



### **Poreklo i koreni**

U traganju za porodičnim korenima Jovana Karamate, utvrdili smo da potiče iz stare, ugledne i imućne grčko-cincarske porodice, koja se među prvim grčkim i cincarskim trgovcima iz sela Katranice (danas Pirc), iz okoline Mavrova, doselila u Zemun, tadašnju Habsburšku monarhiju, i ubrzo pretopila u Srbe. Grčko-cincarska kolonija u Zemunu je u drugoj polovini 18. veka imala 76 porodica, koje su većinom došle iz Moskopolja i Katranice, početkom 19. veka oko osam stotina duša, a krajem 19. veka ih je ostalo jako malo. (D. J. Popović, *O Cincarima*, Beograd 1937, s. 50.) Iz Katranice su se, po nekim autorima, sredinom 18. veka odselila tri brata Karamate od kojih je jedan otišao u Požun (danas Bratislava), drugi je otišao u Lajpcig a treći je ostao u Zemunu. (D. J. Popović, navedeno delo, s. 83.) Po drugim podacima Dimitrije Karamata je sa sobom u Zemun doveo i brata Anastasa, (Isidor Stojčić, *Znameniti zemunski Srbi u XIX veku*, Deo I, Zemun 1913, s. 20-24.) što potvrđuju zemunski sudski akti iz 1799. godine u kojima se spominje Anastas Matheo Karamata iz Makedonije, (R. Jeremić, *Poreklo stanovnika u Zemunu*, Glasnik Istorijskog društva u Novom Sadu, 1937, s. 416.) i Slavko Gavrilović (*Prilog istoriji trgovine i migracije Balkan-Podunavlje u XVIII i XIX stoleću*, Beograd 1969.) koji navodi da je Atanasije (Anastas) Karamata, star 30 godina, došao u Zemun 1756. godine, a da u Putincima kraj Rume stanuje od 1767. godine, bavi se krojačkim zanatom, arendira spahijsku krčmu i trguje turskom i bečkom robom. Dimitrije Karamata, star 34 godine, došao je u Zemun 1755. godine, nastavio je da živi u Putincima i trguje nemačkom i mađarskom robom i volovima. Anastas je imao više dece, od kojih se ćerka Jelisaveta udala za Nikolića spahiju od Rudne. Njihov sin Jovan Nikolić je za ženu imao Perku Obrenović, kćer kneza i vladara srpskog Miloša Obrenovića. (I. Stojčić, navedeni tekst.) Današnji članovi porodice Karamata potiču od Dimitrija i njega smatraju začetnikom te slavne cincarsko-srpske porodice.

Po dolasku u tada vrlo prometan i narastajući Zemun, Dimitrije je počeo da se bavi vrlo unosnim poslom. Postao je vlasnik krčme koja je ubrzo po otvaranju stekla dobar glas i smatrala se jednim od tri najpoznatija mesta u Zemunu gde je moglo udobno da se prespava i dobro da se obeduje. (Ignaz Soppron, *Monographie von Semlin und Umgebung*, Semlin (Zemun) 1890, s. 381.) Stekavši zavidan imetak, Dimitrije Karamata i njegova žena Marija Grujić, Srpkinja koja je, preobučena u muško odelo i sa jednim ženskim detetom, pobegla u Zemun iz Konstantinopolja, (D. T. J. Popović, navedeno delo, s. 100, Glasnik Istorijskog društva u Novom Sadu IX, s. 259-260. Ignaz Soppron u pomenutoj monografiji o Zemunu na strani 81 netačno kaže da mu je žena bila Grkinja.) 1772. godine za tadašnjih 4000 forinti kupuju od Kupine Kuzmanove, imućne udovice trgovca Kuzmana Jovanovića, veliku i masivnu jednospratnu kuću nedaleko od Nikolajevske crkve. Ta kuća, koja je već osam generacija dom porodice Karamata, sazidana je 1763. godine i danas predstavlja vredan arhitektonski i umetnički spomenik. Građena je u baroknom stilu u koji se uklopio i nadograđeni deo iz 1827. godine.

