najviše jednog i, recimo $i = 1$, tada je $t(a_1, \ldots, a_n) \sim t(a_1, c_2 \ldots, c_n) = b$, pa je $t(a_1, \ldots, a_n) \in P_z^0$. □

Da bismo dokazali (D4) za $x \in X$, iskoristićemo deo (2) leme 4.6.4 pri čemu $p = p_x$, $B = P_z^0$, i $A_i = P_z^i$ za sve osim jednog i, za koji ćemo izabrati $A_i = P_z$.
Slično, (D2) sledi iz dela (3) iste leme.
Da bismo verifikovali (D3), upotrebićemo sledeću posledicu teoreme 4.6.3:

Tvrdjenje 4.6.8. *Za svaki $x \in V$ i svaku putanju p od z do x važi tačno jedan od sledeća dva iskaza:*

(1) Za bilo koje $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ za koje važi $P_z^i \neq P_z^j$, skupovi $P_z^i + p$ i $P_z^j + p$ su disjunktni.

(2) $P_z^i + p = P_x$ za sve $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Dokaz. Neka je $S = \{(a, b) \in P_z \times P_x : p \text{ povezuje } a \text{ i } b\}$,
$R = \sim \circ S = \{(a, b) \in P_z \times P_x : p \text{ povezuje neki } a' \sim a \text{ i } b\}$,
$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.
Kako su S (videti deo (1) leme 4.6.4) i $\sim$ podalgebre stepena od $\mathbf{D}$, relaciona kompozicija $R = \sim \circ S$ je, prema lemi 4.6.5, podalgebra stepena od $\mathbf{D}$. Jasno, projekcija R na prvu koordinatu je jednaka P_z, a projekcija na drugu koordinatu je jednaka P_x.
Neka je β tranzitivno zatvorenje od $\{(a, b) \in P_z \times P_z : (\exists c \in P_x)(a, c), (b, c) \in R\}$. Ova ekvivalencija je kongruencija na $\mathbf{P}_z$ prema lemi 4.6.5, jer $R \leq (\mathbf{P}_z)^2$ i $\beta = R \circ R^{-1} \circ R \ldots$ (konačno mnogo puta).
Kako je $\sim \subseteq \beta$ i $\sim$ je maksimalna kongruencija, ili $\beta = \sim$, ili $\beta = P_x \times P_x$. Prvi slučaj je preformulacija tvrdjenja (1). U drugom slučaju imamo $R = P_z \times P_z$ prema teoremi 4.6.3, a ovo je preformulacija tvrdjenja (2). □

Za svaki $x \in X$, slučaj (1) će važiti za putanju p_x, jer za $\sim$–klasu $b/_\sim = P_z^0$ imamo $P_z^0 + p_x \subsetneq P_x$. Prema tome, ako $P_z^i \neq P_z^j$, onda su $P_x^i = P_z^i + p_x$ i $P_x^j = P_z^j + p_x$ disjunktni. Sledi da za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$ imamo $P_x^i - p_x = P_z^i$.
Sada možemo dokazati (P3). Posmatraćemo $x \in X$, $y \in V$, i uslov $C \in \mathcal{C}$ čiji opseg sadrži $\{x, y\}$. Ako je $y \in V \setminus X$, onda važi $P_z^0 + p_x + (x, C, y) = P_y$, jer bi u suprotnom važilo $y \in X$ prema definiciji. Ovo znači da slučaj (2) tvrdjenja 4.6.8

važi za putanju $p = p_x + (x, C, y)$, pa prema tome $P^i_z + p_x + (x, C, y) = P_y$. Kako je $P^i_x = P^i_z + p_x$, dobijamo $P^i_x + (x, C, y) = P_y = P^i_y$. Ako je, pak, $y \in X$, imamo $P^i_x - p_x = P^i_z$ i $P^i_y - p_y = P^i_z$ (prema prethodnom). Onda je $P^i_x - p_x + p_y = P^i_y$ i $P^i_y - p_y + p_x = P^i_x$, pa iz leme 4.5.9 dobijamo $P^i_x + (x, C, y) = P^i_y$.

4.6.3 Manja instanca

U ovoj tački imamo n–arnu operaciju t klona $\mathbf{D}$, neprazan podskup $X \subseteq V$ i podskupove $P^i_x \subseteq P_x$, za $x \in V$, $i \in \{0, \dots, n\}$, koji zadovoljavaju tvrdjenja od (D1) do (D4).
Definišemo instance $\mathcal{I}^i = (V, D, \mathcal{C}^i)$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ koje su restrikcije instance $\mathcal{I}$ na podskupove P^i_x. Preciznije, uzećemo da je $\mathcal{C}^i = \{C^i : C \in \mathcal{C}\}$, gde je za uslov C sa opsegom W, uslov C^i definisan ovako: $C^i = \{f \in C : (\forall x \in W) f(x) \in P^i_x\}$.
Svaki P^i_x je, prema (D2), poduniverzum od $\mathbf{P}_x$, pa prema tome i poduniverzum od $\mathbf{D}$. Sledi da je svaki C^i podalgebra stepena od $\mathbf{D}$. Instanca $\mathcal{I}^i$ je, dakle, instanca problema $CSP(\mathbf{D})$.

Tvrdjenje 4.6.9. *Za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$, instanca $\mathcal{I}^i$ je 1–minimalna, sa $P^{(\mathcal{I}^i)}_x = P^i_x$ za svaki $x \in V$.*

Dokaz. Potrebno je dokazati da je, za svaki $C \in \mathcal{C}$ i svaki x u opsegu W uslova C, projekcija A skupa C^i na x jednaka P^i_x. Inkluzija $A \subseteq P^i_x$ je trivijalna, pa ćemo uzeti da $a \in P^i_x$ i pokazati da $a \in A$.
Pretpostavimo najpre da je $x \in X$. Neka je f bilo koji element uslova C takav da $f(x) = a$. Prema (D3), za svaki $y \in W$ važi da $P^i_x + (x, C, y) = P^i_y$, pa je $f(y) \in P^i_y$. Ovo znači da je $f \in C^i$, pa $a = f(x) \in A$.
Pretpostavimo sada da $x \notin X$ i da postoji $y \in W \setminus X$. Tada, na osnovu (D3) i drugog dela (D1), dobijamo $P^i_y + (y, C, x) = P_x$. Prema tome, postoji $f \in C$ takav da $f(y) \in P^i_y$ i $f(x) = a$. Na isti način kao u prethodnom slučaju (upotrebom y umesto x) dobijamo da $f \in C^i$ i zatim $a \in A$.
Konačno, ako je $X \cap W = \emptyset$, onda, na osnovu drugog dela tvrdjenja (D1), dobijamo $C = C^i$ pa prema tome i $A = P_x = P^i_x$. $\square$

Preostaje da se pokaže da je $\mathcal{J} = \mathcal{I}^0$ praška instanca. Da bismo razlikovali putanje u $\mathcal{I}$ i u instancama $\mathcal{I}^i$ upotrebićemo sledeću notaciju: ako je $p = (x_1, C_1, x_2, C_2, \dots)$ putanja u $\mathcal{I}$, pisaćemo p^i za odgovarajuću putanju u $\mathcal{I}^i$, odnosno putanju $p^i = (x_1, C^i_1, x_2, C^i_2, \dots)$.

Neka je $x \in V$, $a, b \in P_x^{(\mathcal{J})} = P_x^0$, p zatvorena putanja od x do x, i pretpostavimo da su a i b povezani u $\|p\|$ u instanci $\mathcal{I}$. Želimo da pokažemo da $k \times p^0$ povezuje a i b za neki k (da bismo pokazali da je $\mathcal{J}$ praška instanca mogli bismo da upotrebimo jaču pretpostavku da su a i b povezani u $\|p\|$ u instanci $\mathcal{I}^0$).

Neka je m ceo broj iz leme 4.5.8. Specijalno, ako su $a', b' \in P_x^0$ povezani u $\|p\|$ onda $m \times p$ povezuje a' i b'.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da $x \in V \setminus X$ (drugi slučaj je jednostavna posledica i razmatramo ga kasnije). Pokazaćemo da $nm \times p^0$ povezuje a i b primenjujući operaciju t na n–torku realizacija $\mathbf{f}^i = (f^i_{1,1}, \ldots, f^i_{1,ml}, f^i_{2,1}, \ldots, f^i_{2,ml}, \ldots, \ldots, f^i_{n,ml})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ putanje $nm \times p$, gde l označava dužinu p.

Ove realizacije konstruišemo tako da važi sledeće:

- Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, realizacija $\mathbf{f}^i$ počinje u a i završava se u b, odnosno $f^i_{1,1}(x) = a$ i $f^i_{n,ml}(x) = b$.

- Za svaka dva $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takva da $i \neq j$, deo $(f^i_{j,1}, \ldots, f^i_{j,ml})$ realizacije $\mathbf{f}^i$ je realizacija od $m \times p^i$.

Realizacija $\mathbf{f}^i$ (i–ta po redu) pronalazi se na sledeći način: kako je $a \in P_x = P_x^i$ (setimo se da $x \in V \setminus X$), postoji realizacija $(f^i_{1,1}, \ldots, f^i_{i-1,ml})$ putanje $(i-1)m \times p^i$ u kojoj je $f^i_{1,1}(x) = a$. Slično, postoji realizacija $(f^i_{i+1,1}, \ldots, f^i_{n,ml})$ putanje $(n-i)m \times p^i$ u kojoj je $f^i_{n,ml}(x) = b$. Preostaje da se popuni i–ti segment. Neka je $a' = f^i_{i-1,ml}(x)$, $b' = f^i_{i+1,1}(x)$ (za $i = 1$ uzećemo $a' = a$, za $i = n$ uzimamo $b' = b$). Elementi a' i b' su povezani u $\|p\|$ u instanci $\mathcal{I}$ pošto putanja $-(i-1)m \times p$ povezuje a' i a, elementi a i b su povezani u $\|p\|$, i putanja $(n-i)m \times p$ povezuje b i b'. Prema tome $m \times p$ povezuje a' i b'. Uzimamo bilo koji realizaciju $(f^i_{i,1}, \ldots, f^i_{i,ml-1})$ koja je svedok za ovo. Ovim smo završili konstrukciju $\mathbf{f}^i$.

Sada definišemo $f_{i,j} = t(f^1_{i,j}, \ldots, f^n_{i,j})$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, ml\}$. Za svaki x u domenu $f_{i,j}$ i za svaki $i' \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq i'$, imamo $f^{i'}_{i,j}(x) \in P_x^i$, pa prema tome $f_{i,j}(x) \in P_x^0$ na osnovu (D4). Sledi da je $\mathbf{f} = (f_{1,1}, \ldots, f_{n,ml})$ realizacija od p^0. Dalje, kako je operacija t idempotentna, $f_{1,1}(x) = t(f^1_{1,1}, \ldots, f^n_{1,1}) = t(a, \ldots, a) = a$ i $f_{n,ml}(x) = b$. Dakle $\mathbf{f}$ je svedok da $nm \times p^0$ povezuje a i b, kao što je trebalo dokazati.

Ostaje da razmotrimo slučaj kada $x \in X$. Ako svaka promenljiva iz $\|p\|$ pripada X, onda je, prema (D3), svaka realizacija putanje $m \times p$ koja je svedok da ova putanja povezuje a i b zapravo realizacija za $m \times p^0$. Možemo, dakle, pretpostaviti da neki $y \in \|p\|$ ne pripada X. Možemo pisati $p = p_1 + p_2$, pri čemu p_2 počinje sa y. Jasno, postoje $a', b' \in P_y^0$ takvi da p_1 povezuje a i a' i p_2 povezuje b' i b. Prethodni slučaj primenjen na putanju $p_2 + p_1$ i elemente a', b' (primetimo da su ovi elementi povezani u $\|p_2 + p_1\|$) daje nam da $mn \times (p_2 + p_1)^0$ povezuje a' i b'. Tada putanja $(p_1 + mn \times (p_2 + p_1) + p_2)^0 = (mn + 1) \times p^0$ povezuje a i b. Ovim je dokaz teoreme 4.5.4 završen.

