

**Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду**

На седници Наставно-научног већа одржаној 18.11.2016. год. именовани смо као чланови комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације Љубице Мухић под називом **Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула са специјалним класама тежинских функција**. Након прегледа рукописа, подносимо Наставно-научном већу следећи

## **Извештај**

### **1. Биографија докторандкиње**

Љубица Мухић (рођ. Матић) је рођена 27. априла 1985. год. у Београду. Завршила је основну школу „Селимир Јовановић” и Шабачку гимназију. Носилац је Вукове дипломе и неких признања са регионалних и републичких такмичења из математике и физике.

Основне студије на Математичком факултету у Београду, смер нумеричка математика и оптимизација, завршила је 2009. год., а мастер студије, под менторством професора Бошка Јовановића, наредне године. Током основних студија била је стипендиста Министарства просвете и DAAD-а. Зимски семестар 2009/10. је провела на Техничком Универзитету у Минхену, бавећи се имплементацијом мултигрид методе у MATLAB-у. Докторске студије је уписала 2010. године. Имала је излагања је на трећем и петом симпозијуму „Математика и примене”, као и два излагања на семинару „Математички методи механике“ у САНУ-у током октобра 2012. год. У септембру 2011. год. је похађала једномесечни курс „PhD course, Optimization Syllabus for the TEMPUS”. Од октобра 2010. год. ради на Високо медицинској и пословно-технолошкој школи струковних студија, као асистент на предметима математика, пословна математика, статистика, математички софтвер.

## 2. Предмет дисертације

Интеграција има широку примену приликом математичког моделовања многих појава које се јављају у природним, техничким наукама, економији и другим областима. Када се вредност интеграла не може аналитички израчунати, потребно је конструисати формулу која апроксимира његову вредност са прихватљивом тачношћу. Поред традиционалних формула које се користе, тенденције у развоју ове области односе се на повећање тачности формуле и оцену грешке настале када се интеграл замени коначном сумом.

Предмет ове дисертације су Гаусове квадратурне формуле са чворовима произвољне вишеструкости (глава 3), или са двоструким чворовима (главе 2 и 4). Уколико је, као чвор, фиксиран један од крајева интервала интеграције, ради се о Гаус-Радау квадратурним формулама, а уколико се фиксирају оба краја интервала интеграције, такве формуле су Гаус-Лобато типа. Поред поменутих формула, у тези се анализира и Кронродово уопштење Гаус-Туранове квадратурне формуле у којој се поред вредности функције у чворовима посматрају и вредности произвољних извода функције. Циљ је дати ефикасне оцене грешака поменутих формула у односу на различите врсте Чебишевљевих тежинских функција као и Гори-Мичелијеве тежинске функције која у специјалном случају представља уопштење прве Чебишевљеве тежинске функције.

## 3. Структура рукописа

Рукопис садржи 134 страница (10 + 110 + 14) подељених на следећа поглавља и потпоглавља

### 1. Увод

- Математички апарат
- Гаусова квадратурна формула
- Конструкција Гаусових квадратурних формула
- Остатак квадратурне формуле
- Неке модификације Гаусове формуле, новији резултати

### 2. Остатак Гаус-Лобато квадратурне формуле

- Гаус-Лобато квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњим тачкама, основни појмови
  - Гаус-Лобато квадратурне формуле у односу на Чебишевљево тежинску функцију друге врсте
  - Гаус-Лобато квадратурне формуле у односу на Чебишевљево тежинску функцију треће и четврте врсте
3. Уопштене Гаус-Туранове квадратурне формуле, коефицијенти и остатак
- Уводно поглавље
  - Коефицијенти Кронродовог уопштења Гаус-Туранове квадратурне формуле
4. Остатак Гаус-Радау квадратурне формуле
- Гаус-Радау квадратурне формуле са двоструким чвором у крајњој тачки
  - Трећа Чебишевљева тежинска функција
  - Друга Чебишевљева тежинска функција
  - Нумерички примери

Додаци (1 – 11) садрже сложене полиномијалне изразе као и помоћне MATLAB функције које се позивају у главним функцијама наведеним у главама 3 и 4.