Dimitrije Karamata je imao tri sina Anastasa, Jovana (pradedu po kojem je Jovan Karamata i dobio ime) i Filipa. Oni su, za razliku od svog oca, počeli da se bave trgovinom domaćih životinja, a posebno su razvili posao sa svinjama. U Srbiji, okupiranoj od Turaka, povoljno su kupovali mršave svinje koje su hranjene u oborima u Bežaniji kraj Zemuna i tako udebljane terane čak u Italiju i Austriju, ali najviše u Šopron u severozapadnoj Mađarskoj, na u to vreme čuvenu stočnu pijacu. (I. Soppron, navedeno delo, s. 291; Tanasije Ž. Ilić, *Iz prošlosti Zemuna i Vojne granice*, Istorijski Arhiv Beograda, 1955.) Koliko je bila razgranata trgovina sa Bečom svedoči podatak da su porodica Karamata i još dve zemunske porodice, posedovali svoje obore čak u Eperješu na ugarsko-austrijskoj granici, i da su bečkim vlastima podneli molbu za dozvolu da za svoje verske potrebe podignu u Eperješu pravoslavnu kapelu. (Mitropoljsko-patrijaršijski arhiv u Sr.Karlovcima, 188 ex 1785.) Baveći se ovim poslovima porodica Karamata je povećavala svoje materijalno bogatstvo, ali pri tome nisu zaboravili ko su i odakle su došli, pa je Anastasije ostao upamćen i kao jedan od osnivača prve grčke škole u Zemunu 1794. godine. (Ioannis A. Papadrianos, Grčke porodice Zemuna u 18. i 19. veku (na grčkom jeziku), Solun 1988, s. 131, 229-230.) Poznat je i podatak da je austrijski prestolonaslednik Franjo, kasnije car Franjo II, sa svojim stricem, austrijskim carem Josifom II, za vreme opsade Beograda u austrijsko-turskom ratu 1788. godine odseo, na predlog komande, u glavnom štabu austrijske vojske u kući Karamata, što jasno pokazuje nivo društvenog ugleda koji je u Zemunu uživala ta porodica. (I. Soppron, navedeno delo, s. 368.) Ponosni Karamata je u sobi u kojoj je Franjo II boravio, postavio na plafon crnog dvoglavog austrijskog orla, kojeg je uradio Dimitrije Bačević, isti majstor-umetnik koji je radio i ikonostas Bogorodične crkve u Zemunu, i koji se tu i danas nalazi. U kući su boravili i Vuk Karadžić i Branko Radičević.

Članovi porodice Karamata su se vrlo brzo i uspešno prilagodili novoj sredini, ali i doživeli sudbinu skoro svih zemunskih Cincara koji su se decenijama prikazivali kao Grci. Taj samouvereni trgovački svet živio je u grču da ne popusti asimilaciji. Bio je to, u ovo već poslednje vreme, jedan sasvim izveštačen život. Trgovali su sve jednako sa strašću i voleli novac, a živeli su istovremeno u vrsti metafizičkog umiranja. Zato što su nestajali, jednako ih je plašila nadmoć mnogobrojnih. Tim rečima Isidora Sekulić opisuje sudbinu Cincara u Zemunu krajem 19. veka. (Isidora Sekulić, *Hronika palanačkog groblja*, SKZ knj. 344, s. 372-373.) Neki su takvu sudbinu primali teže i mnoge ponosne i čuvene grčko-cincarske porodice su nestale, a neki, kao porodica Karamata, su prihvatili to kao istorijsku neminovnost, potpuno se prilagođavali, školovali po inostranstvu i ortačili i zasnivali porodične veze sa Srbima. Već su Dimitrije i Marija, a konačno i sledeće generacije Karamata rođene u Zemunu, odbacili grčko-cincarsko-tursku nošnju i običaje i prihvatili sve tekovine građanskog društva francusko-austrijske kulture na prelazu iz XVIII u XIX vek. (Mita Kostić, *Marko Dobrić kao književnik*, Zbornik Matice Srpske za književnost i jezik, 1, 1953, s. 170-173.) Tu konstataciju potvrđuju, između ostalog, portreti članova porodice Karamata sa kraja 18. i početka 19. veka koji su obučeni u, za to vreme, klasična otmena građanska odela. (Naslikao ih je oko 1785. godine Georgije Tenecki. Na njima su Dimitrije, Marija i Anastas, a smatraju se najboljim portretima srpskog slikarstva 18. veka. U kući porodice Karamata se nalaze i tri portreta njenih članova koji su nastali početkom 19. veka, na prelazu između kasnog baroka i klasicizma, čiji je autor bio slikar Pavel Đurković. Na njima su Jovan, njegova žena Ana i sin Marko.)

Dimitrijevi sin Jovan Karamata je imao troje dece, sinove Marka koji je jedno vreme bio sekretar Mihaila Obrenovića dok još nije postao vladar, i Atanasija, i ćerku Julijanu koja je bila udata za upravnika zemunskog kontumaca Đorđa Mušickog, sinovca Lukijana Mušickog. (I. Stojčić, navedeni tekst.)