4.7 Posledice

4.7.1 Svojstvo preseka

Iz posledice 4.5.5 direktno sledi potvrdan odgovor na Hipotezu 1 u [49] o sledećem svojstvu preseka za poduniverzume.

Definicija 4.7.1. *Za $k > 0$ i $B, C \subseteq D^n$, kažemo da su B i C k–jednaki ako su za svaki podskup I od $\{1, \ldots, n\}$ veličine najviše k, projekcije B i C na koordinate skupa I jednake.*

Kažemo da klon $\mathbf{D}$ (sa konačnim univerzumom D) ima svojstvo k–preseka ako za svaki $n > 0$ i svaki $B \leq \mathbf{D}^n$ važi sledeće:

$$\bigcap \{C \leq \mathbf{D}^n : C \ i \ B \ su \ k - jednaki\} \neq \emptyset.$$

U [49] je dokazano da ukoliko idempotentan klon $\mathbf{D}$ nije $SD(\wedge)$, onda $\mathbf{D}$ ne zadovoljava svojstvo k–preseka ni za jedan $k > 0$. Postavljena je hipoteza da važi i obrnuto.

Iz ovih rezultata (posledica 4.5.5) sledi da obrnuto važi već za $k = 2$.

Posledica 4.7.2. *Svaki idempotentan $SD(\wedge)$ klon $\mathbf{D}$ na konačnom skupu zadovoljava svojstvo 2–preseka.*

Dokaz. Neka je $n > 0$, $B \leq \mathbf{D}^n$ i neka je $R_1, \ldots R_k \leq \mathbf{D}^n$ lista svih podalgebri stepena koje su 2–jednake sa B. Treba pokazati da $\cap_{i=1}^{k} R_i \neq \emptyset$. Tvrdjenje važi trivijalno za $n \leq 2$, pa pretpostavimo da $n \geq 3$. Možemo posmatrati relacije R_i kao uslove instance $\mathcal{I} = (D, V, \mathcal{C})$, gde je $V = \{1, \ldots, n\}$. Instanca $\mathcal{I}$ je $(2, 3)$–minimalna pošto su svi R_i 2–jednaki sa B, pa prema tome ima rešenje prema posledici 4.5.5. Rešenje ove instance daje nam element preseka $R_1 \cap \cdots \cap R_k$. □

4.7.2 Problem odlučivanja ograničene širine

Iz posledice 4.5.5 sledi i dublji rezultat – sledeća karakterizacija $SD(\wedge)$ klonova[5]:

[5] Teorema je navedena ranije, odeljak **1.4**, teorema 1.4.7.

Teorema 4.7.3. *[40] Idempotentan klon* $\mathbf{D}$ *sa konačnim univerzumom* D *generiše kongruencijski* $\wedge$*–poludistributivan varijetet ako i samo ako* $\mathbf{D}$ *ima wnu–operacije* t_1 *i* t_2 *arnosti* 3 *i* 4 *redom, takve da, za sve* $a, b \in D$

$$t_1(a, a, b) = t_2(a, a, a, b).$$

Za jezik uslova Γ koji sadrži sve jednočlane unarne relacije, pitanje egzistencije polimorfizama t_1, t_2 koji zadovoljavaju uslove teoreme 4.7.3 može se posmatrati kao instanca $CSP(\Gamma)$. Ova ideja sa može iskoristiti da se dobije efikasan algoritam odlučivanja za ove polimorfizme.

Tvrdjenje 4.7.4. *Neka je* $\mathbf{D}$ *klon polimorfizama datog konačnog jezika uslova* Γ *koji sadrži sve unarne jednočlane relacije. Tada postoji algoritam sa polinomnim vremenom izvršavanja koji odlu-čuje da li klon* $\mathbf{D}$ *ima svojstvo* $SD(\wedge)$*. (Ukoliko* $\mathbf{D}$ *ima ovo svojstvo, algoritam može vratiti i dokaz – par operacija* (t_1, t_2) *klona* $\mathbf{D}$ *koje zadovoljavaju uslove teoreme 4.7.3.)*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [4]. □

Posledica 4.7.5. *Postoji algoritam koji se izvršava u polinomnom vremenu, a koji odlučuje da li konačan jezik uslova* Γ *koji je jezgro ima ograničenu relacionu širinu.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [4]. □

Poglavlje 5

Nove Maljcevljeve karakterizacije

U ovom poglavlju predstavljamo dve nove jake Maljcevljeve karakterizacije svojstva konguencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta. Prva karakterizacija je sistem, tj. Maljcevljev uslov, sa samo jednim termom arnosti 4. Druga karakterizacija je sistem koji smo označili sa (SM 1) – dokazaćemo da ovaj sistem zapravo karakteriše pomenuto svojstvo. Dokazaćemo, takodje, da su ove dve karakterizacije optimalne, odnosno da uključuju najmanji mogući broj terma najmanjih mogućih arnosti.

5.1 Sistem sa jednim termom arnosti 4

Sistem (SM 1), za koji ćemo u nastavku ovog poglavlja dokazati da karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta, dobijen je analizom svih sistema sa dva najviše ternarna idempotentna terma $\bar{p}$ i $\bar{q}$ i dve promenljive. Ova analiza je izložena u celini u poglavlju **2** ove disertacije. Navodimo ovaj sistem ponovo:

$$\begin{cases} \bar{p}(x,x,y) \approx \bar{p}(x,y,y) \\ \bar{p}(x,y,x) \approx \bar{q}(x,x,y) \approx \bar{q}(x,y,x) \approx \bar{q}(y,x,x) \end{cases} \tag{SM 1}$$

Setimo se, svi Maljcevljevi uslovi koje razmatramo u ovoj disertaciju su idempotentni (videti odeljak 2.1). Dakle, podrazumevamo da sistem ukjlučuje i identitete $\bar{p}(x,x,x) \approx \bar{q}(x,x,x) \approx x$.

Drugi sistem, za koji ćemo takodje dokazati da karakteriše pomenuto svojstvo, je sledeći sistem sa jednim termom arnosti 4 i dve promenljive:

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{t}(y,x,x,x) \approx \bar{t}(x,y,x,x) \approx \bar{t}(x,x,y,x) \approx \\ \bar{t}(x,x,x,y) \approx \bar{t}(y,y,x,x) \approx \bar{t}(y,x,y,x) \approx \bar{t}(x,y,y,x). \end{array}\right. \tag{SM 2}$$

(I ovde podrazumevamo identitet $t(x,x,x,x) \approx x$.)

Sistem (SM 2) izolovan je (kao kandidat za karakterizaciju svojstva) analizom svih linearnih sistema sa jednim termom arnosti 4. Ova analiza je izostavljena jer je jako slična izloženoj analizi sistema sa dva terma arnosti najviše 3, a njeno uključivanje bi znatno doprinelo obimu ove disertacije. Kriterijumi analiziranja sistema su isti – posmatrani sistem treba da bude realizovan u algebrama $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ iz primera 1, 2 i 3 redom (videti odeljak 2.2), i ne sme biti realizovan u bilo kojem punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom. Svi ovi kriterijumi su već prethodno korišćeni i objašnjeni u poglavlju **2**. Ipak, pri analiziranju sistema sa jednim termom arnosti 4 koristili smo i dodatni kriterijum:

Tvrdjenje 5.1.1. *Bilo koji Maljcevljev uslov koji karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta ne može imati kao sintaksnu posledicu bilo kakav ciklički term.*

Da bismo dokazali ovo tvrdjenje, definišimo najpre ciklički term nekog varijeteta odnosno algebre:

Definicija 5.1.2. *Term p jezika $\mathcal{F}$ arnosti najmanje dva je* ciklički term *za varijetet $\mathcal{V}$ (algebru $\mathbf{X}$) ovog jezika ako su u svakoj algebri varijeteta $\mathcal{V}$ (u algebri $\mathbf{X}$) zadovoljeni sledeći identiteti:*

$$p(x,x,\ldots,x) \approx x$$
$$p(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \approx p(x_2,x_3,\ldots,x_n,x_1).$$

Važi sledeće tvrdjenje:

Tvrdjenje 5.1.3. *[8]*

Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Sledeće izjave su ekvivalentne.

1. *$\mathcal{V}$ ima ciklički term arnosti n za neki $n \in \omega$, $n \geq 2$.*

2. *Za sve $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ i $\alpha \in Aut(\mathbf{X})$, ako je $\alpha^n = id_X$, onda α ima fiksnu tačku.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [8]. □

Dokaz tvrdjenja 5.1.1. Konstruisaćemo konačnu algebru koja generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet, a koja ima automorfizam koji nema fiksnu tačku.

Neka je $\mathbf{X}$ algebra sa univerzumom $\{1, 2, \ldots, n\}$ i jednom ternarnom baznom operacijom $f^{\mathbf{X}}$ koja je majority–operacija, odnosno:

$$\mathbf{X} \models f(x, x, y) \approx f(x, y, x) \approx f(y, x, x) \approx x.$$

U slučajevima kada nikoja dva argumenta nisu jednaka, možemo definisati $f^{\mathbf{X}}$ ovako:

$$f^{\mathbf{X}}(a, b, c) = a, \text{ za sve } a, b, c \in \mathbf{X} \text{ takve da } a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a.$$

Ovako definisana algebra zadovoljava uslove teoreme 1.4.7, pa generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet (algebra je vrlo slična primeru 2, odeljak 2.2). Ova algebra ima automorfizam $\alpha : 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to 1$, koji očigledno nema fiksnu tačku, a zadovoljava $\alpha^n = id_X$. Na osnovu tvrdjenja 5.1.3 zaključujemo da varijetet generisan algebrom $\mathbf{X}$ nema ciklički term arnosti n. Bilo koji Maljcevljev uslov koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnog varijeteta mora biti realizovan u varijetetu generisanom algebrom $\mathbf{X}$, pa ne može imati kao sintaksnu posledicu ciklički term arnosti n. Kako je n proizvoljan ($n \geq 2$), ovim smo dokazali tvrdjenje. $\square$

Kao što je rečeno, ovaj kriterijum smo koristili pri analizi, tj. eliminaciji, sistema sa jednim termom arnosti 4: ukoliko posmatrani sistem ima kao sintaksnu posledicu neki ciklički term, on svakako ne karakteriše svojstvo koje ispitujemo.

U narednom odeljku dokazujemo da sistemi (SM 1) i (SM 2) karakterišu ovo svojstvo.

5.2 Optimalne jake Maljcevljeve karakterizacije kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta

Definišimo rekurzivno niz pozitivnih celih brojeva $\{w_n \mid n \geq 1\}$:

$$w_1 = 4$$
$$w_{n+1} = 3(n+1)(2^{w_n} - 1) + 1.$$

Dokazaćemo sledeću lemu:

Lema 5.2.1. *Ako je $P(w_n)\backslash\{\emptyset\}$ obojen pomoću φ u n boja (tj. $\varphi : (P(w_n)\backslash\{\emptyset\}) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$), onda postoje podskupovi $A_1, \ldots, A_7 \in P(w_n) \setminus \{\emptyset\}$ takvi da*

- *$A_1 \cap A_i = \emptyset$ za sve $i > 1$;*
- *$A_i \cap A_j = \emptyset$ kad god je $2 \leq i \leq 4$, $j \in \{2, 3, 4, i + 3\} \setminus \{i\}$;*
- *$A_2 \subseteq A_6 \cap A_7$, $A_3 \subseteq A_5 \cap A_7$ i $A_4 \subseteq A_5 \cap A_6$;*
- *nijedan od A_5, A_6, A_7 nije sadržan u bilo kojem drugom od od ovih sedam skupova i*
- *$\varphi(A_1) = \varphi(A_2) = \varphi(A_3) = \varphi(A_4) = \varphi(A_5) = \varphi(A_6) = \varphi(A_7)$.*

Dokaz. Dokazujemo lemu indukcijom po n.

Ako $n = 1$, onda $w_1 = 4$ i uzimamo $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{3\}$, $A_5 = \{2, 3\}$, $A_6 = \{1, 3\}$ i $A_7 = \{1, 2\}$.

