Универзитет у Београду
Наставно научном већу
Математичког факултета

На 302. седници Наставно-научног већа Математичког факултета, одржаној 18.11.2011. у Београду, одређени смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације

ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВАЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА

магистра Миљана Кнежевића. Кандидат је предао текст, Комисија га је прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Основни биографски подаци кандидата

Име и презиме: Миљан (Вукић) Кнежевић
Датум рођења: 12.05.1973.
Радно место: Математички факултет, Универзитет у Београду
Звање: Асистент
Адреса: Студентски трг 16, 11000 Београд, Србија
Електронска адреса: kmiljan@matf.bg.ac.rs

Након завршене Математичке гимназије у Београду, јуна 1992. године, уписује се на Математички факултет, Универзитет у Београду, на којем и дипломира јануара 1997. године, на смеру за теоријску математику и примене, са просчном оценом 9.69. Звање магистра математичких наука стекао је октобра 2005. године на истом факултету, на тему - ХАРМОНИЈСКА ПРЕСЛИКАВАЊА, ТРАЈЕКТОРИЈЕ И КРИВИНА. Дана 12.12.2011. године Универзитет у Београду је дао сагласност на предлог теме докторске дисертације под називом - ХАРМОНИЈСКА И КВАЗИКОНФОРМНА ПРЕСЛИКАВАЊА, КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЈЕ И КРИВИНА.

Од октобра 2001. године је запослен као асистент на Математичком факултету, Универзитет у Београду, ужа научна област - Комплексна анализа. Тренутно је ангажован на предметима Комплексна анализа, Увод у комплексну анализу, Увод у финансијску математику, Геометријска теорија функција и Начела наставе математике, док је раније изводио вежбе и на предметима Анализа 1, Анализа 2, Диференцијалне једначине, Диференцијална геометрија, Основи геометрије, Математика 2. Члан је Друштва математичара Србије, као и Републичке комисије за такмичења ученика средњих школа. Био је у неколико наврата вођа српског националног тима на међународним такмичењима из математике.

2. Списак научних и стручних радова

- M. Knežević, M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings*, J. Math. Anal. Appl., 334/1, 404-413, (2007): ISSN: 0022-247X, IF: 1.119.
- M. Knežević, *Some Properties of Harmonic Quasiregular Mappings*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (LTAPH), Volume 36, pp 531–539, (2013): DOI 10.1007/978-4-431-54270-4_40, ISSN 2194-1009, Online ISBN 978-4-431-54270-4, Print ISBN 978-4-431-54269-8.
(http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-4-431-54270-4_40)
- M. Mateljević, V. Božin, M. Knežević, *Quasiconformality of Harmonic Mappings Between Jordan Domains*, FILOMAT, (2010), vol. 24 br. 3, str. 111–122, (2010): ISSN 0354-5180, IF 0.753.
- M. Knežević, *Some models of economic growth and capital accumulation*, Proceedings of XXXIX Symposium in Operations Research, (SYMOPIS 2012).
- M. Knežević, Dj. Krtinić, *A note on infinite descent principle*, Teaching of Mathematics, Vol. 16, br. 2, str. 67–78, (2013): ISSN: 1451-4966.
- B. Radivojević, M. Knežević, *Pricing options using the binomial model. Practical application*, Zbornik radova, IV Symposium - Mathematics and Applications, University of Belgrade, Vol IV(1), 40–47, (2014): Print ISBN 978-86-7589-089-8, Online ISBN 978-86-7589-090-4.
- I. Anić, M. Stamenković, M. Knežević, *Insurance Company Valuation Based on Electre Multicriteria Decision Making*, Proceedings of XXXVIII Symposium in Operations Research, (SYMOPIS 2011), ISBN: 978-86-403-1168-7.

3. Предмет дисертације

У класичној теорији комплексних функција многи проблеми, чијим решавањем би се описала поједина геометријска својства аналитичких функција, су преокупирали пажњу великог броја истакнутих математичара. Међутим, веома мало особина класе аналитичких функција, чак и ако се модификују, се могу директно пренети на неке друге важне класе пресликавања, као што су хармонијска, односно квазиконформна пресликавања.