Литературу чине 129 библиографске јединице.

#### **4. Анализа рукописа и приказ оригиналних резултата**

Прва глава је уводног карактера и садржи познате појмове и тврђења која се користе у остатку рада. Описана су основна својства ортогоналних полинома који учествују у конструкцији Гаусових квадратурних формула. Такође, дефинишу се различити типови остатака квадратурних формула, при чему се у наредним главама анализира интегрална репрезентација остатка. Поред тога, изложени су и новији резултати који се односе на повећавање вишеструкости чворова.

Преостале три главе садрже поглавља са оригиналним резултатима.

Друга глава је посвећена оцени грешке Гаус-Лобато квадратурне формуле са двостуким чвором у крајњим тачкама. Након детаљне анализе језгра остатка поменути квадратурне формуле, доказане су Теореме које говоре о условима под којима се достиже максимум модула језгра остатка, одређене су фиксиране вредности које се спомињу у Теорема 2.2, Теорема 2.3, Теорема 2.4 и приказане су стварне грешке и оцене грешака датих формула.

У трећој глави је разматрано Кронродово уопштење Гаус-Туранове квадратурне формуле у односу на специјални случај Гори-Мичелијеве тежинске функције. Поменуто уопштење се састоји у томе да се поред чворова Гаус-Туранове формуле уведу нови чворови, нуле Чебишевљевог ортогоналног полинома друге врсте, у којима се посматра само вредност функције (не и њених извода). Овом модификацијом, Кронродова формула је заправо квадратурна формула Чакалов-Поповициу типа. Докторандкиња је применом метода које важе за ту формулу, у неким случајевима израчунала коефицијенте и грешку Кронродовог уопштења.

У четвртој глави су доказане Гаучи-Ли хипотезе о Гаус-Радау квадратурним формулама у односу на Чебишевљеве тежинске функције друге и треће врсте (Теорема 4.2 и Теорема 4.3). Поглавље 4.4 се састоји од нумеричких примера и садржи табеле у којима су изложене ефикасне оцене грешака.

## **5. Референце генерисане у току рада на дисертацији**

Резултати приказани у овом рукопису публиковани су у

- једном коауторском раду у часопису са SCI листе,
- једном самосталном раду  
(у часопису са SCI листе уколико се посматра петогодишњи IF),
- једном коауторском раду у зборнику националне конференције са међународним учешћем.

Један коауторски рад је предложен за штампу у међународном часопису са SCI листе. Два рада су у припреми.

1. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error Bounds for Gauss-Lobatto Quadrature Formula with Multiple End Points with Chebyshev Weight Function of the Third and the Fourth Kind, (accepted 2014), Filomat, vol. 30, num. 1, 231-239 (2016)
2. Lj.V. Mihić, The remainder term of Gauss-Radau quadrature rule with single and double end point, Publ. Inst. Math. (to appear, DOI 10.2298/PIM161115002M)
3. Ljubica Mihić, Aleksandar Pejčev, Ocena greške Gaus-Lobato kvadrature formula u odnosu na Čebiševljeve težinske funkcije druge, treće i četvrte vrste, Zbornik radova, V simpozijum „Matematika i primene”, str. 152-160 (2014)
4. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Lobatto quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications (предложен за штампу)
5. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Kronrod extension of Turán formula with respect to certain weight functions (у припреми)
6. A.V. Pejčev, Lj.V. Mihić, Error bounds for Gauss-Radau quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, (у припреми)

## 6. Закључак

Рукопис **Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула са специјалним класама тежинских функција** садржи вредан научни допринос у области нумеричке интеграције. У њему су детаљно анализирани Гаус-Лобато, Гаус-Радау и Гаус-Туранове квадратурне формуле са двоструким или вишеструким чворовима. Формулисани су и доказане Теореме које описују понашање модула језгра остатка Гаус-Лобато и Гаус-Радау квадратурних формула. Теоријски резултати су добијени коришћењем конструктивне теорије ортогоналних полинома, као и теорије везане за конструкцију квадратурних формула Гаусовог типа. Поред теоријске анализе, изложени су богата нумеричка анализа и нумерички експерименти у којима се види ефикасност предложених оцена грешака поменутих квадратурних формула. Резултати добијени у овој дисертацији су публиковани у једном часопису са SCI листе категорије M22, једном домаћем часопису и зборнику националног научног

скупа. Један део резултата је предложен за штампу у часопису са SCI листе, док је преостали део у припреми за слање.