Pretpostavimo da $n > 1$ i da je tvrdjenje leme tačno za $n - 1$. Pošto $w_n = 3n \cdot (2^{w_{n-1}} - 1) + 1$, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je najmanje $3 \cdot 2^{w_{n-1}-1} + 1$ jednočlanih podskupova od w_n obojeno bojom n. Izaberimo $A \subseteq w_n$ takav da $|A| = 3(2^{w_{n-1}} - 1)$, svi jednočlani podskupovi od A su obojeni bojom n, i izaberimo $a \in w_n \setminus A$ takav da $\varphi(\{a\}) = n$.

Najpre ćemo definisati utapanje ψ_1 poseta $P(w_{n-1})$ u poset $P(A)$ koje čuva neuporedivost i disjunktnost. Prema tome, svaka familija od sedam podskupova od $P(w_{n-1})$ koja zadovoljava prva četiri uslova u iskazu leme biće preslikana sa ψ_1 u istu takvu familiju podskupova od A.

Za bilo koji neprazan skup $X \in P(w_{n-1})$, izaberimo $\tau(X) \in P(A)$ takav da $|\tau(X)| = 3$ i za sve $Y \in P(w_{n-1})$ za koje važi $X \neq Y$, $Y \neq \emptyset$, važi i $\tau(X) \cap \tau(Y) = \emptyset$. Dalje, neka je $\tau(\emptyset) = \emptyset$. Sada definišimo $\psi_1(X) = \bigcup\{\tau(Y) : Y \subseteq X\}$. Različiti podskupovi od w_{n-1} imaju različite partitivne skupove, pa je ovo injektivno preslikavanje. Ako je $X \subseteq Y \subseteq \omega_{n-1}$ onda je $P(X) \subseteq P(Y)$, pa preslikavanje ψ_1 čuva uredjenje. Ukoliko su X i Y neuporedivi važi $X \setminus Y \neq \emptyset$, kao i $Y \setminus X \neq \emptyset$, zatim $\emptyset \neq \tau(X \setminus Y) \subseteq \psi_1(X) \setminus \psi_1(Y)$ i $\emptyset \neq \tau(Y \setminus X) \subseteq \psi_1(Y) \setminus \psi_1(X)$. Na kraju, dokazujemo da su X i Y disjunktni ako i samo ako su $\psi_1(X)$ i $\psi_1(Y)$ disjunktni. Neka su $X, Y \subseteq \omega_{n-1}$ disjunktni. Tada je $P(X) \cap P(Y) = \{\emptyset\}$, pa se $\psi_1(X)$ i $\psi_1(Y)$ seku u $\tau(\emptyset) = \emptyset$, tj. $\psi_1(X) \cap \psi_1(Y) = \emptyset$. Sa druge strane, ako X i Y nisu disjunktni, tada je $\emptyset \neq \tau(X \cap Y) \subseteq \psi_1(X) \cap \psi_1(Y)$. Takodje, primetimo da je $|A| = 3(2^{w_{n-1}} - 1)$, što znači da je skup A dovoljno veliki da omogući izbor svih $\tau(X)$ koji su medjusobno disjunktni troelementni skupovi, pa prema tome $\psi_1(\omega_{n-1}) = A$.

Neka je $\tau(X) = \{b, c, d\}$ za neki $\emptyset \subsetneq X \subseteq \omega_{n-1}$. Ako je $\varphi(\psi_1(X) \setminus \{b\}) = \varphi(\psi_1(X) \setminus \{c\}) = \varphi(\psi_1(X) \setminus \{d\}) = n$, onda skupovi $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$, $A_3 = \{c\}$, $A_4 = \{d\}$, $A_5 = \psi_1(X) \setminus \{b\}$, $A_6 = \psi_1(X) \setminus \{c\}$ i $A_7 = \psi_1(X) \setminus \{d\}$ zadovoljavaju tvrdjenje leme. Dakle, možemo pretpostaviti da za svaki $\emptyset \subsetneq X \subseteq \omega_{n-1}$ postoji $x \in \tau(X)$ takav da $\varphi(\psi_1(X) \setminus \{x\}) \neq n$.

Izaberimo $\psi : P(\omega_{n-1}) \longrightarrow P(A)$ tako da $\psi(\emptyset) = \emptyset$, dok za sve X takve da $\emptyset \subsetneq X \subseteq \omega_{n-1}$ važi $\psi(X) = \psi_1(X) \setminus \{x\}$, gde je $x \in \tau(X)$ takav da $\varphi(\psi(X)) \neq n$. Znamo da $X \subseteq Y$ u $P(\omega_{n-1})$ povlači $X = Y$ ili $\psi(X) \subseteq \psi_1(X) \subseteq \bigcup\{\psi_1(Z) : Z \subsetneq Y\} \subsetneq \psi(Y)$, što znači da je ψ preslikavanje izmedju $P(\omega_{n-1})$ i $\psi(P(\omega_{n-1}))$ koje čuva uredjenje. Ako $X \not\subseteq Y$, onda $X \setminus Y \neq \emptyset$, pa je $\tau(X \setminus Y) \subseteq \psi_1(X) \setminus \psi_1(Y)$ i prema tome $|\psi_1(X) \setminus \psi_1(Y)| \geq 3$. Dobijamo $|\psi(X) \setminus \psi(Y)| \geq |\psi(X) \setminus \psi_1(Y)| \geq |\psi_1(X) \setminus \psi_1(Y)| - 1 \geq 2$, i ψ čuva relaciju $\not\subseteq$ (odnosno inverzno preslikavanje ψ^{-1} čuva relaciju inkluzije, $\subseteq$), što znači da je ψ izomorfizam izmedju $P(\omega_{n-1})$ i $\psi(P(\omega_{n-1}))$ koji čuva uredjenje. Kako je $\psi(X) \cap \psi(Y) \subseteq \psi_1(X) \cap \psi_1(Y)$, imamo da $X \cap Y = \emptyset$ povlači $\psi_1(X) \cap \psi_1(Y) = \emptyset$, što pak povlači $\psi(X) \cap \psi(Y) = \emptyset$. Sa druge strane, ako $X \cap Y \neq \emptyset$, onda je $|\psi_1(X) \cap \psi_1(Y)| \geq 3$, pa je $|\psi(X) \cap \psi(Y)| \geq |\psi_1(X) - \psi_1(Y)| - 2 > 0$. Prema tome, $\psi(X)$ i $\psi(Y)$ su disjunktni akko su to X i Y.

Sada definišemo bojenje φ_1 od $P(\omega_{n-1}) \setminus \{\emptyset\}$ kao $\varphi_1(X) = \varphi(\psi(X))$ kad god je $\emptyset \neq X \subseteq \omega_{n-1}$. Prema induktivnoj hipotezi, postoje podskupovi $B_1, \ldots, B_7 \subseteq \omega_{n-1}$ takvi da zadovoljavaju uslove leme u odnosu na bojenje φ_1. Primetimo da svi B_i moraju biti neprazni podskupovi od ω_{n-1} na osnovu prva tri uslova. Prema tome, $A_i := \psi(B_i)$, za $1 \leq i \leq 7$, zadovoljavaju zaključak leme u odnosu na φ, a prva četiri uslova leme su zadovoljena jer smo pokazali da ψ je izomorfizam koji čuva uredjenje izmedju $P(\omega_{n-1})$ i $\psi(P(\omega_{n-1}))$ takav da ψ i ψ^{-1} čuvaju disjunktnost. $\square$

Lemu 5.2.1 primenićemo da dokažemo da sistem (SM 2) zaista predstavlja jaku Maljcevljevu karakterizaciju kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Teorema 3. (Jovanović, Marković, McKenzie, Moore).
Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan i ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov (SM 2). Sa druge strane, ako $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov (SM 2), onda $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Primetimo da teorema tvrdi da uslov (SM 2) implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost *proizvoljnog* varijeteta.

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem (SM 2) realizovan u nekom konačnom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom $\mathbf{R}$. Označimo ovaj redukt sa

M. Term $t(x, y, z, u)$ kojim je interpretiran term $\bar{t}(x, y, z, u)$ ima oblik $t(x, y, z, u) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u$, za neke α, β, γ i δ iz **R**. Dakle, sistem (SM 2) dobija sledeći oblik:

$$\begin{cases} (\beta+\gamma+\delta)x + \alpha y \approx (\alpha+\gamma+\delta)x + \beta y \approx (\alpha+\beta+\delta)x + \gamma y \approx \\ (\alpha+\beta+\gamma)x + \delta y \approx (\gamma+\delta)x + (\alpha+\beta)y \approx (\beta+\delta)x + (\alpha+\gamma)y \approx \\ (\alpha+\delta)x + (\beta+\gamma)y. \end{cases}$$

Iz dobijenog sistema za $x = 0$ dobijamo $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \alpha + \beta$, pa prema tome $\alpha = 0$. Medjutim, iz idempotentnosti redukta **M** sledi da u njemu mora biti zadovoljen identitet $t(x, x, x, x) = 4\alpha x \approx x$, odnosno $0x \approx x$, tj. $0 \approx x$. Ovo znači da je u pitanju trivijalan redukt. Dakle, sistem (SM 2) nije realizovan ni u jednom netrivijalnom reduktu, pa na osnovu teoreme 2.2.4 implicira svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Bilo koji varijetet $\mathcal{V}$ koji realizuje ovaj sistem ima ovo svojstvo. Ovim je dokazan drugi deo (smer) teoreme.

Da bismo dokazali prvi deo teoreme pretpostavimo sledeće: neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongreuncijski $\wedge$–poludistributivan varijetet. Označimo sa $\mathcal{W}$ idempotentni redukt od $\mathcal{V}$. (Idempotetni redukt $\mathcal{W}$ je varijetet koji se dobija kada se u obzir uzmu samo termi koji indukuju idempotentne term–operacije na svim algebrama varijeteta $\mathcal{V}$. Za detaljnije objašnjenje videti odeljak 2.1.) Kako kongruencijska $\wedge$–poludistributivnost može biti okarakterisana idempotentnim Maljcevljevim uslovom, $\mathcal{W}$ je lokalno konačan, idempotentan varijetet čije mreže kongruencija su $\wedge$–poludistributivne. Već je rečeno da je sistem (SM 2) idempotentan Maljcevljev uslov, tj. podrazumevamo da uključuje identitet $\bar{t}(x, x, x, x) \approx x$. Ovo znači da varijetet $\mathcal{V}$ realizuje (SM 2) ako i samo ga realizuje varijetet $\mathcal{W}$. Dakle, dovoljno je dokazati realizaciju sistema (SM 2) u varijetetu $\mathcal{W}$.

Neka je **F** slobodna algebra varijeteta $\mathcal{W}$ generisana sa dva slobodna generatora x i y. Kako je varijetet lokalno konačan i $\mathbf{F} \in \mathcal{W}$, ova algebra je konačna, pa pretpostavimo da $|F| = n$. Definišimo neke poduniverzume algebre $\mathbf{F}^2$ (tj. binarne relacije kompatibilne sa operacijama iz $\mathbf{F}$, videti stranu 20):

$$E = Sg^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right)$$

$$\leq = Sg^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$G = Sg^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Tvrdimo da je relacija G zapravo jednaka proizvodu $F \times F$. Da bismo ovo dokazali, neka su $r(x,y), s(x,y) \in F$ proizvoljni. Tada je

$$s^{\mathbf{F}^2}\left(r^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right), r^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$s^{\mathbf{F}^2}\left(\begin{bmatrix} r(x,y) \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r(x,y) \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r(x,y) \\ s(x,y) \end{bmatrix}$$

Sada ćemo definisati još jedanaest ternarnih relacija kompatibilnih sa operacijama iz $\mathbf{F}$ (ovo su poduniverzumi algebre $\mathbf{F}^3$):

$$R_1 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$R_2 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$R_3 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}\right)$$

$$R_4 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$R_5 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$R_6 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$R_7 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ y \\ x \end{bmatrix}\right)$$

$$R_8 = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}\right),$$

dok su poslednje tri relacije definisane sa $R_9 := \{[p,q,r]^T : [p,q]^T \in E\}$, $R_{10} := \{[p,q,r]^T : [p,q]^T \in \leq\}$ i $R_{11} = F \times F \times F$.