Atanasije Karamata (1821-1868), Jovanov deda, je bio najznačajniji iz porodice Karamata u 19. veku. On je diplomirao na bečkoj Politehnici gde je studirao trgovačke i tehničke nauke, i po osnivanju Srpske Vojvodine jula 1848. godine postavljen za njenog ministra finansija. (To se vidi iz "asignata" od 13. avgusta, na kojima su potpisani desno kao predsedatelj Jovan

Šupljikac, a levo Atanasije Karamata. Isidor Stojčić, *Znameniti zemunski Srbi u XIX veku*, Deo I, Zemun 1913, s. 20-24.) U Karamatinoj kući se u jesen 1848. godine nastanio, zajedno sa Glavnim odborom za borbu protiv Mađara, srpski patrijarh Josif Rajačić, crkveni, politički i vojni starešina vojvođanskih Srba toga vremena. (Petar St. Marković, *Zemun od najstarijih vremena pa do danas*, Zemun 1896, s. 125. Ova knjiga je štampana u štampariji Jovana Karamate, strica našeg Jovana Karamate.) Atanasije se po završetku bune bavio trgovinom i bio je član "varoškog zastupstva". Bio je jedan od pokretača "Zemunskog glasnika" i važio je za čoveka plemenita srca i vrlo zauzumljivog za javne stvari. (Isto, s. 131.)

Atanasije je sa ženom Marijom, rođenom Jovica, imao četvoro dece - Kostu (Konstantina), Jovana, Stevana i Ozrena.

Iz generacije u generaciju porodica je povećavala svoje bogatstvo. No, možda na vrhuncu njenog materijalnog blagostanja, šezdesetih godina prošlog veka, svinjska kuga im je opustošila obore, a filoksera uništila skoro sve vinograde, što je došlo nekako u isto vreme kada je izbila i opšta svetska ekonomska kriza. U to vreme kada su nesreće potresale finansije porodice, umro je i Jovanov deda Atanasije. Porodica Karamata nije više nikada posle toga dostigla pređašnji nivo materijalnog bogatstva. Kako nije bilo nikoga da imovinu dovede u red, određeni su tutori koji su likvidirali vinograde i trgovinu svinjama, a udovicu Mariju, Jovanovu baku, ostavili samo sa već pomenutom i opisanom kućom u Karamatinoj ulici. Marija se izdržavala iznajmljivanjem stanova svoje velike kuće a sama je često menjala stan da bi onaj u kome je bila, izdala novim stanarima. Njena sestra Sofija Veselinović, koja je bila bogata udovica iz Sombora, pomogla joj je, na svu sreću, da iškoluje decu. (Na ovim podacima, kao i onim koji slede o Jovanovom ocu Stevanu Karamati, dugujem zahvalnost gospodinu Michaelu Shaskevichu, sinu Jovanove sestre Smiljke, koji je takođe matematičar i živi u SAD. Pismo mi je upućeno 12. avgusta 1998. godine.)

Stevan Karamata, Jovanov otac, završivši trgovačku školu, pokazao je veliku sposobnost u poslu; bogatiji srpski trgovci su ga pozvali da sa njima osnuje Srpsku banku u Zagrebu. Banka se brzo razvijala, i postala je druga po veličini u Hrvatskoj (posle Prve hrvatske štedionice), a ubrzo je osnovana i filijala u Budimpešti za čijeg je direktora postavljen Stevan. Ovde je, dakle, važno naglasiti da Karamatini nisu bili vlasnici odlučujućeg kapitala u Srpskoj banci, već "samo" sposobna i radna dobro stojeća građanska porodica čiji je jedan član, Stevan, bio viši bankarski službenik.