Констатујемо да су испуњени сви циљеви наведени приликом предлагања ове теме, као и сви формални услови.

Имајући у виду горе наведене чињенице у вези са вредним оригиналним научним резултатима изложеним у дисертацији, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду и Већу научних области природно-математичких наука Универзитета у Београду да **одобри Љубици Михаић одбрану докторске дисертације под насловом „Остатак одређених типова Гаусових квадратурних формула са специјалним класама тежинских функција”**, и одреди комисију за њену јавну одбрану.

у Београду, 20.12.2016.

#### **Чланови комисије**

---

**др Милан Дражић**, ментор, ванредни професор,  
Универзитет у Београду, Математички факултет

---

**др Александар Пејчев**, доцент,  
Универзитет у Београду, Машински факултет

---

**др Миодраг Спалевић**, редовни професор,  
Универзитет у Београду, Машински факултет

---

**др Десанка Радуновић**, ванредни професор у пензији,  
Универзитет у Београду, Математички факултет

## Додатак

### Референце Љубице Мићић

#### Мастер рад

1. Љубица Матић, О једној класи трансмисионих проблема у неповезаној области, одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду 2010. године (ментор проф. др. Бошко Јовановић)

#### Радови који су публиковани или прихваћени за штампу

1. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error Bounds for Gauss-Lobatto Quadrature Formula with Multiple End Points with Chebyshev Weight Function of the Third and the Fourth Kind, (accepted 2014), Filomat, vol. 30, num. 1, 231-239 (2016)

2. Lj.V. Mihić, The remainder term of Gauss-Radau quadrature rule with single and double end point, Publ. Inst. Math.  
(to appear, DOI 10.2298/PIM161115002M)

3. Ljubica Mihić, Aleksandar Pejčev, Ocena greške Gaus-Lobato kvadrature formula u odnosu na Čebiševljeve težinske funkcije druge, treće i četvrte vrste, Zbornik radova, V simpozijum „Matematika i primene”, str. 152-160 (2014)

#### Радови који су предложени за штампу или у припреми

4. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Error bounds for Gauss-Lobatto quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications  
(предложен за штампу)

5. Lj.V. Mihić, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, Kronrod extension of Turán formula with respect to certain weight functions (у припреми)

6. A.V. Pejčev, Lj.V. Mihić, Error bounds for Gauss-Radau quadrature with double end points with Chebyshev weight of the second kind, (у припреми)

## Саопштења на научним скуповима и семинарима

1. Ljubica Mihić, The remainder term of Kronrod extension of Gauss-Turán formula, Seminar of the project 174002 „Methods of numerical and nonlinear analysis with applications”, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, October 2016.
2. Ljubica Mihić, Aleksandar Pejčev, Ocena greške Gaus-Lobato kvadrature formula u odnosu na Čebiševljeve težinske funkcije druge, treće i četvrte vrste, V simpozijum „Matematika i primene”, oktobar 2014.
3. Ljubica Matić, Euler-ove jednačine - klasična teorija potencijalnih strujanja, Seminar „Matematički metodi mehanike“, SANU, 26. septembar i 3. oktobar 2012.
4. P. Rogleva, I. Jovanović, I. Grujičić, Lj. Matić, Presentation of one month group working, PhD course, Optimization Syllabus for the TEMPUS, Faculty of Mathematics, Belgrade, September 2011.
5. Ljubica Matić, Multigrid method–implimentations in MATLAB, Technische Universitat Munchen, Munchen, December 2009.