Posmatramo projekcije definisanih relacija na parove koordinata. Primetimo sledeće činjenice:

- Projekcija R_1 na bilo koji par koordinata je E.
- Projekcija R_2 na prve dve koordinate je E, dok su preostale dve projekcije R_2 na dve koordinate jednake $\leq$.
- Projekcija R_3 na prve dve koordinate je $\leq$, dok su preostale dve projekcije ove relacije na dve koordinate jednake E.
- Projekcija R_4 na bilo koji par koordinata je $\leq$.
- Projekcija R_5 na poslednje dve koordinate je G, dok su preostale dve projekcije ove relacije na dve koordinete jednake $\leq$.
- Projekcija R_6 na prve dve koordinate je G, dok su preostale dve projekcije R_6 (na dve koordinate) jednake $\leq$.
- Projekcija R_7 na prve dve koordinate je $\leq$, projekcija ove relacije na prvu i poslednju koordinatu je E, dok je projekcija na poslednje dve koordinate jednaka G.

- Projekcija R_8 na poslednje dve koordinate je G, dok je projekcija ove relacije na bilo koji drugi par koordinata jednaka E.

- Na kraju, sve projekcije R_9, R_{10} i R_{11} na bilo koji par koordinata su jednake $G = F \times F$, izuzev projekcije R_9 na prve dve koordinate, koja je jednaka E, i projekcije R_{10} na prve dve koordinate, koja je jednaka $\leq$.

- Projekcija svake od ovih 11 relacija na bilo koju koordinatu (samo jednu) je ceo univerzum F.

Opisaćemo još jednu relaciju (takodje poduniverzum stepena algebre **F**) koju smo označili sa U, arnosti 7:

$$U = Sg^{\mathbf{F}^7}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \\ y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \\ x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}\right)$$

Za projekcije relacije U na parove koordinata važi sledeće:

- Projekcija relacije U na prvu i bilo koju drugu koordinatu jednaka je E.

- Projekcija relacije U na bilo koji par od druge, treće i četvrte koordinate jednaka je E.

- Projekcija relacije U na i–tu i $(i+3)$–ću koordinatu za sve $2 \leq i \leq 4$ takodje je jednaka E.

- Projekcije U na bilo koji par od poslednje tri koordinate jednake su G.

- Projekcije U na bilo koji od preostalih parova koordinata jednake su $\leq$.

U poglavlju **4** definisali smo Problem zadovoljenja uslova preko vrednosti promenljivih (definicija 4.2.1), kao i Problem zadovoljenja uslova nad jezikom uslova Γ, $CSP(\Gamma)$ (definicija 4.2.2). Setimo se, jezik uslova Γ je skup relacija (na konačnom skupu) koji uključuje binarnu relaciju jednakosti. Problem zadovoljenja uslova može se, analogno, definisati nad relacionom strukturom:[1]

[1] Relaciona struktura je definisana u poglavlju **3**; videti stranu 124.

Definicija 5.2.2. *Neka je $\mathbb{A} = (A; \Gamma)$ relaciona struktura. Instanca Problema zadovoljenja uslova $CSP(\mathbb{A})$ je bilo koja instanca $(V; A; \mathcal{C})$ ovog problema takva da se za svaki njen uslov $C \in \mathcal{C}$, relacija C može dobiti permutacijom koordinata neke relacije $C' \in \Gamma$. Struktura $\mathbb{A}$ je* fiksirani model *("template") problema $CSP(\mathbb{A})$.*

Napomena: uslov C proizvoljne instance Problema zadovoljenja uslova je skup dozvoljenih preslikavanja nekog podskupa W skupa promenljivih V u domen instance (videti definiciju 4.2.1). Kao što je objašnjeno ranije, uslov C se može poistovetiti sa nekom relacijom ρ na domenu problema, pri čemu se mora imati u vidu podskup W skupa promenljivih koji odgovara uslovu, kao i njegovo uredjenje (videti stranu 171).

Opisaćemo instancu $\mathcal{I} = (V, F, \mathcal{C})$ Problema zadovoljenja uslova koja ima fiksirani model $\mathbb{A} = (F, \{E, \leq, G, S, K, L, R_1, R_2, \ldots, R_7, U\})$. (Na osnovu definicije 5.2.2, ovo znači da se relacije koje odgovaraju uslovima instance $\mathcal{I}$ mogu dobiti permutacijama koordinata relacija iz navedenog skupa.) Uzmimo da skup promenljivih V ima $2^{\omega_n} - 1$ elemenata, pri čemu je (ω_n) niz koji je definisan na početku ovog odeljka (strana 187). Identifikujemo sve promenljive iz V sa nepraznim podskupovima od ω_n (kojih ima $2^{\omega_n} - 1$), odnosno skup promenljivih možemo indeksirati ovim nepraznim podskupovima: $V = \{x_A : \emptyset \neq A \subseteq \omega_n\}$.

Pre nego što navedemo uslove instance $\mathcal{I}$, uvedimo sledeću konvenciju:

Konvencija 5.2.3. *Elemente skupa F^W (preslikavanja iz W u F) pišemo kao vektore–kolone. Ovo nam dopušta da jasnije vidimo kako se primenjuje operacija koja deluje po koordinatama na nekoliko ovakvih vektora. Kada opisujemo uslov $C \subseteq F^W$, linearno uredjujemo elemente skupa $W = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$. Onda pišemo $\rho_{i_1,\ldots,i_k} = R$, za neki prethodno fiksirani $R \subseteq F^{|W|}$, što znači da je prva po redu koordinata vektora–kolone u R slika x_{i_1}, ispod nje je slika x_{i_2}, itd. U nekim slučajevima, zbog uštede prostora, upotrebljavaćemo transponovani vektor–vrstu, što ćemo označavati sa $[a_1, \ldots, a_k]^T$.*

Budući da smo promenljive indeksirali skupovima, oznaka, na primer, ρ_{A_1,A_2}, označava binarni uslov na uredjenom paru promenljivih (x_{A_1}, x_{A_2}), tj. relaciju koja predstavlja dozvoljena preslikavanja ovog para u domen F (pri čemu su $A_1, A_2 \subseteq \omega_n$).

Sada možemo navesti uslove instance $\mathcal{I}$.

Binarni uslovi su sledeći:

- Kad god je $A_1 \subsetneq A_2$, uslov $\rho_{A_1,A_2} = \leq$.

- Kad god je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, uslov $\rho_{A_1,A_2} = E$.

- Kad god je $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ali su A_1 i A_2 neuporedivi, uslov $\rho_{A_1,A_2} = G$.

Sada definišemo ternarne uslove. Posmatramo sva moguća parcijalna uredjenja izmedju tri različita neprazna podskupa skupa ω_n:

- Ako je $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3$, zadajemo uslov $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_4$.

- Ako je $A_1 \subsetneq A_2$ i $A_1 \subsetneq A_3$, dok su A_2 i A_3 neuporedivi, onda je $A_2 \cap A_3 \supseteq A_1 \neq \emptyset$, i uslov je $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_5$.

- $A_1 \subsetneq A_3$ i $A_2 \subsetneq A_3$, dok su A_1 i A_2 neuporedivi; u ovom slučaju je ili $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_2$ ako $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ili $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_6$ ako $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

- $A_1 \subsetneq A_2$ i A_3 je neuporediv sa bilo kojim od A_1 i A_2. Tada postoje tri podslučaja, $A_3 \cap A_1 = A_3 v \cap A_2 = \emptyset$, i u ovom slučaju je $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_3$, ili $A_3 \cap A_1 = \emptyset \neq A_3 \cap A_2$, ovde važi $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_7$, ili $A_3 \cap A_1 \neq \emptyset \neq A_3 \cap A_2$, pa važi $\rho_{A_1,A_2,A_3} = R_{10}$.

- Ukoliko su bilo koja dva od A_1, A_2, A_3 neuporedivi, uslov na ove tri koordinate (odnosno promenljive) je R_1, R_8, R_9, R_{11}, ili neka permutacija njihovih koordinata, zavisno od broja parova od A_1, A_2, A_3 sa nepraznim presekom.

Na kraju, postavljamo uslov $\rho_{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7} = U$, kad god su skupovi A_1, A_2, $\ldots, A_7$ kao u tvrdjenju leme 5.2.1.

Iz naše analize projekcija definisanih relacija na dvoelementne skupove koordinata i iz načina na koji smo postavili uslove sledi da kad god je $A \subseteq B$, projekcija svakog uslova koji u svom opsegu sadrži $\{x_A, x_B\}$ je $\leq$; kad god je $A \cap B = \emptyset$, projekcija svakog uslova koji u opsegu sadrži $\{x_A, x_B\}$ je E, i kad god je $A \cap B \neq \emptyset$, ali A i B su neuporedivi, projekcija svakog uslova koji u opsegu sadrži $\{x_A, x_B\}$ je G. Ovo znači da instanca $(V, A, \mathcal{C})$ zadovoljava uslov (**M2**) za $k = 2$ iz definicije (k, l)–minimalne instance (videti definiciju 4.3.1). Pored toga, uslovi su definisani tako da postoji ternarni uslov po svakom troelementnom skupu promenljivih, što znači da je zadovoljen uslov (**M1**) za $l = 3$ iz definicije 4.3.1. Dakle, instanca $\mathcal{I}$ je $(2, 3)$–minimalna, pa na osnovu teoreme 4.5.4 i posledice 4.5.5 ima rešenje.

Prema lemi 5.2.1, postoje skupovi $A_1, \ldots, A_7$ koji zadovoljavaju uslove leme, i takvi da $f(x_{A_i}) = f(x_{A_j})$ za sve $1 \leq i < j \leq 7$. Ovo znači da mora postojati neki $c \in F$ takav da $[c, c, c, c, c, c, c]^T \in U$. Dakle, postoji term $t(x, y, z, u)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{W}$ (tj. idempotentnog redukta varijeteta $\mathcal{V}$) takav da odgovarajuća term–operacija primenjena na generatore relacije (poduniverzuma) U daje kao rezultat $[c, c, c, c, c, c, c]^T$, odnosno važi:

$$t^{\mathbf{F}^7}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \\ y \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \\ y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \\ x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix}.$$

Dakle, važi sledeće:

$$\begin{gathered} t^{\mathbf{F}}(x, x, x, y) = t^{\mathbf{F}}(x, x, y, x) = t^{\mathbf{F}}(x, y, x, x) = \\ t^{\mathbf{F}}(y, x, x, x) = t^{\mathbf{F}}(y, y, x, x) = t^{\mathbf{F}}(y, x, y, x) = \\ t^{\mathbf{F}}(x, y, y, x) = c. \end{gathered}$$

Budući da je $\mathbf{F}$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{W}$ generisana sa dva slobodna generatora x i y, može se pokazati da, za proizvoljna dva elementa $a, b \in \mathbf{F}$, važi:

$$\begin{gathered} t^{\mathbf{F}}(a, a, a, b) = t^{\mathbf{F}}(a, a, b, a) = t^{\mathbf{F}}(a, b, a, a) = \\ t^{\mathbf{F}}(b, a, a, a) = t^{\mathbf{F}}(b, b, a, a) = t^{\mathbf{F}}(b, a, b, a) = \\ t^{\mathbf{F}}(a, b, b, a). \end{gathered}$$

(Ako $a, b \in \mathbf{F}$, onda postoje termi t_1 i t_2 jezika algebre $\mathbf{F}$, odnosno varijeteta $\mathcal{W}$, takvi da je $a = t_1(x, y)$ i $b = t_2(x, y)$. Definišimo preslikavanje $f : \{x, y\} \longrightarrow F$ sa $f(x) = a$, $f(y) = b$. Na osnovu osobine univerzalnosti preslikavanja algebre $\mathbf{F}$ (videti stranu 22), preslikavanje f se može produžiti do homomorfizma $\bar{f} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}$ koji se na skupu $\{x, y\}$ poklapa sa f. Dobijamo sledeće:

$$\begin{gathered} \bar{f}(c) = \bar{f}(t^{\mathbf{F}}(x, x, x, y)) = \\ \bar{f}(t^{\mathbf{F}}(x, x, y, x)) = \cdots = \bar{f}(t^{\mathbf{F}}(x, y, y, x)) = \\ t^{\mathbf{F}}(a, a, a, b)) = t^{\mathbf{F}}(a, a, b, a) = \cdots = t^{\mathbf{F}}(b, a, b, a) = \\ t^{\mathbf{F}}(a, b, b, a). \end{gathered}$$

Ovim je pokazano da važe gornje jednakosti za proizvoljna dva elementa algebre $\mathbf{F}$.)