Jovanov stric Kosta Karamata (1862-1920) bio je gimnazijski profesor matematike u Zemunu, cenjen i uvažavan ne samo kao nastavnik već i kao naučnik, (Kosta Karamata je objavio rad *Prilog odnosima opisana kruga prema dodirnim krugovima kod trokuta*, u časopisu RAD JAZU, knj.128, Zagreb 1896.) a stric Jovan je, pored toga što je bio vlasnik poznate štamparije, bio direktor zemunske štedionice i član ugarskog sabora, (Najmlađi Atanasijev sin Ozren (1868) je kao artiljerijski kapetan umro 1912. godine. I. Stojčić, navedeni tekst.). U takvom okruženju, građanskom i bogatom materijalno i duhovno, u Zagrebu se 1. februara 1902. godine rodio Jovan Karamata kao šesto dete od oca Stevana i majke Desanke, rođene Vukomanović. (Prvo dete Atanasije je umrlo rano, a zatim dolaze Ozren, Srđan, Smiljka i Kosta (Konstantin)) Kako su se ubrzo po njegovom rođenju preselili u Zemun, Jovan Karamata je uvek Zemun smatrao za svoj rodni grad. Osnovnu školu je počeo pohađati u Budimpešti 1909. godine, a nastavio i završio u Zemunu 1913. godine. Te iste godine je upisao Zemunsku gimnaziju, ali je pred početak Prvog svetskog rata, 1914. godine, pošto je Zemun bio na nemirnom i opasnom graničnom području između Austro-Ugarske i Srbije, napustio Zemun i školovanje nastavio na Sušaku pored Rijeke. To mu je izgleda vrlo teško palo, kako zbog napuštanja roditeljskog doma tako i zbog odlaska iz Zemuna koga je uvek veoma voleo, pa je bio blizu ponavljanja trećeg razreda gimnazije. Iz tih razloga, kao i zbog ratnih prilika, Jovanov otac ga sa ostalom braćom i sestrom vraća u Zemun i šalje u Švajcarsku, tačnije u Lozanu gde će 1915. godine upisati

Kantonalnu gimnaziju (Gymnase scientifique), a potom i maturirati 1920. godine. To je bila prirodno-naučna gimnazija u kojoj nije imao prilike da stekne afinitete prema književnosti, slikarstvu ili muzici. Zato se isticao marljivošću i znanjem ne samo iz matematike već i iz fizike. Tako je napisao i jedan mali rad o prelamanju svetlosti, kada je eksperimentalno i računski izračunao granični prelaz prelamanja svetlosti, što je doduše tada bilo poznato, ali on je do toga došao potpuno samostalno. U protestantskoj Švajcarskoj je stekao solidno srednjoškolsko matematičko znanje, ali i preciznost, pedantnost, sistematičnost i marljivost, što se kasnije u njegovom radu i delima jasno očitovalo.

Godine 1920. vraća se u Beograd i upisuje studije tehnike na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Postoji priča koju je profesor Jakov Hlitičijev (1886-1963) više puta pričao u prisustvu Karamatinom i po kojoj ga je jednom prilikom u njegovom stanu potražio izvestan elegantan mladić koji je uporno zahtevao da ga profesor primi. Hlitičijev je pomislio da se radi o jednom studentu koji iz razloga što nije posećivao predavanja, traži potpis. Jedan od onih, kako Hlitičijev reče, koji nikada neće završiti tehničke nauke. (M. Tomić, *Spomenica posvećena preminulom akademiku Jovanu Karamati*, SANU, posebna izdanja knj. CDXXIII, 37, 1968, s. 6.) Taj mladić je bio Jovan Karamata, a reči profesora Hlitičijeva su se pokazale istinite. Bogdan Gavrilović koji je prvi zapazio talenat za matematiku mladoga Karamate, preporučio ga je Mihailu Petroviću, i kada je 1922. godine položio pripremni ispit na Građevinskom odseku Tehničkog fakulteta, (To je bio ispit koji se polagao posle odslušane druge godine studija, u okviru kojeg se polagala nacrtana geometrija, matematika, fizika, mehanika i otpornost materijala. Tek po njegovom polaganju moglo se nastaviti studiranje i polaganje ispita iz uskostručnih predmeta.) Karamata se prebacio na studije matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu gde je slušao prvu grupu nauka (teorijska matematika, primenjena matematika i eksperimentalna fizika).

## **Studije i prvi radovi**

Te 1922. godine, kada je upisao studije matematike, na Beogradskom univerzitetu su, po odlasku profesora dr Mladena Berića (1885-1935) i Sime Markovića (1888-1937), ostali kao profesori matematike samo Bogdan Gavrilović na Tehničkom fakultetu i Mihailo Petrović na Filozofskom fakultetu. Oni su uz Petra Živkovića (1847-1924) bili i jedini naši matematičari članovi Srpske Kraljevske Akademije nauka. Primenjenom matematikom se bavio ugledni akademik profesor Milutin Milanković (1879-1958). Početkom dvadesetih godina, 1920. odnosno 1922. godine, u Beograd i na Univerzitet, dolaze i dva ruska emigranta, tada već istaknuta matematičara, dr Anton Bilimović (1879-1970) i dr Nikola Saltikov (1866-1961).

