

Научно-наставном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Научно-наставног већа одржаној 23.01.2015. године одређени смо у комисију за преглед рукописа

Асиметрични правилни типови

који је предат као докторска дисертација Славка Моцоње. Кандидат је предао текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Славко Моцоња је рођен 11.10.1984. у Сремској Митровици, где је завршио основну и средњу школу. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене уписао је 2003. године. Дипломирао је 2007. године са просечном оценом 9,85 и исте године уписао докторске студије. Положио је испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10.

2. Списак научних радова

Радови повезани са докторском дисертацијом

[1] S. Moconja, P. Tanović, Asymmetric regular types. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 166/2, 2015. pp. 93–120. ISSN: 0168 0072, IF 2014: 0.548, M22 (Logic 9/21).

[2] S. Moconja, On commutativity of quasi-minimal groups, *Publications de l'Institut Mathematique*, прихваћен за штампу, DOI: 10.2298/PIM150510030M.

Остали радови

[3] S. Moconja, Z. Petrović, On the structure of comaximal graphs of commutative rings with identity, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Vol. 83/1, 2011, pp. 11–21. ISSN 0004 9727. IF 2011: 0.545, M23.

[4] S. Moconja, Z. Petrović, On graphs associated to rings, *Novi Sad Journal Of Mathematics*, Vol. 38/3, 2008. pp. 33–38. ISSN: 1450-5444, M51.

[5] D. Ilić, S. Moconja, P. Tanović, Groups with finitely many countable models, *Publications de l'Institut Mathematique, Nouvelle serie*, tome 97(111) 2015, pp.33–41. ISSN 0350-1302. IF 2014: 0.270, M23.

3. Предмет докторске дисертације

Вилијам Марш је 1966. године дао прво моделско теоретско уопштење појмова димензије у векторским просторима и степена трансцендентности у пољима. Као мотивација му је послужила чињеница да је сваки бесконачан векторски простор, као и свако алгебарски затворено поље, у моделско теоретском смислу минимална структура (сваки бесконачан дефинабилан подскуп има коначан комплемент). Доказао је да свака минимална структура носи природно дефинисану структуру комбинаторне предгеometriје која индукује појам зависности и димензије, а који се у поменутиим контекстима подударују са појмом линеарне, односно алгебарске зависности. Предгеometriја је оператор алгебарског затварања који задовољава Штајницову аксиому замене и представља бесконачну верзију матроида. Посебно, у свакој минималној структури овај оператор је у потпуности одређен својим генеричким типом, односно скупом свих формула чији је скуп решења у структури коначан.

Шелах је крајем седамдесетих година прошлога века зачео теорију класификације структура првог реда, чији је основни задатак да за дату класу структура првог реда одреди систем инваријанти, уколико такав постоји, који би сваку структуру класе одредио до на изоморфизам. Десетак година касније овај проблем је у потпуности решио за класу непребројивих модела дате потпуне теорије првог реда. Између осталог, доказао је да уколико такав систем постоји теорија мора бити суперстабилна. Увео је појам правилног типа у стабилним теоријама, уопштивши у једном смеру Маршове идеје. Доказао је да сваки правилан тип индукује одређену предгеometriју у моделу теорије чија је димензија (једна од) инваријанти типа изоморфизма тог модела. Уколико класа непребројивих модела има систем инваријанти, доказао је да тај систем чини дрво чији су чворови означени кардиналним бројевима који представљају димензије извесних правилних типова.

Појам правилног типа у општим теоријама првог реда увели су Пилеј и Тановић 2009. године, а као мотивација је послужила Зилберова хипотеза која тврди да је поље комплексних бројева са придодатом експоненцијалном функцијом квазиминимална структура (непребројива структура у којој је комплемент сваког непребројивог, дефинабилног подскупа највише пребројив). Доказали су да постоје две врсте правилних типова: симетрични и асиметрични. Симетрични типови у сваком моделу одређују предгеometriју чија је димензија инваријанта модела, док је за асиметричне доказано да потичу из одређеног парцијалног уређења које индукује прави оператор алгебарског затварања. У стабилним теоријама сваки правилан тип у овом ширем смислу је симетричан и правилан у Шелаховом смислу. Такође, доказали су да у свакој минималној и квазиминималној групи постоји јединствен правилан тип па, самим тим, постоји и подела на асиметричне и симетричне (квази) минималне групе; исто важи и за поља.

Предмет дисертације су асиметрични глобални правилни типови. О њима се, за разлику од симетричних, не зна пуно и ова дисертација представља допринос у том правцу.

4. Приказ дисертације

Дисертација се састоји од предговора на 6 страна, текста од 104 стране подељеног у 5 поглавља, списка литературе од 20 библиографских јединица и листе симбола. Прва два поглавља (стр. 7–41) су уводног карактера, а преостала три поглавља садрже оригиналне резултате. Прво поглавље садржи преглед основних појмова и тврђења која се касније користе. Друго поглавље је посвећено правилним типовима и њиховој подели на симетричне и асиметричне.