Sada možemo zaključiti da važi sledeće:

$$\begin{gathered} \mathbf{F} \vDash t(x, x, x, y) \approx t(x, x, y, x) \approx t(x, y, x, x) \approx \\ t(y, x, x, x) \approx t(y, y, x, x) \approx t(y, x, y, x) \approx t(x, y, y, x). \end{gathered}$$

Kako je $\mathbf{F}$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{W}$, isti identiteti važe i u $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} \vDash t(x,x,x,y) \approx t(x,x,y,x) \approx t(x,y,x,x) \approx$$
$$t(y,x,x,x) \approx t(y,y,x,x) \approx t(y,x,y,x) \approx t(x,y,y,x).$$

Prema konstrukciji $\mathcal{W}$ je idempotentni redukt varijeteta $\mathcal{V}$, pa svi ovi identiteti, zajedno sa identitetom $t(x,x,x,x) \approx x$, važe u $\mathcal{V}$.

Ovim je dokazano da postoji interpretacija terma $\bar{t}$ iz sistema (SM 2) koja realizuje ovaj sistem u varijetetu $\mathcal{V}$.

□

U poglavlju **2** smo dokazali da nijedan idempotentan jak Maljcevljev uslov koji uključuje samo jedan ternarni simbol i proizvoljan broj binarnih simbola ne karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost (teorema 2.3.5). Dakle, potrebna je najmanje jedna operacija arnosti 4 da bi se okarakterisalo ovo svojstvo, ili bar dve operacije arnosti 3, što znači da je jak Maljcevljev uslov koji smo prethodno dokazali optimalan (za precizniju definiciju optimalnosti uslova videti [37]).

Na osnovu teoreme 2.4.22, uslov (SM 1) je sintaksno najslabiji, odnosno najmanji u odnosu na preduredjenje $\preceq$, u klasi svih jakih Maljcevljevih uslova koji uključuju samo dva ternarna simbola, a koji impliciraju kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost[2].

Dokazaćemo da (SM 1) karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost u lokalno konačnim varijetetima, što daje konačan odgovor na pitanje broja i arnosti simbola potrebnih za optimalnu jaku Maljcevljevu karakterizaciju kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima.

Teorema 2. (Jovanović, McKenzie).
Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan i ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, onda $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov (SM 1). Sa druge strane, ukoliko $\mathcal{V}$ realizuje jak Maljcevljev uslov (SM 1), onda $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Primetimo da teorema tvrdi da uslov (SM 1) implicira kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost *proizvoljnog* varijeteta.

Dokaz. Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet, iz teoreme **3** sledi da $\mathcal{V}$ realizuje (SM 2). Neka je $\bar{t} \longrightarrow t$ odgovarajuća interpretacija. Ako terme $\bar{p}$ i $\bar{q}$ iz sistema (SM 1) interpretiramo kao $\bar{p} \longrightarrow t(x,y,z,z)$ i $\bar{q} \longrightarrow t(x,x,y,z)$, dobijamo da $\mathcal{V}$ realizuje i sistem (SM 1).

[2]Preduredjenje $\preceq$ smo definisali na strani 20/21 ove disertacije.

Sa druge strane, pretpostavimo da je sistem (SM 1) realizovan u nekom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom i označimo ovaj redukt sa $\mathbf{M}$. Termi $\bar{p}$ i $\bar{q}$ u ovom reduktu moraju biti interprertirani ovako: $\bar{q}(x,y,z) \longrightarrow \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ i $\bar{p}(x,y,z) \longrightarrow \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z$, pri čemu je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ i $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$.

Dakle, sistem (SM 1) je realizovan u $\mathbf{M}$ pri nekoj interpretaciji navedenog oblika. Za $x = 0$, dobijamo sledeće: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2$ i $\beta_2 + \beta_3 = \beta_3$, iz čega sledi da $\beta_2 = 0$. Dakle $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Iz idempotentnosti dobijamo da je $x = p(x,x,x) = 0x + 0x + 0x = 0$, pa je $M = \{0\}$. Posmatrani redukt je trivijalan. Prema teoremi 2.2.4, sledi da $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. $\square$

5.3 Sintaksno jače i slabije jake Maljcevljeve karakterizacije

Lako je videti da je (SM 2) sintaksno jača karakterizacija svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti od uslova (SM 0) definisanog u teoremi 1.4.7): ako je sistem (SM 2) reallizovan u varijetetu $\mathcal{V}$ pri interpretaciji $\bar{t} \longrightarrow t$, onda je (SM 0) realizovan u istom varijetetu pri interpretaciji $\bar{w}(x,y,z,u) \longrightarrow t(x,y,z,u)$ i $\bar{v}(x,y,z) \longrightarrow t(x,x,z,y)$. Pored (SM 2), možemo dokazati još jednu karakterizaciju svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta koja je, takodje, sintaksno jača od (SM 0). Ova karakterizacija nije Maljcevljev uslov – naime, ona zahteva da varijetet realizuje sve članove beskonačnog niza jakih Maljcevljevih uslova, tj. svaki od ovih uslova. (Setimo se da Maljcevljev uslov zahteva da varijetet realizuje bar jedan od uslova ovakvog niza, videti stranu 30.)

Ovu novu vrstu uslova nazvaćemo *kompletan Maljcevljev uslov.*

Pre nego što definišemo kompletan Maljcevljev uslov koji karakteriše kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnog varijeteta, izložićemo ponovo jaku Maljcevljevu karakterizaciju ovog svojstva koju smo označili sa (SM 0), tj. teoremu 1.4.7, sa dokazom (dokaz je preuzet iz [40]). Ovaj dokaz nije naveden u poglavlju **1** jer se u njemu koriste konstrukcije i rezultati Problema zadovoljenja uslova, koji je definisan u poglavljima **4** i **5**. Ovde ga navodimo u celini jer njegovu modifikaciju koristimo za dokazivanje pomenutog kompletnog Maljcevljevog uslova.

Teorema 1.4.7. *([40]) Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ima svojstvo $\wedge$–poludistributivnosti mreža kongruencija ako i samo ako realizuje sledeći jak Maljcev-*

ljev uslov:

$$\begin{aligned} \bar{v}(x,x,x) \approx \bar{w}(x,x,x,x) \approx x, \\ \bar{v}(x,x,y) \approx \bar{v}(x,y,x) \approx \bar{v}(y,x,x) \approx \bar{w}(x,x,x,y) \\ \approx \bar{w}(x,x,y,x) \approx \bar{w}(x,y,x,x) \approx \bar{w}(y,x,x,x). \end{aligned} \tag{SM 0}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem (SM 0) realizovan u nekom punom idempotentnom reduktu modula nad konačnim prstenom i označimo ovaj redukt sa $\mathbf{M}$. Neka je $\bar{v}(x,y,z) \longrightarrow \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, $\bar{w}(x,y,z,u) \longrightarrow \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \beta_4 u$ interpretacija koja realizuje sistem. Za evaluaciju $x = 0$ dobijamo $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$, dakle svi koeficijenti su jednaki. Označimo ih sa α. Iz idempotentnosti dobijamo $3\alpha x = x$ i $4\alpha x = x$, odakle dobijamo $x = 0$. Dakle u pitanju je trivijalan redukt, $\mathbf{M} = \{0\}$, pa prema teoremi 2.2.4 sledi da $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Drugi smer ove teoreme dokazan je analogno dokazu odgovarajućeg smera teoreme **3**: ako lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti, konstruisaćemo odgovarajuću $(2,3)$–minimalnu instancu Problema zadovoljenja uslova nad $\mathcal{V}$–slobodnom algebrom generisanom sa dva generatora. Ova instanca ima rešenje na osnovu posledice 4.5.5 teoreme 4.5.4.

Možemo pretpostaviti da je varijetet $\mathcal{V}$ idempotentan. Ovo ne ograničava opštost, kao što smo objasnili ranije (videti odeljak 2.1).

Neka je $\mathbf{F}$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{V}$ generisana sa $\{x,y\}$.

Definišemo poduniverzum algebre $\mathbf{F}^3$ (odnosno ternarnu relaciju na F kompatibilnu sa operacijama algebre $\mathbf{F}$):

$$R = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Definišemo poduniverzum algebre $\mathbf{F}^4$:

$$S = Sg^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Kako je varijetet $\mathcal{V}$ lokalno konačan, slobodna algebra $\mathbf{F}$ je konačna. Neka je $n > 3|F|$. Definišimo instancu $\mathcal{P} = (V, F, \mathcal{C})$ Problema zadovoljenja uslova:

- Skup promenljivih $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

- Skup uslova $\mathcal{C}$ sastoji se iz uslova C_I za sve $I \subseteq V$ za koje je $|I| = 3$ ili $|I| = 4$, pri čemu je $C_I = (I, R)$ ako je $|I| = 3$, odnosno $C_I = (I, S)$ ako je $|I| = 4$.

Može se formalizovati definicija uslova C_I: za troelementni skup promenljivih I izaberemo bilo koju bijekciju $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow I$ (ovo nam daje redosled promenljivih skupa I), i definišemo uslov C_I tako da sadrži sva preslikavanja g za koja važi

$$(g(f(1)), g(f(2)), g(f(3))) \in R.$$

Analogno definišemo uslove C_I za četvoroelementne skupove I.

Poduniverzumi R i S totalno simetrični, odnosno zatvoreni u odnosu na bilo koju permutaciju svojih koordinata. Restrikcije ovih poduniverzuma na bilo koji par koordinata su iste, pa instanca $\mathcal{P} = (V, F, \mathcal{C})$ zadovoljava uslov (**M2**) za $k = 2$ iz definicije (k, l)–minimalne instance (definicija 4.3.1). Dalje, uslovi C_I su definisani tako da postoji ternarni uslov po svakom troelementnom skupu promenljivih, što znači da je zadovoljen uslov (**M1**) za $l = 3$ iz definicije 4.3.1. Dakle, instanca $\mathcal{P}$ je $(2, 3)$–minimalna nad $\mathbf{F}$. Kako $\mathbf{F}$ generiše kongruencijski $\wedge$–poludistributivan varijetet, zaključujemo, na osnovu teoreme 4.5.4 i posledice 4.5.5, da $\mathcal{P}$ ima rešenje $\vec{s} \in F^V$. Pošto je $n > 3|F|$, sledi da $\vec{s}$ mora biti konstanta na nekom $I \subseteq V$ za koji je $|I| = 4$ (Dirihleov princip). Uzmimo da, za ovaj skup promenljivih I, na elementima iz I $\vec{s}$ uzima vrednost $x \circ y \in F$, za neku binarnu term–operaciju $\circ$ algebre $\mathbf{F}$.

Primetimo da, prema konstrukciji, instanca $\mathcal{P}$ sadrži uslove (J, R) za svaki troelementni podskup J skupa I. Kako je $\vec{s}$ rešenje instance P, dobijamo da $(x \circ y, x \circ y, x \circ y) \in R$ i $(x \circ y, x \circ y, x \circ y, x \circ y) \in S$.

Pošto je R generisan sa

$$\{(y, x, x)^T, (x, y, x)^T, (x, x, y)^T\},$$

a S sa

$$\{(y, x, x, x)^T, (x, y, x, x)^T, (x, x, y, x)^T, (x, x, x, y)^T\},$$

zaključujemo da postoje termi $v(x, y, z)$ i $w(x, y, z, u)$ na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$ takvi da važi sledeće:

$$v^{\mathbf{F}}(y, x, x) = v^{\mathbf{F}}(x, y, x) = v^{\mathbf{F}}(x, x, y) = x \circ y,$$
$$w^{\mathbf{F}}(y, x, x, x) = w^{\mathbf{F}}(x, y, x, x) = w^{\mathbf{F}}(x, x, y, x) = w^{\mathbf{F}}(x, x, x, y) = x \circ y.$$

Kao u dokazu teoreme **3**, može se pokazati da navedene jednakosti važe za bilo koja dva elementa $a, b \in \mathbf{F}$, pa zaključujemo da važi sledeće:

$$\mathbf{F} \models v(y, x, x) \approx v(x, y, x) \approx v(x, x, y) \approx x \circ y,$$
$$\mathbf{F} \models w(y, x, x, x) \approx w(x, y, x, x) \approx w(x, x, y, x) \approx w(x, x, x, y) \approx x \circ y.$$

(Sa $x \circ y$ označili smo term na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$, kao i odgovarajuću term-operaciju algebre $\mathbf{F}$. Jedno ili drugo značenje sledi iz konteksta.)