Mihailo Petrović, koji je pravilno procenio da bez mladih snaga nema pravog napretka u novim i savremenim oblastima matematike, prilazi osposobljavanju mlađih saradnika. Iz posleratne generacije matematičara za svog asistenta izabira Tadiju Ž. Pejovića (1892-1982), suplenta Druge muške gimnazije u Beogradu. U okviru Petrovićevog Matematičkog seminara Univerziteta u Beogradu pored Gavrilovića, Milankovića, Bilimovića, Saltikova, Petra Zajanjčkovskog i Vjačeslava Žardeckog, aktivno je delovao Radivoj Kašanin (1892-1989), kao mlađi matematičar koji je studirao van Beograda i diplomirao 1921. godine u Parizu. Svi su oni, studirajući po raznim univerzitetima širom Evrope, doneli u Beograd široko i raznovrsno ali i kvalitetno matematičko znanje iz mnogih oblasti matematike.

Uskoro se javljaju i prvi rezultati tako organizovanog nastavnog i naučnog rada na Univerzitetu i u Akademiji. Novi naraštaji mladih naučnika matematičara počinju da ispoljavaju svoj sopstveni interes za najsavremenije grane matematike i u toj interakciji starih i novih shvatanja, puteva i metoda, naša matematika postiže velike uspehe. Tadašnju atmosferu među matematičarima u Beogradu možda je najlepše oslikao upravo akademik Radivoj Kašanin u svojim sećanjima koje je saopštio 1974. godine Dragoslavu Andriću, autoru knjige *Razgovori sa*

*savremenicima*, gde je taj tekst i objavljen. On kaže: "Pored visoke stručne spreme i originalnih naučnih radova, sva trojica (M.Petrović, B.Gavrilović i M.Milanković, prim.aut.) su se odlikovala nečim što najviše cenim, što smatram za ljudsku vrednost najvišeg ranga: ljubav prema mladim generacijama, razumevanje mladih ljudi, nesebičnost i iskrena pomoć mladim, talentovanim ljudima u njihovom napredovanju. Umeli su da se raduju i da uživaju kad se mladi ljudi uzdižu. Imao sam sreću da se razvijam i radim pored njih, velikih autoriteta nauke i morala. Da se ponosim njihovim prijateljstvom. Ne verujem da je igde postojao takav ambijent kakav su stvorili Gavrilović, Petrović i Milanković." Zaista divno i dirljivo! Među najmlađim matematičarima, još studentima, posebno su se isticali Miloš Radojčić (1903-1975) i Jovan Karamata, mada potpuno različitih priroda, životnih i matematičkih stremljenja, dva velika prijatelja tokom celog života.

Karamata nije poklanjao mnogo pažnje formalnom školskom znanju, već je još kao student težio samostalnom istraživačkom radu. Prvi učitelj, primer i uzor u naučnom radu, čovek koga je celog života poštovao, bio je Mihailo Petrović. Od njega je primio veliku i iskrenu ljubav prema nauci, širinu pogleda, želju za čistim naučničkim radom, ideje oslobođene formalnih stega i pravce u kojima treba tražiti rezultate. Tako će Karamata za oblast svog rada izabrati teoriju funkcija, jednu od oblasti u kojoj je Petrović dao lepe i značajne rezultate i koji su Petrovićevo ime učinili poznatim. Sam Karamata je, po svedočenju akademika Miodraga Tomića, često govorio da je veliki uticaj na njega odigralo poznanstvo a kasnije i prijateljstvo sa Radivojem Kašaninom. Svojim bogatim i širokim znanjem matematike koje je stekao na univerzitetima u Beču i Parizu, Kašanin je proširio matematičke vidike i kod mladog Karamate. Omogućio mu je, kako Karamata sam priznaje, da uvidi značaj novih oblasti matematike - teorije skupova, mere i integrala, a posebno značaj strogog dokaza koji je karakterističan za nemačku matematičku školu.

No i pored neospornog uticaja Petrovića i Kašanina na razvoj Karamate kao matematičara i čoveka, za Karamatu važi da je bio samouk, da nije bio sledbenik ni jedne matematičke škole i, može se dodati, nikada nije imao iza sebe neko već provereno matematičko ime koje bi mu otvaralo put u društvo vrhunskih matematičara. To je uspeo potpuno samostalno zahvaljujući vrednosti svojih radova. Za uspeh na takvom putu, kao pratioci neophodne su mu bile knjige i radovi najvećih matematičara. Matematička literatura je jedan od najvažnijih Karamatinih učitelja. Kao student je proučavao do najsitnijih detalja poznati rad H.Vejla *O ravnomernom rasporedu brojeva modula jedan* (H.Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Annalen 77, 1916, s. 313-352), a inspiraciju i ideju za svoju tezu dobio je rešavajući probleme iz čuvene, i za razvoj klasične matematičke analize u Beogradu vrlo važne, zbirke zadataka i teorijskih problema Polje i Segea (G.Pólya, G.Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925). Zahvaljujući jednoj drugoj knjizi, Landauovoj monografiji *Prikaz i obrazloženje nekih novih rezultata iz teorije funkcija* (E.Landau, *Darstellung und Begründung einiger neuer Ergebnisse der Funktionentheorie*, 1. izdanje 1916, 2. izdanje 1929), Karamata se susreo sa Tauberovim teoremama Hardi-Litlvuda (G. H. Hardy-J. E. Littlewood), koje je odmah počeo i sam da proučava i što će mu ubrzo doneti veliko priznanje u svetskoj matematici.