Предмет докторске дисертације кандидата је био проучавање различитих особина обичних хармонијских пресликавања, квазиконформних и хармонијских пресликавања у односу на задату конформну метрику у слици, док је главни циљ био да се добије одговор на питање које од многих особина тих класа функција су од есенцијалног значаја за валидност резултата попут оних који уопштавају чувене теореме Шварц-Пиковог типа. Такође, потенцирано је на увођењу нових метода, па је акценат стављен на геометријски приступ анализирањем особина Гаусове кривине у различитим ситуацијама.

4. Приказ дисертације

Рад се састоји из пет поглавља, са списком литературе од 60 библиографских јединица и јасно је да је уложен велики труд да се напише веома прегледно.

У првој глави изложен је преглед основних појмова и резултата из теорије квазиконформних пресликавања, а затим је уведен неопходан аналитички апарат који ће касније бити од користи. У потпуности је изложен Гречов проблем и објашњене су мере дисторзије тих пресликавања које их чине природним уопштењима конформних.

У другом делу су пажљиво обрађене теме из теорије хармонијских функција. Доказано је неколико помоћних тврђења, а затим су показане теорема Левија, одговарајућа верзија Шварцове леме за хармонијска пресликавања, као и неједнакост Хајнца са свим њеним последицама.

У трећој глави дате су многе појединости које се односе на појам Риманових површи, на конформне метрике на њима, као и неколико важних резултата који се тичу теорије уопштених хармонијских пресликавања, уопштених у смислу присуства конформне метрике у слици. Дат је и аналогон чувене Риманове теореме, тј. теорема униформизације, која нам обезбеђује да извршимо класификацију Риманових површи у односу на универзалну наткривајућу површ. Од интереса је било увести и појам хиперболичке метрике на површима хиперболичког типа, тј. онима које се наткривају јединичним диском $\mathbb{D}$. Доказана је и Бохнерова формула уз помоћ које је у наредној глави представљен нови приступ и метод у доказу Ванове теореме.

У четвртој глави представљен је кратак преглед геометријске теорије функција као и разне верзије неједнакости Шварц-Пиковог типа, специјално, Алфорс-Шварцова лема. Дате су оцене за хиперболички извод пресликавања, под одређеним условима, као и многи резултати који се односе на упоређивање метрика, као и њихове последице. Доказана је на потпуно други начин Ванова теорема, која је многим математичарима послужила као инспирација за даље истраживање. Штавише, по први пут су одређене константе билипшицовсти хиперболичког хармонијског и квазиконформног дифеоморфизма јединичног диска на себе.

Теорема **1**. *Сваки хармонијски, у односу на хиперболичку метрику, квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе је квази-изометрија тог диска у односу на хиперболичку метрику. Штавише, песликавање f је*

$$(1-k, \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\,)$$

би-Липшицово у односу на хиперболичку метрику.

На крају, у петој глави посматрани су еуклидски хармонијски дифеоморфизми разних домена, који су још и квазиконформна пресликавања, и добијени су многи значајни резултати који унапређују ову теорију. Многи од тих резултата су ауторски, док је неколико њих добијено у сарадњи са ментором. Такође, дате су смернице које воде ка даљим истраживањима у области хармонијских и квазиконформних пресликавања.

5. Остварени научни допринос кандидата

Прву некомплетну карактеризацију хармонијског квазиконформног дифеоморфизма f јединичног диска на себе у свом чланку дао је О. Мартио. Он је, уз помоћ Хајнцове неједнакости, тј. неједнакости $|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2 \geqslant \dfrac{1}{\pi^2}$, $z \in \mathbb{D}$, приметио да је сваки хармонијски квазиконформни дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе пресликавање које је ко-Липшицово.

У раду из 2002. године М. Павловић, користећи Моријеву неједнакост за квазиконформна пресликавања и другу технику, је у потпуности окарактерисао поменуте дифеоморфизме у терминима граничне функције, јер се свако квазиконформно пресликавање јединичног диска на себе може проширити до хомеоморфизма одговарајућих затворења. Прецизније, показано је да су за произвољан хармонијски дифеоморфизам f јединичног диска на себе следећа тврђења еквивалентна: (а) f је квазиконформно, (б) f је би-Липшицово у односу на еуклидску метрику, (ц) гранична функција је такође би-Липшицово пресликавање и Хилбертова трансформација њеног извода припада простору $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Кандидат је у заједничком раду са ментором из 2007. године показао, користећи нови приступ, да је свако једно такво пресликавање уједно и квази-изометрија у односу на хиперболичку метрику. Штавише, добијене су конкретне константе билипшицовости.