Varijetet $\mathcal{V}$ zadovoljava iste identitete kao slobodna algebra $\mathbf{F}$, pa zaključujemo da interpretacija $\bar{v} \longrightarrow v$, $\bar{w} \longrightarrow w$ realizuje sistem (SM 0) u $\mathcal{V}$.

□

Sada možemo definisati kompletan Maljcevljev uslov za kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost lokalno konačnog varijeteta.

Teorema 4. (Jovanović, Marković, McKenzie, Moore).
Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. $\mathcal{V}$ ima $\wedge$–poludistributivne mreže kongruencija ako i samo ako postoji binarni term $t(x, y)$ i termi $\omega_n(x_1, \ldots, x_n)$ za sve arnosti $n \geq 3$ (na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$), takvi da:

$$\begin{array}{rl} (1) & \text{Svi } \omega_n \text{ su wnu–termi varijeteta } \mathcal{V}, \text{ i} \\ (2) & \text{Za sve } n,\ \mathcal{V} \models \omega_n(x, x, \ldots, x, y) \approx t(x, y). \end{array} \qquad \text{(CM 1)}$$

Dokaz. Kompletan Maljcevljev uslov (CM 1) povlači jak Maljcevljev uslov (SM 0), jer (SM 0) zahteva samo postojanje binarnog terma $t(x, y)$ i terma ω_3 i ω_4 koji ispunjavaju navedene zahteve. Dakle, svaki varijetet $\mathcal{V}$ koji realizuje (CM 1) takodje realizuje i (SM 0), pa mora imati svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti.

Drugi smer dokazujemo na sledeći način: dokazaćemo da za svaki $n_0 \geq 3$ postoji term $t(x, y)$ (na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$) takav da je uslov (CM 1) realizovan za sve $3 \leq n \leq n_0$.

Dokažimo najpre da je ovo dovoljno: pretpostavimo da važi prethodno tvrdjenje i neka je $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x, y)$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{V}$ generisana sa $\{x, y\}$. (Dakle, svaki element ove algebre je vrednost neke binarne term–operacije $t^{\mathbf{F}}(x, y)$.) Dalje, pretpostavimo da se svakom elementu $a \in \mathbf{F}$ može dodeliti broj k_a definisan ovako: k_a je najmanji ceo broj takav da ni za jedan wnu–term w arnosti k (varijeteta $\mathcal{V}$) ne važi $w^{\mathbf{F}}(x, x, \ldots, x, y) = a$. (Drugim rečima k_a je najmanji broj takav da ne postoji wnu term–operacija $w^{\mathbf{F}}$ na $\mathbf{F}$ arnosti k_a za koju važi $w^{\mathbf{F}}(x, x, \ldots, x, y) = a$.) Algebra $\mathbf{F}$ je konačno generisana algebra lokalno konačnog varijeteta, pa je i sama konačna. Označimo njene elemente sa a_1, a_2, $\ldots$, a_m (dva od ovih su generatori x i y). Na osnovu prethodne pretpostavke, svim ovim elementima mogu se dodeliti odgovarajući celi brojevi $k_{a_1}, k_{a_2}, \ldots, k_{a_m}$. Izaberimo $n_0 \in \omega$ koji je veći od svih ovih k_{a_1}, k_{a_2}, $\ldots$, k_{a_m}. Na osnovu pretpostavke, postoji term $t(x, y)$ (na jeziku varijeteta $\mathcal{V}$) takav da je uslov (CM 1) realizovan za sve $3 \leq n \leq n_0$. Dakle, postoje wnu term–operacije algebre $\mathbf{F}$ svih arnosti $3 \leq n \leq n_0$ tako da je njihova vrednost za argumente $(x, x, \ldots, x, y)$ jednaka $t^{\mathbf{F}}(x, y)$. Medjutim, $t^{\mathbf{F}}(x, y)$ je neki od elemenata a_1, a_2, $\ldots$,

a_m ; može se, bez ograničenja opštosti, pretpostaviti da je u pitanju a_1. Dakle, ne postoji wnu–operacija arnosti k_{a_1} čija je vrednost na argumentima $(x, x, \ldots, x, y)$ jednaka a_1 odnosno $t^{\mathbf{F}}(x, y)$, pri čemu je k_{a_1} izmedju 3 i n_0. Dobili smo kontradikciju, što znači da je nemoguće dodeliti broj k svakom elementu algebre $\mathbf{F}$. Postoji element kojem nije dodeljen nijedan broj i on zadovoljava sledeće: za svaku arnost $k \geq 3$, ovaj element je jednak rezultatu neke wnu term–operacije algebre $\mathbf{F}$ arnosti k za argumente $(x, x, \ldots, x, y)$. Kako je $\mathbf{F}$ slobodna algebra varijeteta $\mathcal{V}$, dobijamo da varijetet realizuje uslov (CM 1).

Sada primenjujemo dokaz koji je prethodno izložen uz sledeće dve modifikacije:

- Pri konstruisanju $(2, 3)$–minimalne instance Problema zadovoljenja uslova skup promenljivih je $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, gde je $n > (n_0 - 1)|F|$.
- Uslove zadajemo na svim podskupovima promenljivih čija je kardinalnost izmedju 3 i n_0 (u prethodnom dokazu su uslovi definisani na svim podskupovima promenljivih čija je kardinalnost 3 ili 4).

Uz ove modifikacije dokaz je identičan prethodnom. □

Jos jedno moguće poboljšanje jakih Maljcevljevih karakterizacija svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta bila bi redukcija broja potrebnih identiteta. Najpre ćemo dokazati da ne postoji jaka Maljcevljeva karakterizacija ovog svojstva koja bi se sastojala samo od idempotencije i još jednog linearnog identiteta (ovde možemo pretpostaviti da jezik ima samo jednu operaciju, budući da jedan identitet sa dve različite operacije na levoj i desnoj strani očigledno ne karakteriše ništa):

Teorema 5.3.1. *Svaki jak Maljcevljev uslov na jeziku sa jednom operacijom f arnosti n koji se sastoji od idempotencije i još jednog linearnog identiteta i koji je realizovan u netrivijalnoj polumreži, takodje je realizovan u netrivijalnom modulu. Možemo se čak ograničiti na konačne module.*

Dokaz. Neka je jak Maljcevljev uslov koji posmatramo

$$\begin{cases} f(x, x, \ldots, x) \approx x \\ f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \approx f(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{cases} \tag{1}$$

gde su svi y_i i svi z_i u skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Najpre dokazujemo da tvrdjenje važi ako i samo ako važi pod dodatnom pretpostavkom da su identiteti *balansirani*, tj. da $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Pretpostavimo da $y_t \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Ako je $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, označimo sa $\pi_J(y_1, \ldots, y_n)$ tupl dužine $|J|$ koji se sastoji od svih y_i za $i \in J$ pri čemu su indeksi i u rastućem redosledu. Maljcevljev uslov (1) je realizovan u netrivijalnoj mreži ako i samo ako je uslov

$$\begin{cases} g(x, x, \ldots, x) \approx x \\ g(\pi_J(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \approx g(\pi_J(z_1, z_2, \ldots, z_n)) \end{cases} \tag{2}$$

realizovan u netrivijanoj mreži, gde je $J = \{i : 1 \leq i \leq n \wedge y_i \neq y_t\}$ i arnost simbola g je $|J|$. Ovo važi jer bilo koja interpretacija f u netrivijalnoj polumreži $\mathbf{S}$ mora biti infimum ($\wedge$) promenljivih koje su sve u J (jer u suprotnom bismo za evaluaciju y_j kao a, a svih drugih promenljivih kao b tako da $a < b$ dobili da ne važi Maljcevljev uslov (1)). Sa druge strane, svaka algebra u kojoj je realizovan Maljcevljev uslov (2) mora da realizuje i uslov (1), što se dobija prosto dodavanjem novih promenljivih.

Rezimiraćemo prethodno: ako pretpostavimo da važi sledeća implikacija

ako je uslov (2) realizovan u netrivijalnoj polumreži, onda je (2) realizovan u netrivijalnom modulu,

dobijamo implikaciju

ako je uslov (1) realizovan u netrivijalnoj polumreži, onda je (1) realizovan u netrivijalnom modulu.

Dokaz: Netrivijalna polumreža $\mathbf{S}$ realizuje (1) $\Rightarrow$ $\mathbf{S}$ realizuje (2) $\Rightarrow$ neki modul realizuje (2) $\Rightarrow$ neki modul realizuje (1). Prema tome, odbacujemo jednu za drugom promenljive koje se javljaju samo na jednoj strani. Induktivno, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da su identiteti u uslovu (1) balansirani.

Sledeće dokazujemo da je svaki balansiran uslov oblika (1) realizovan u vektorskom prostoru racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ (posmatranom kao prostor nad poljem Q). Ako postoji i takav da $y_i = z_i$, treba samo interpretirati f kao i–tu projekciju, i ovo zadovoljava uslov (1) u svakoj algebri. Svaka interpretacija $f^{\mathbf{Q}}$ je oblika $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ za neke skalare $\alpha_i \in Q$. Za bilo koji i, $1 \leq i \leq n$, označimo sa $I_i = \{j \mid 1 \leq j \leq n \wedge y_j = x_i\}$ i $J_i = \{j \mid 1 \leq j \leq n \wedge z_j = x_i\}$.

Tvrdjenje 1. Uslov (1) je realizovan u punom idempotentnom reduktu modula

$\mathbf{M}$ nad prstenom $\mathbf{R}$ ako i samo ako sistem jednačina

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i & = & 1, \\ \sum_{j\in I_i} \alpha_j & = & \sum_{j\in J_i} \alpha_j \quad \text{za svaki } 1 \leq i \leq m \end{array}\right. \tag{3}$$

ima rešenje u $\mathbf{R}$ (α_i su koeficijenti interpretacije koji u ovom sistemu predstavljaju promenljive).

Dokaz. Ako je uslov realizovan u $\mathbf{M}$, evaluiranjem svih x_i kao x u (1) zbog idempotencije dobijamo prvu jednakost iz (3), dok evaluiranje samo x_i kao x, a svih drugih x_k kao 0 povlači jednakost $\sum_{j\in I_i} \alpha_j = \sum_{j\in J_i} \alpha_j$.

Sa druge strane, pretpostavimo da sistem (3) ima rešenje $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. Interpretirajmo $f^{\mathbf{M}}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. Tada je $f^{\mathbf{Q}}(x, \ldots, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x = 1x = x$. Pored toga, $f^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j\in I_i} \alpha_j \right) x_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j\in J_i} \alpha_j \right) x_i = f^{\mathbf{M}}(z_1, \ldots, z_n)$. □

Preostaje da se dokaže da sistem (3) ima rešenje u $\mathbf{Q}$ bez obzira na to koje particije $\{I_i : 1 \leq i \leq m\}$ i $\{J_i : 1 \leq i \leq m\}$ nameće Maljcevljev uslov (1). Kod ovih particija, pretpostavka da je $y_i \neq z_i$ za sve i zapravo predstavlja osobinu $I_i \cap J_i = \emptyset$ za sve i, i ovo je jedina osobina koju ovde pretpostavljamo.

Sistem (3) se može zapisati ovako:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i & = & 1, \\ \sum_{j\in I_i} \alpha_j - \sum_{j\in J_i} \alpha_j & = & 0 \quad \text{za svaki } 1 \leq i \leq m \end{array}\right. \tag{4}$$

Neka matrica ovog sistema M (dimenzija $(m+1)\times n$) ima rang r. Označimo sa M_1 matricu dobijenu od M izbacivanjem prve vrste. Elementi matrice M su 0, 1 ili -1, pri čemu svaka kolona ima 1 u prvoj vrsti, tačno još jedan element 1 i još jedan -1 a svi ostali elementi kolone su 0. Svaka vrsta ima najmanje jedan element 1 i, osim ako je u pitanju prva vrsta čiji su svi elementi 1, takodje ima najmanje jedan element -1, što je posledica činjenice da sistem (1) ima balansirane identitete.