Prva pojavljivanja tekstova Jovana Karamate u matematičkoj literaturi, odmah po diplomiranju 1925. godine, bili su referativni osvrti na radove njegovog profesora Mihaila Petrovića. Tako u *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* referiše radove *Produkti jednaki zbiru svojih činilaca* (B. 51, s. 91), *Diferencijalne jednačine prvog reda sa oscilatornim integralima* (B. 51, s. 332) i *Transmutacije funkcija predstavljenih potencijalnim redovima* (B. 52, s. 297).

Jula iste godine kada je diplomirao, postavljen je za neukaznog (dnevničara) asistenta kod profesora M.Petrovića, a januara 1929. godine za ukaznog asistenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Prvo javno istupanje je imao u Srpskoj Kraljevskoj Akademiji 14. decembra 1925. godine, dakle u 23. godini, sa naučnim saopštenjem o svom prvom radu iz teorije redova *O izračunavanju granica vezanih za dvostruke nizove brojeva*, primljenog za objavljivanje u GLASU SKA na skupu Akademije Prirodnih nauka 1. februara 1926. godine. O raspravi su pozitivno referisali Mihailo Petrović i Bogdan Gavrilović. Sadržaj tog rada je ušao i u njegovu doktorsku disertaciju *O jednoj vrsti granica sličnih određenim integralima* koja je primljena za doktorski ispit na sednici Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu 9. marta 1926. godine prema referatu članova ispitnog odbora Mihaila Petrovića, Nikole Saltikova i Antona Bilimovića. Pred tom komisijom je 26. marta 1926. godine položio doktorski ispit i promovisan za doktora filozofije.

Karamata je u tezi ponovio rezultate prethodnog rada, u kome je dao uslove koje moraju zadovoljavati funkcija  $f(x)$  i niz  $\langle a_{\nu,n} \rangle$  pa da postoji granična vrednost  $A(f)$  niza

$$A_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(a_{\nu,n}).$$

Zbog toga je uveo pojam funkcije rasporeda dvostrukog niza brojeva  $a_{\nu,n}$  koju je označio sa  $n(x)$  gde je

$$\nu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n(x)}{n},$$

$$r_n(x) = \sum_{a_{\nu,n} \leq x} 1$$

za  $a \leq x \leq b$ , odnosno  $r_n(x)$  označava broj  $a_{\nu,n}$  ne većih od  $x$  za fiksirano  $n$ .

Kao rezultate je dobio potrebne i dovoljne uslove pod kojima će za jedan opšti niz oblika  $a_{\nu,n}$  postojati funkcija rasporeda kao i na koji način se ta funkcija može izračunati. Glavna primena tih rezultata je određivanje oblasti konvergencije redova polinoma oblika

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} P_{\nu}(x),$$

gde su  $P_n(x)$  polinomi  $n$ -tog stepena sa realnim korenima. Taj se problem uglavnom svodi na izračunavanje funkcije rasporeda korena posmatranih polinoma i Karamata ga je potpuno rešio za slučaj kada ta funkcija postoji i nije jednaka nuli za sve konačne vrednosti od  $x$ , kao i za izvesne slučajeve kada je ona jednaka nuli za sve konačne vrednosti od  $x$ . Napomenimo da je do istih rezultata, koji su štampani 1928. godine, u časopisu *Mathematische Zeitschrift* t.28, s. 177-199, u skoro isto vreme, došao i poznati matematičar I. Šenberg (Schönberg). Šteta je što Karamatina teza nije nikada u celosti prevedena i objavljena u inostranstvu. Nažalost to nije bio usamljeni slučaj iz tog vremena!