Теорема **2**. *Нека је f пресликавање које је $k-$квазиконформни хармонијски дифеоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Тада је пресликавање f квази-изометрија јединичног диска у односу на хиперболичку метрику. Специјално, пресликавање f је (K^{-1}, K) би-Липшицово у односу на хиперболичку метрику на $\mathbb{D}$, где је $K = \dfrac{1+k}{1-k} \geqslant 1$.*

У том раду дато је неколико тврђења која су генерализација претходног и тичу се уопштених хармонијских пресликавања, са кривином конформне метрике у слици не већом од унапред задатог негативног броја.

Као последицу претходног резултата, под условом да пресликавање фиксира тачку нула, кандидат добија и конкретне константе еуклидске билипшицовости пресликавања f у тачки $w = 0$, тј. показује да важи $\dfrac{1}{K}|z| \leqslant |f(z)| \leqslant K|z|$, кад год је $z \in \mathbb{D}$. Било је познато да, ако би $m(K)$ била најбоља могућа константа за коју је $m(K)|z| \leqslant |f(z)|$, за свако $z \in \mathbb{D}$, да је тада $\lim\limits_{K \to 1_+} m(K) = 1$, што је технички било тешко показати (Д. Партика и К. Сакан су 2005. године одредили конкретне константе билипшицовости). Очигледно сада важи $\dfrac{1}{K} \leqslant m(K) \leqslant 1$.

Како је композиција хармонијског и аналитичког пресликавања хармонијско, испоставило се да се сви претходни резултати могу генерализовати уколико се домен замени произвољним Жордановим доменом са $C^{1,\alpha}$ границом. Међутим, "пост-компоновање" хармонијског пресликавања аналитичким губи својство хармоничности, па су очекиване неке друге технике које ће довести до сличних тврђења у случају произвољног кодомена комплексне равни.

У раду из 2005. године, М. Павловић и Д. Калај су описали хармонијске квазиконформне дифеоморфизме горње полуравни $\mathbb{H}$ на себе. Показано је да ако је ψ хомеоморфизам реалне осе на себе, који чува оријентацију, тада се он може продужити до хармонијског квазиконформног дифеоморфизма горње полуравни на себе ако и само ако је пресликавање ψ би-Липшицово и ако Хилбертова трансформација његовог извода припада простору $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Такође, у заједничком раду М. Матељевић, В. Божин и М. Кнежевић на сличан начин описују својстава тих пресликавања. Међутим, заједно са М. Матељевићем, кандидат добија и конкретне константе билипшицовости, како у еуклидском, тако и у хиперболичком случају. Штавише, показано је да је сваки $k-$квазиконформни хармонијски дифеоморфизам горње полуравни на себе (K^{-1}, K) квази-изометрија горње полуравни у односу на хиперболичку, али и у односу на еуклидску метрику. Показано је и да се добијене константе достижу.

Теорема **3**. *Претпоставимо да пресликавање f задовољава горе поменуте услове. Тада за f важи да је (K^{-1}, K) квази-изометрија у односу на еуклидску метрику,* *а самим тим и (K^{-1}, K) би-Липшицово пресликавање, тј. важи*

$$\frac{1}{K}|z_1 - z_2| \leqslant |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant K|z_1 - z_2|,$$

за свако z_1, $z_2 \in \mathbb{H}$, где је $K = \dfrac{1+k}{1-k}$. При томе се обе неједнакости постижу.

Д. Калај је уопштио претходне резултате у случају квазиконформног хармонијског дифеоморфизма јединичног диска на конвексни домен са глатком $C^{1,\alpha}$ границом и добио је да је свако такво пресликавање би-Липшицово у односу на хиперболичку метрику. Такође, од стране два кинеска математичара, одређене су конкретне константе билипшицовости и у случају произвољног просто повезаног конвексног кодомена, које су потпуно исте као у раду кандидата са ментором. Примењен је и потпуно исти метод. Међутим, М. Матељевић и В. Божин, новом техником и идејама, добијају да у случају Жордановиx домена са $C^{1,\alpha}$ границом сваки хармонијски квазиконформни дифеоморфизам између њих је би-Липшицово пресликавање у односу на еуклидску метрику.