Sistem (4) ima rešenje osim u slučaju da proširena matrica sistema ima rang $r+1$. Ovo se dešava ako i samo ako su kolona slobodnih članova i prva vrsta delovi minora reda $r+1$ koji je regularan (pošto su svi elementi osim prvog u koloni slobodnih članova jednaki 0). Izračunavanjem determinante ovog minora po poslednjoj koloni vidimo da proširena matrica sistema ima rang $r+1$ ako i samo ako postoji minor reda r matrice M_1 koji je regularan. Prema tome, sistem (4) nema rešenje u nekom vektorskom prostoru ako i samo ako je vektor prve vrste matrice M (koji se sastoji od svih 1) linearna kombinacija preostalih vektora vrsta ove matrice.

Neka su $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ vektori vrsta matrice M_1, neka je $\mathbf{1}$ vrsta koja se sastoji od svih 1, i neka je $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{m} q_i \mathbf{b}_i$. Ako se, za početak, ograničimo na $\mathbf{Q}$, možemo da izaberemo vrednost q_k takvu da je $|q_k|$ maksimalno. Ako je $q_k > 0$, znamo da je za neki $1 \leq j \leq m$, $\mathbf{b}_k(j) = -1$. Na osnovu matrice M ($\mathbf{b}_i$ su vrste osim prve) znamo da postoji tačno jedan l takav da $\mathbf{b}_l(j) = 1$ i sve druge vrste $\mathbf{b}_i(j) = 0$ kad god je $i \neq k$ i $i \neq l$. Prema tome dobijamo da je

$$1 = \mathbf{1}(j) = \sum_{i=1}^{m} q_i \mathbf{b}_i(j) = q_l - q_k.$$

Ovo povlači $q_l > q_k > 0$ što je u suprotnosti sa maksimalnošću $|q_k|$. Slučaj kada je $q_k < 0$ se razmatra analogno, samo je potrebno da izaberemo j takav da $b_k(j) = 1$ i dobićemo da je $q_l < q_k < 0$, što je ponovo kontradikcija.

Dakle dokazali smo da je Maljcevljev uslov (1) realizovan u $\mathbf{Q}$ kad god je (1) realizovan u netrivijalnoj polumreži. Dalje dokazujemo da je takodje realizovan u $\mathbf{Z}_p$ posmatranom kao vektorski prostor nad samim sobom za pogodno izabrano p. Iz činjenice da je (1) realizovan u $\mathbf{Q}$ sledi da sistem (4) ima rešenje $q_1, \ldots, q_n$ u $\mathbf{Q}$. Neka je k pozitivan ceo broj takav da su svi brojevi $c_i = kq_i$ celi. Tada sistem

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i & = & k, \\ \sum_{j \in I_i} \alpha_j - \sum_{j \in J_i} \alpha_j & = & 0 \quad \text{za svaki } 1 \leq i \leq m \end{array}\right. \tag{5}$$

ima rešenje $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ u prstenu celih brojeva. Izaberimo prost broj p koji je relativno prost sa k, i za sve i, neka je d_i element Z_p koji je kongruentan sa c_i po modulu p. Neka je $l \in Z_p$ takav da je lk kongruentan sa 1 po modulu p. Tada množenjem svih jednačina sistema (5) sa l u polju $\mathbb{Z}_p$ dobijamo da sistem (4), ili ekvivalentno, sistem(3), ima rešenje $(ld_1, ld_2, \ldots, ld_n)$ u $\mathbf{Z}_p$. Dakle, iz Tvrdjenja 1 sledi da je (1) realizovan u $\mathbf{Z}_p$. □

Posledica 5.3.2. *Ne postoji idempotentna linearna jaka Maljcevljeva karakterizacija svojstva kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnih varijeteta na jeziku sa samo jednom operacijom i još jednim identitetom osim idempotentnosti.*

Dokaz. Sledi iz teoreme 2.2.4 i teoreme 5.3.1. □

Nismo u mogućnosti da predstavimo nijednu jaku Maljcevljevu karakterizaciju ovog svojstva sa idempotentnošću i još dva identiteta na jeziku koji se sastoji samo od jedne operacije. Ipak, računarska pretraga[3] je eliminisala sve osim dva uslova sa jednom operacijom arnosti 4 i dva identiteta koji imaju zajednički term (tj. oblika $t(\bar{x}) \approx t(\bar{y}) \approx t(\bar{z})$, gde su $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ neke uredjene četvorke):

$$\begin{cases} t(x,x,x,x) \approx x \\ t(x,x,y,z) \approx t(y,z,y,x) \approx t(x,z,z,y) \end{cases} \tag{SM 3}$$

$$\begin{cases} t(x,x,x,x) \approx x \\ t(x,x,y,z) \approx t(y,x,z,x) \approx t(y,z,x,y) \end{cases} \tag{SM 4}$$

Primetimo da su oba ova uslova sintaksno jača od (SM 2), tj. važi $(SM2) \preceq (SM3)$ i $(SM2) \preceq (SM4)$. Dakle, bilo bi vrlo poželjno da jedan od njih karakteriše svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti lokalno konačnog varijeteta, pošto bi to predstavljalo najjaču poznatu jaku Maljcevljevu karakterizaciju.

U našim daljim naporima, uz pomoć računarske pretrage ustanovili smo da za sve jake Maljcevljeve uslove na jeziku sa jednom operacijom arnosti najviše 7, a koji se sastoje od idempotencije i još dva identiteta i koji imaju najviše tri različite promenljive, važi sledeće: ukoliko taj jak Maljcevljev uslov povlači kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost, onda on ili nije realizovan u nekoj test–algebri sa $\wedge$–poludistributivnom mrežom kongruencija, ili je ekvivalentan jednom od uslova (SM 3), (SM 4). Ostavićemo ovo kao otvoren problem:

Problem 5.3.3. *Da li svaki lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ koji ima svojstvo kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti realizuje jak Maljcevljev uslov* (SM 3)*? Šta je sa uslovom* (SM 4)*?*

Okrenućemo se sada sintaksno slabijim karakterizacijama. Ukoliko je potrebno proveriti računarskom pretragom da li neki lokalno konačan varijetet ima $\wedge$–poludistributivne mreže kongruencija, uslov (SM 1) bi bio najpogodniji budući da je sintaksno najslabiji – zahteva samo da se izračuna 3–generisana slobodna algebra, ili odgovarajuća podalgebra trećeg stepena 2–generisane slobodne algebre.

Niz $\{\sum_k : k \geq 3\}$ jakih Maljcevljevih karakterizacija kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti u lokalno konačnim varijetetima može biti definisan promenom arnosti wnu–terma u (SM 0) na k i $k+1$, redom. Ovaj niz ima opadajuću sintaksnu jačinu,

[3] Ovo je računarska pretraga kojom smo izolovali sistem (SM 2); kriterijume pretrage objasnili smo u odeljku **5.1**.

pošto je karakterizacija $\sum_{k+l}$ realizovana u varijetetu $Mod(\sum_k)$ prosto dodavanjem l „veštačkih" promenljivih dvema wnu–operacijama u definiciji $\sum_k$. Ipak, ovakve karakterizacije nisu mnogo upotrebljive u praksi, iako sintaksno slabe. Što su arnosti veće, biva teže dokazati egzistenciju operacija, bilo računarskom pretragom ili ručno.

Dakle, koliko su zapravo slabe ove sintaksno slabe Maljcevljeve karakterizacije? Možemo ih uporediti sa drugim Maljcevljevim svojstvima koja su jača od kongruencijske $\wedge$–poludistributivnosti. Jedno takvo svojstvo je *kongruencijska distributivnost.* Teorema 1.4.2 formuliše potreban i dovoljan uslov da proizvoljan varijetet ima distributivne mreže kongruencija. Uslov je označen sa (CD), a ukoliko je ispunjen za neki $n \in \omega$, kažemo da varijetet reaizuje uslov (CD)(n). Moguće je dokazati da je (SM 1) $\preceq$ (CD)(4), kao i (SM 0) $\preceq$ (CD)(4) (pa prema tome i (SM 01) $\preceq$ (CD)(4), pošto je (SM 01) $\preceq$ (SM 0)):

Tvrdjenje 5.3.4. *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet koji realizuje* (CD)(4)*. Tada postoje termi $p(x,y,z)$, $q(x,y,z)$ i $w(x,y,z,u)$ takvi da p i q predstavljaju realizaciju jakog Maljcevljevog uslova* (SM 1) *u $\mathcal{V}$, a q i w realizaciju jakog Maljcevljevog uslova* (SM 0) *u $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{W}$ idempotentni redukt od $\mathcal{V}$ (videti odeljak 2.1). Označimo sa $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{W}}(x,y)$ slobodnu algebru varijeteta $\mathcal{W}$ slobodno generisanu sa $\{x,y\}$. Definišemo sledeće poduniverzume stepena algebre $\mathbf{F}$:

$$G = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}\right)$$

$$H = Sg^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$K = Sg^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}\right)$$

Želimo da dokažemo da postoji neki $c \in \mathbf{F}$ takav da je $(c,c,c)^T \in G \cap H$ i da $(c,c,c,c)^T \in K$. Ovo će biti dovoljno, pošto u tom slučaju postoje termi $p(x,y,z)$,

$q(x, y, z)$ i $w(x, y, z, u)$ takvi da važi sledeće:

$$q^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} = p^{\mathbf{F}^3}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}\right)$$

i

$$w^{\mathbf{F}^4}\left(\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga sledi da željeni identiteti (sistema (SM 1) i (SM 0)), osim idempotencije, važe u $\mathbf{F}$ pri interpretaciji $\bar{p} \longrightarrow p$, $\bar{q} \longrightarrow q$ za sistem (SM 1), odnosno $\bar{v} \longrightarrow q$, $\bar{w} \longrightarrow w$ za sistem (SM 0). (Posmatramo operacije $p^{\mathbf{F}^3}$, $q^{\mathbf{F}^3}$ i $w^{\mathbf{F}^4}$ po koordinatama i dobijamo jednakosti koje važe u $\mathbf{F}$, pri čemu su argumenti operacija slobodni generatori. Kao u dokazu teoreme **3**, lako se dokazuje da iste jednakosti važe za proizvoljne argumente $a, b \in \mathbf{F}$, što znači da $\mathbf{F}$ zadovoljava odgovarajuće identitete.) Kako je $\mathbf{F}$ slobodna algebra, sledi da svi željeni identiteti važe u varijetetu $\mathcal{W}$. Idempotentnost terma p, q i w u $\mathcal{V}$ (i u $\mathcal{W}$ takodje) sledi iz definicije $\mathcal{W}$ kao idempotentnog redukta od $\mathcal{V}$.

Primetimo da su G i K poduniverzumi stepena algebre $\mathbf{F}$ koji su invarijantni u odnosu na sve permutacije koordinata (tzv. totalno simetrični poduniverzumi stepena, [45]), pa ukoliko dokažemo da je, recimo, $(a, b, c)^T \in G$, ovo će značiti da je svaka permutacija uredjene trojke $(a, b, c)^T$ takodje u G, i analogno za K.

Budući da $\mathcal{V}$ realizuje (CD)(4), isto važi i za idempotentni redukt $\mathcal{W}$ (videti odeljak 2.1). Dakle, postoje termi d_0, d_1, d_2, d_3 i d_4 na jeziku varijeteta $\mathcal{W}$ takvi da zadovoljavaju uslove teoreme 1.4.2. Pomoću ovih terma definišemo tri nova elementa algebre $\mathbf{F}$: $x_1 := d_1^{\mathbf{F}}(x, x, y) = d_2^{\mathbf{F}}(x, x, y)$, $y_1 := d_2^{\mathbf{F}}(y, x_1, x_1) = d_3^{\mathbf{F}}(y, x_1, x_1)$ i $y_2 := d_2^{\mathbf{F}}(y_1, x_1, x_1) = d_3^{\mathbf{F}}(y_1, x_1, x_1)$.