Prvi radovi bili su referisani (FdM. B.52, s. 222) i zapaženi po rezultatima koji su vrlo brzo našli potvrdu i primenu zbog specifične matematičke simbolike, prvenstveno zbog oznake  $L$  za graničnu vrednost niza funkcija i oznake  $\underline{\nu}(x)$  za graničnu vrednost supremuma ili infimuma niza funkcija  $n(x)$ . U zaostavštini Milutina Milankovića postoji pismo Mihaila Petrovića upućeno profesoru Milankoviću 26. maja 1926. godine iz Pariza, u kome mu šalje primerak *Note de Karamata* iz koje se vidi da mu je ne samo izlaganje već "i ideja u tezi odista bila dobra." Zanimljiv je i jedan detalj sa odbrane teze kada je, po usmenom kazivanju akademika Miodraga Tomića, profesoru Antonu Bilimoviću zasmetala suma jedinica  $\sum 1$  bez indeksa, na šta mu je mladi Karamata odgovorio da se samo jedinice i sabiraju.

Njegov sledeći rad *Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes* (Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 182, 1926, s. 833-835) prikazan je na skupu Pariske Akademije nauka 29. marta 1926. godine, u kome je rezultate dobijene u prethodnim radovima povezo sa Stieltjesovim integralima. Čuveni francuski matematičar Adamar (Jacques Hadamard), osvrćući se i na prethodno prikazani rad francuskog matematičara Levija (Paul Lévy), pratio je njegov rad sledećim rečima: "Oštromne ideje gospodina Karamate delimično se poklapaju sa nekim od onih koje je izložio Pol Levi. S druge strane, tako različit način iz koga dva autora izvlače rešenje polazne tačke pokazuje plodnost nove vrste razmišljanja." (Les ingénieuses idées de M. Karamata se rencontrent partiellement avec certains de celles qu'émet d'autre part M. Paul Lévy. La manière si différente dont, d'autre part, les deux auteurs tirent parti du même point de départ montre la fécondité du nouvel ordre de considérations). (Primedba na kraju teksta rada.)

Tokom 1926. godine aktivan je član i učesnik Matematičkog seminara, i redovno referiše u referativnim časopisima radove Mihaila Petrovića, objavljuje nove radove, a decembra 1927. godine odlazi, kao stipendista Rokfelerovog fonda, na usavršavanje u Pariz, gde ostaje do septembra 1928. godine. Za vreme boravka u Parizu učestvuje i na svom prvom kongresu (52. Kongres francuskog udruženja za unapređenje nauka - AFAS), održanom u julu mesecu u La Rošelu, sa radom *Une question de minimum relative aux ensembles et son rapport avec l'analyse*.

### Najvažniji period naučnog rada

Po povratku sa usavršavanja, iz Pariza, u Beograd, 1928. godine, počinje najznačajniji i najplodniji period naučnog rada Jovana Karamate. Svoje najčuvenije i najoriginalnije radove, koji su njegovo ime učinili poznatim u skoro svim matematičkim krugovima Evrope, napisao je u periodu od 1929-1933. godine, mada se snažna matematička, naučna i nastavna, aktivnost nastavila bez prekida do početka Drugog svetskog rata. Iako ga je u tom periodu života pored matematike interesovala i antroposofija, pa je za Jugoslovensko antroposofsko društvo osnovano 1927. godine preveo delo osnivača antroposofije Rudolfa Štajnera *Praktično vaspitanje mišljenja* (Beograd, 1930) i za prvi broj časopisa za antroposofiju i umetnost *Upoznaj sebe* (Beograd, 1931) napisao kratak originalan tekst *Upoznavanje sebe kao osnov saznanja*, ipak mu je matematika postala ne samo ljubav i profesija, već i opsesija.

Da bi imao što više vremena za promišljanja o matematici i za pisanje radova koji su odmah po objavljivanju bili zapaženi i visoko ocenjeni, i da u tome ne bi bio ometan, organizovao je i držao svu svoju nastavu na Univerzitetu u samo jednom danu, od osam ujutru do osam uveče. On je grozničavo radio sa jednom skoro nadljudskom energijom. U to vreme je Karamata gradio novu porodičnu kuću, i dane i noći provodio na gradilištu, gde je sa svojim učenikom i saradnikom Vojislavom Avakumovićem (1910-1990) razgovarao skoro samo o matematičkim problemima kojima se tada najintenzivnije bavio. To su bili problemi teorije redova, tačnije teoreme Tauberove prirode.

N.H. Abel je, baveći se problemima konvergencije i zbirljivosti redova, iskoristio Poasonova (S.T.D. Poisson) istraživanja zbirljivosti trigonometrijskih redova, 1826. godine formulisao

teoremu po kojoj ako red  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  konvergira ka  $s$ , tj. ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , gde je  $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$ , i ako stavimo

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$$

gde je taj red konvergentan za  $0 < x < 1$ , tada  $f(x) \approx s$ , kada  $x \approx 1-0$ .