Треће поглавље је посвећено квазиминималним структурама и садржи оригиналне резултате из рада [2]. У теорему 3.6 доказано је да су за дату потпуну теорију T у пребројивом језику егзистенција јако правилног типа (преко $x = x$) и егзистенција квазиминималног модела скоро еквивалентни услови. Прецизније, доказано је да егзистенција пребројиво инваријантног, јако правилног преко $x = x$ типа повлачи егзистенцију квазиминималног модела теорије T , као и да егзистенција квазиминималног модела са дефинабилним генеричким типом повлачи јаку правилност глобалног наследника тог типа. Други важан резултат овог поглавља је садржан у теорему 3.13. Доказано је да је свака квазиминимална група у којој постоји дефинабилно (у језику теорије група) парцијално уређење са непребројивим ланцем Абелова, чиме је делимично потврђена хипотеза Пилеја и Тановића.

Четврто поглавље је централно у дисертацији и садржи резултате објављене у коауторском раду [1]. Прво је доказано да сваки асиметричан, A -инваријантан, правилан тип \mathfrak{p} у моделу $M \supseteq A$ одређује инваријанту $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ која је линеарно уређење максималног Морлијевог низа типа \mathfrak{p} који чине елементи модела M ; доказано је да тип изоморфизма тог уређења не зависи од избора максималног Морлијевог низа. Према томе, асиметрични правилни типови у сваком моделу кодирају линеарно уређење, слично као што симетрични правилни типови кодирају кардинални број $dim_{\mathfrak{p}}(M)$ који представља димензију предгеometriје индуковане на моделу $M \supseteq A$ типом \mathfrak{p} ; сваки правилан тип одређује инваријанту модела која је или кардинал или линеарно уређење. За фиксирани \mathfrak{p} , T и A утврђене су могућности за $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ када $M \supseteq A$ пролази класом (пребројивих) модела теорије T . Опис је захтевао увођење поткласа конвексних и простих асиметричних правилних типова. У теорему 4.23 је доказано:

1. Ако је \mathfrak{p} прост и конвексан, тада је $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ густо линеарно уређење.

2. Ако су A и T пребројиви, а \mathfrak{p} није истовремено и прост и конвексан, тада $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ може бити ма које пребројиво линеарно уређење.

Последица 4.26 утврђује да у пребројивом случају $\{Inv_{\mathfrak{p},A}(M) \mid M \models T, M \supseteq A, |M| = \aleph_0\}$ има 1,3,6 или 2^{\aleph_0} елемената. Затим је испитивана веза између инваријанти фиксираних модела одређених различитим правилним типовима \mathfrak{p} и \mathfrak{q} . Доказано је да никаква посебна веза не постоји уколико је један од њих симетричан а други асиметричан; другим речима, такви типови су ортогонални: $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{q}$. Затим је анализирана веза између $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $Inv_{\mathfrak{q},A}(M)$ за асиметричне правилне типове $\mathfrak{p} \not\perp \mathfrak{q}$. Уз додатну (показано је и неопходну) претпоставку конвексности типова доказано је да постоје две врсте неортогоналности:

1. Ограничена; тада су $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $Inv_{\mathfrak{q},A}(M)$ изоморфни или антиизоморфни;
2. Неограничена; у том случају $Inv_{\mathfrak{p},A}(M)$ и $Inv_{\mathfrak{q},A}(M)$ су густа уређења која имају изоморфна или антиизоморфна Дедекиндова комплетирања.

Пето поглавље садржи необјављене резултате добијене у сарадњи са ментором. Тема овог поглавља су линеарна уређења са придодатим унарним релацијама и конвексним релацијама еквиваленције. Доказано је да је сваки инваријантан тип у потпуној теорији такве структуре правилан, као и да сваки неалгебарски тип $p \in S_1(A)$ има тачно два глобална инваријантна проширења \mathfrak{p}_l и \mathfrak{p}_r , при чему су у сваком моделу $Inv_{\mathfrak{p}_l,A}(M)$ и $Inv_{\mathfrak{p}_r,A}(M)$ антиизоморфна уређења. Тиме је утврђена фамилија нових примера правилних типова и отворена могућност за дубље разумевање проблема изоморфизма елементарно еквивалентних линеарних уређења.

5. Закључак

Резултати изложени у рукопису представљају значајан допринос теорији класификације структура првог реда. Ради се о новим идејама и резултатима који нису уопштења постојећих и чије извођење је захтевало употребу нових метода и техника. Сама теза је одлично написана. Аутор је нашао прави начин да организује излагање резултата, као и да презентује, иначе технички компликоване, доказе.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да **прихвати приложени рукопис као докторску дисертацију** Славка Моцоње и да одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 15. 7. 2015.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

др Предраг Тановић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Милан Божић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Небојша Икодиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Dr Hab. Krzysztof Krupinski
Универзитет у Вроцлаву

Publications de l'Institut Mathématique

Published by: Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
Knez Mihailova 36, Belgrade, Serbia
phone: +381 11 2630-170
email: publ@mi.sanu.ac.rs

To: Slavko Moconja, Faculty of Mathematics, Belgrade

Dear colleague Moconja

I am glad to inform you that your paper "On commutativity of quasi-minimal groups" is accepted for publication in the **Publications de l'Institut Mathématique**.

Belgrade, June 1, 2015

Best Regards

A handwritten signature in black ink that reads "Žarko Mijajlović". The signature is written in a cursive style with a small mark above the 'v' in "Mijajlović".

Žarko Mijajlović, Editor-in-Chief

Publications de l'Institut Mathématique