Dokazaćemo da $c = y_2$ zadovoljava zahteve navedene iznad.

Najpre dokazujemo da $(y_2, y_2, y_2)^T \in G$. Primetimo da je algebra $\mathbf{G}$ totalno simetrična i ovo ćemo dalje koristiti bez naglašavanja.

$$\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{G}}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{G}} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right).$$

Sledeće dokazujemo da je $(y_2, y_2, y_2)^T \in H$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ y \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x \\ x \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y \\ y \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ y \end{bmatrix} \right).$$

Označimo sa t binarni term takav da $y_2 = t^{\mathbf{F}}(x, y)$. Tada je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = t^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ y \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = t^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y \\ y \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{H}} \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right).$$

Na kraju, dokazujemo da je $(y_2, y_2, y_2, y_2)^T \in K$:

$$\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x \\ x \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{K}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \\ x \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{K}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_1^{\mathbf{K}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{K}} \left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_1 \\ x \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} y \\ x \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_2^{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x_1 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ x_1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = d_3^{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right).$$

□

Sledeći problem je inspirisan tvrdjenjem 5.3.4.

Problem 5.3.5. *1. Da li svaki varijetet $\mathcal{V}$ sa distributivnim mrežama kongruencija realizuje jak Maljcevljev uslov* (SM 1)*?*

2. Da li svaki varijetet $\mathcal{V}$ sa distributivnim mrežama kongruencija realizuje jak Maljcevljev uslov (SM 0)*?*

5.4 Zaključak

Problem odredjivanja optimalnog jakog Maljcevljevog uslova (u smislu arnosti terma, njihovog broja i broja identiteta) koji karakterišu kongruencijsku $\wedge$-poludistribtivnost lokalno konačnih varijeteta je rezultatima ove teze rešen. Karakterizacija ovog svojstva uslovom (SM1) je najpogodniji poznat ekvivalent za računarsku pretragu i već je implementiran u program *Universal Algebra Calculator* zamenivši uslov Janka i Marótija. Ovaj program koji administriraju R. Freese i E. Kiss odredjuje različite osobine zadate algebre, izmedju ostalog i kongruencijsku $\wedge$–poludistributivnost.

S druge strane ostaje otvoreno pitanje da li je karakterizacija uslovom (SM2) optimalna za teorijske primene. Jedino moguće suštinsko pojačanje bi bilo ako bi se ispostavilo da i neki od uslova (SM3) ili (SM4) definisanih na strani 192. takodje karakteriše kongruencijsku $\wedge$-poludistributivnost.

Druga zanimljiva algebarska svojstva varijeteta mahom nije moguće okarakterisati jakim Maljcevljevim uslovima, čak ni u lokalno konačnom slučaju, a ona koja jesu uglavnom imaju već poznate optimalne karakterizacije. Drugim rečima, nema puno prostora za istraživanja drugih zanimljivih svojstava na ovaj način. Pravi nastavak rezultata ove teze će biti teorijske primene naših Maljcevljevih uslova, naročito (SM2), u dokazu novih teorema o kongruencijski $\wedge$-poludistributivnim varijetetima.

Literatura

[1] Baker, K.: *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class*, Adv. in Math. 24: 207–243 (1977)

[2] Bang-Jensen, J., Hell, P.: *The effect of two cycles on the complexity of colourings by directed graphs*, Discrete Appl. Math. 26(1): 1-23 (1990)

[3] Bang-Jensen, J., Hell, P. , MacGillivray, G.: *The Complexity of Colouring by Semicomplete Digraphs*, SIAM J. Discrete Math. 1 (3): 281-298 (1988)

[4] Barto, L.: *The collapse of the Bounded Width Hierarchy*, Journal of Logic and Computation Advance Access (in press)

[5] Barto, L., Kozik, M.: *Constraint satisfaction problems of bounded width*, Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS'09, 595–603 (2009)

[6] Barto, L., Kozik, M.: *Absorbing subalgebras, cyclic terms and the constraint satisfaction problem*, Logical Methods in Computer Science 8/1:07, 1–26 (2012)

[7] Barto, L., Kozik, M.: *Constraint satisfaction problems solvable by local consistency methods*, J. ACM, 61(1): 1–19 (2014)

[8] Barto, L., Kozik, M., Maróti, M., McKenzie, R., Niven, T.: *Congruence modularity implies cyclic terms for finite algebras*, Algebra Universalis 61: 365–380 (2009)

[9] Barto, L., Kozik M., Niven, T.: *The CSP dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of Bang–Jensen and Hell)*, SIAM Journal on Computing 38(5): 1782–1802 (2009)

[10] Barto, L., Oprsal, J., Pinsker, M.: *The wonderland of reflections*, submitted.

[11] Barto, L., Stanovsky, D.: *Polymorphisms of small digraphs*, Novi Sad J. Math. 40(2) 95–109 (2010)

[12] Bulatov, A.: *Combinatorial problems raised from 2-semilattices*, J. Algebra, 298(2):321–339 (2006)

[13] Bulatov, A.: *A dichotomy theorem for constraints on a three–element set*, Journal of the ACM, 53(1): 66–120 (2006)

[14] Bulatov, A., Dalmau, V.: *A Simple Algorithm for Mal'tsev Constraints*, SIAM J. Comput. 36(1): 16–27 (2006)

[15] Bulatov, A., Krokhin, A., Jeavons, P.: *Constraint satisfaction problems and finite algebras*, in Automata, languages and programming (Geneva, 2000), vol. 1853 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 272–282 (2000)

[16] Bulatov, A., Jeavons, P., Krokhin, A. : *Classifying the complexity of constraints using finite algebras*, SIAM J. Comput., 34(3): 720–742 (electronic) (2005)

[17] Bulatov, A., Valeriote, M.: *Results on the algebraic approach to the CSP, in Complexity of Constraints: An Overview of Current Research Themes*, Springer-Verlag, 68–92 (2008)

[18] Bulin, J., Delic, D., Jackson, M., Niven, T.: *A finer reduction of constraint problems to digraphs*, Log. Meth. Comput. Sci. 11(4:18): 1-33 (2015)

[19] Burris, S., Sankappanavar, H.P.:*A Course in Universal Algebra*, Springer–Verlag New York Inc. (1981)

[20] Carvalho, C.A., Dalmau, V., Marković, P., Maróti, M.: *CD(4) has bounded width*, Algebra Universalis 60: 293–307 (2009)

[21] Czedli, G.: *A Malcev-type condition for the semidistributivity of congruence lattices*, Acta Sci. Math. (Szeged) 43(3–4): 267-272 (1981)

[22] Czedli, G.: *A characterization for congruence meet–semidistributivity*, Proc. Conf. Universal Algebra and Lattice Theory, Puebla (Mexico, 1982), Lecture Notes in Math., Springer, New York 1004:104–110 (1983)

[23] Dalmau, V.: *Generalized Majority-Minority Operations are Tractable*, Logical Methods in Computer Science 2(4): 126–148 (2006)

[24] Dalmau, V.: *There are no pure relational width* **2** *constraint satisfaction problems*, Inf. Process. lett., 109(4): 213–218 (2008)

[25] Feder, T., Vardi, M.Y.:*The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory*, SIAM Journal on Computing, 28(1): 57–104 (1998)

[26] Hell, P., Nešetřil, J.: *On the complexity of H–coloring*, J. Combin. Theory Ser. B 48 (1): 92-110 (1990)

[27] Hobby, D., McKenzie, R.: *The Structure of Finite Algebras*, Contemporary Mathematics, Vol.76 (American Mathematical Society, Providence,RI,1988); (revised 1996)

[28] Idziak, P., Marković, P., McKenzie, R., Valeriote, M., Willard, R.: *Tractability and learnability arising from algebras with few subpowers*, SIAM Journal on Computing 39(7): 3023–3037 (2010)

[29] Jeavons, P.: *On the Algebraic Structure of Combinatorial Problems*, Theoretical Computer Science, 200: 185-204 (1998)

[30] Jeavons, P.G., Cohen, D.A., Cooper, M.: *Constraints consistency and closure*, Artificial Intelligence, 101: 251-265 (1998)

[31] Jeavons, P., Cohen, D., Gyssens, M.:*Closure properties of constraints*, J.ACM, 44(4): 527–548 (1997)

[32] Jónsson, B.: *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand. 21: 110–121 (1967)

[33] Jónsson, B.: *Congruence varieties*, Algebra Universalis 10 (3): 355-394 (1980)

[34] J.J.: *On terms describing omitting unary and affine types*, Filomat 27(1) 183–199 (2013)

[35] J.J.: *On strong Mal'cev conditions for congruence meet–semidistributivity in a locally finite variety*, Novi Sad J. Math. 44(2) 207-224 (2014)

[36] Kearnes, K., Kiss, E.: *The shape of congruence lattices*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 222, no. 1046 American Mathematical Society, Providence (2013)

[37] Kearnes, K., Marković, P., McKenzie, R.: *Optimal strong Mal'cev conditions for omitting type* 1 *in locally finite varieties*, Algebra Universalis 59: 463–489 (2008)

[38] Kearnes, K., Szendrei,Á.: *The relationship between two commutators*, Internat. J. Algebra Comput. 8: 497–531 (1998)

[39] Kearnes, K. A., Willard, R.: *Residually finite, congruence meet-semidistributive varieties of finite type have a finite residual bound*, Proc. Amer. Math. Soc. 127: 2841–2850 (1999)

[40] Kozik, M., Krokhin, A., Valeriote, M., Willard, R.: *Characterizations of several Maltsev Conditions*, Algebra Universalis 73(3–4): 205-224 (2015)

[41] Larose, B., Zádori, L.: *Bounded width problems and algebras*, Algebra Universalis, 56(3–4): 463–489 (2007).

[42] Lipparini,P.: *A characterization of varieties with a difference term,II: Neutral = meet–semidistributive*, Canad. Math. Bull. 41: 318–327 (1998)

[43] Maljcev, A.: *On the general theory of algebraic systems*, Mat. Sb. (77) 35: 3–20 (1954)

[44] Maróti, M.: *The existence of a near-unanimity term in a finite algebra is decidable*, Journal of Symbolic Logic 74(3): 1001-1014 (2009)

[45] Maróti, M., McKenzie, R.: *Existence theorems for weakly symmetric operations*, Algebra Universalis, 59(3–4): 463489 (2008)

[46] Park, R.: *Equational classes of non-associative ordered algebras*, Ph.D. dissertation, UCLA (1976)

[47] Quackenbush, R. W.: *Equational classes generated by finite algebras*, Algebra Universalis 1: 265–266 (1971)

[48] Schaefer, T.J.: *The Complexity of Satisfiability Problems*, In Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC78), 216-226 (1978)

[49] Valeriote, M.: *A subalgebra intersection property for congruence distributive varieties*, the Canadian Journal of Mathematics, 61(2): 451–464 (2009)

[50] Willard, R.: *A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semi-distributive varieties*, J. Symbolic Logic, 65: 187–200 (2000)

Biografija

Jelena Jovanović rodjena je 14.03.1975. u Nišu. Diplomirala je na Matematičkom fakultetu u Beogradu 2001. godine na smeru Računarstvo i informatika. Od 2002. do 2003. bila je zaposlena u Direkciji fonda penzijskog i invalidskog osiguranja u Beogradu, od 2003. do 2005. u Gimnaziji u Kruševcu, od 2005. do 2008. u Direkciji za mobilnu telefoniju Telekoma Srbija i od 2008. do danas na Univerzitetu Džon Nezbit (Megatrend) kao asistent. Doktorske studije na Matematičkom fakultetu upisala je školske 2006/2007. godine.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Јелена Јовановић

број уписа 2032/2006

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Локално коначни варијетети са полу-дистрибутивном мрежом конгруенција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 26.5.2016.

J. Jovanović

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Јелена Јовановић____

Број уписа 2032/2006____

Студијски програм алгебра____

Наслов рада Локално коначни варијетети са полу-дистрибутивном мрежом конгруенција____

Ментор проф. Предраг Тановић____

Потписани Јелена Јовановић____________________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 26.5.2016._________________

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Локално коначни варијетети са полу-дистрибутивном мрежом

конгруенција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 26.5.2016.

[signature]

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.