На крају, мотивисан претходним резултатом, кандидат добија резултате који потврђују да је сваки квазиконформни хармонијски дифеоморфизам f јединичног диска на произвољни просто повезани хиперболички домен G комплексне равни, користећи само својства хиперболичке метрике и уопштења верзије Шварцове леме за Келерове многострукости, коју је дао Јау, под условом да је конформна метрика $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2$, $z \in \mathbb{D}$, комплетна (λ_G је густина хиперболичке метрике на G), ко-Липшицово пресликавање у односу на одговарајуће хиперболичке метрике.

Теорема **4**. *Нека је f $k-$квазиконформно хармонијско пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на G, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Уколико је конформна метрика $ds^2 = \lambda_G(f(z))|f_z(z)|^2|dz|^2$ комплетна на $\mathbb{D}$, тада важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \geqslant m(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, односно пресликавање f је $m(k)$ ко-Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је $m(k) = \dfrac{1-k}{\sqrt{1+k^2+\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

У обрнутој ситуацији, такав начин истраживања је дао само парцијални резултат. Наиме, одређена је константа липшицовости само за мале k, тј. за она пресликавања која су сувише блиска конформним. На крају, дат је резултат који се односи на густину квазихиперболичке мерике и може послужити као мотивација да се поједини резултати пренесу и на тај случај. Константе билипшицовости у еуклидском случају представљају изазов за даље истраживање.

Теорема **5**. *Нека је $f : \mathbb{D} \to G$ $k-$квазиконформно хармонијско пресликавање, где је $G \subset \mathbb{C}$ произвољна просто повезана област различита од $\mathbb{C}$. Тада, за све $0 \leqslant k \leqslant k_0 < 1$, $1 + k_0^2 - ((16+9\sqrt{3})/2)k_0 = 0$ важи*

$$d_G(f(z_1), f(z_2)) \leqslant M(k)\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2),$$

за свако $z \in \mathbb{D}$, односно пресликавање f је $M(k)$ Липшицово у односу на хиперболичку метрику, где је $M(k) = \dfrac{1+k}{\sqrt{1+k^2-\dfrac{16+9\sqrt{3}}{2}k}}$.

6. Закључак

Резултати до којих је мр Миљан Кнежевић дошао у свом раду представљају спој модерне комплексне анализе и геометрије. Класични резултати, до којих се дошло методама анализе решења одређених класа парцијалних једначина, су превазиђени и приказан је нови поглед на описану тематику. Неки од резултата до којих је кандидат дошао су публиковани у одличним часописима, док ће из саме тезе проистећи најмање још три рада. Због свега наведеног, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати предложени извештај Комисије, односно прихвати приложену тезу као докторску дисертацију кандидата и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 07. новембра 2014. године

КОМИСИЈА:

М. Матељевић

проф. др Миодраг Матељевић (ментор)

М. Павловић

проф. др Мирослав Павловић

М. Јевтић

проф. др Мирољуб Јевтић

проф. др Милош Арсеновић

проф. др Давид Калај

6. Закључак

Резултати до којих је мр Миљан Кнежевић дошао у свом раду представљају спој модерне комплексне анализе и геометрије. Класични резултати, до којих се дошло методама анализе решења одређених класа парцијалних једначина, су превазиђени и приказан је нови поглед на описану тематику. Неки од резултата до којих је кандидат дошао су публиковани у одличним часописима, док ће из саме тезе проистећи најмање још три рада. Због свега наведеног, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати предложени извештај Комисије, односно прихвати приложену тезу као докторску дисертацију кандидата и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 07. новембра 2014. године

КОМИСИЈА:

М. Матељевић

проф. др Миодраг Матељевић (ментор)

М. Павловић

проф. др Мирослав Павловић

М. Јевтић

проф. др Мирољуб Јевтић

проф. др Милош Арсеновић

проф. др Давид Калај