Drugim rečima iz konvergencije reda  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  ka zbiru  $s$  sledi njegova Abelova zbirljivost ka tom istom zbiru  $s$ . Obrnuto ne mora da važi, jer je na primer red  $1-2+3-4\dots$  Abel zbirljiv, ali nije konvergentan.

Danas postoji veliki broj različitih metoda zbirljivosti o čemu je Karamata opširno pisao u radu *O inversnim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova, I i II deo* (GLAS SKA, Beograd, 143, knj. 70, 1931, s.1-24, 121-146), i od kojih ćemo navesti još i Čezarovu (E. Cesàro), koja je neophodna za razumevanje Karamatinog rada na teoremama Tauberove prirode.

Red  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  je zbirljiv u smislu Čezara i njegova suma je  $s$ , ako postoji granična vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\nu=0}^n s_{\nu}}{n+1} = s$$

gde je  $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$ . Često se Čezarova zbirljivost naziva i zbirljivost u smislu aritmetičkih sredina.

Austrijski matematičar Alfred Tauber je, međutim, 1897. godine u časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 8, s. 273-277 dokazao da uz dopunski uslov  $na_n = o(1)$  iz Abelove zbirljivosti sledi i konvergencija reda. Litlvud je zamenio Tauberov uslov bitno opštijim i 1910. godine u radu *The converse of Abel's theorem on power series* (Proceedings of the London Mathematical Society, (2)9, 1911, s.434-448) dokazao ovu teoremu:

Ako je dati red  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  Abel zbirljiv tj. ako je

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = s$$

i ako važi uslov

$$\nu a_{\nu} = O(1)$$

tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} = s$$

tj. dati red konvergira.

Hardi i Litlvud su 1914. godine u radu *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive* (Proceedings of London Mathematical Society (2)13, 1914, s.174-191) Tauberov uslov zamenili uslovom  $na_n \leq O(1)$ .

Takve, inversne, teorme su Hardi i Litlvud nazvali tauberovskim (Tauberian) i tako ovekovečili ime tog, inače dosta nepoznatog matematičara, koji, pošto se bavio geometrijom, druge radove iz matematičke analize nije ni pisao. Njegov rad je, međutim, poslužio kao povod za hiljade drugih radova, štaviše mnogih značajnih matematičara.



Dokaz Litlvudovog rezultata ostao je veoma komplikovan uprkos naporima mnogih matematičara (Landau, Hardi, R. Šmid itd.) sve do 1930. godine kada se u časopisu *Mathematische Zeitschrift* pojavila Karamatina rasprava *Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrungen des Abelschen Stätigkeitssatzes* od svega dve strane, koja je izazvala ne malo iznenađenje u matematičkim krugovima i svom autoru odmah donela svetsku slavu. Veoma je zanimljivo svedočenje profesora Vojislava Marića o tome: "Prilikom posete Univerzitetu St. Andrews u Škotskoj, predstavljen sam uglednom matematičaru Kopsonu (E. T. Copsonu) iz čije su knjige mnogi iz moje generacije učili teoriju funkcija kompleksne promenljive. Već prilično star i ne mnogo zainteresovan za posetioce, umesto uobičajenih konvencionalnosti rekao je samo ovo: "Do sada sam čuo za samo jednog jugoslovenskog matematičara - Jovana Karamatu. Kada sam tridesetih godina učio kod Hardija zatekao sam ga jednom prilikom kako nervozno hoda po kabinetu. Bez pozdrava mi je vidno uzbuđen rekao "Dobio sam pismo od jednog mladog čoveka iz Beograda koji tvrdi da je dokazao Hardi-Litlvudovu teoremu na svega dve strane. To je prosto nemoguće." Taj Karamatin rad doneo je ne samo nov, kratak i posebno elegantan ("We shall give an **extremely elegant** (naglasio autor) proof which has recently been obtained by Karamata." (E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 1939, s.226.)) dokaz poznate teoreme, već i novu metodu koja je omogućila mnoge dalje rezultate i primene, i koja je kao takva našla svoje mesto u poznatim monografijama Knopa (K.Knopp), *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 1931; Deča (G. Doetsch), *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, 1937; Videra (D. V. Widder), *The Laplace Transformation*, 1946; Hardija (G. H. Hardy), *Divergent Series*, 1949; Favara (J. Favard), *Course d'Analyse. Compléments et Exercices d'Analysis*, 1962-1963.

Da bi iskoristio Hardijev stav po kome uz dodatni uslov  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} = O(1)$ , iz Čezarove zbirljivosti reda  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  sledi i njegova konvergencija, Karamata je najpre pokazao ekvivalenciju Abelove i Čezarove zbirljivosti za pozitivne nizove, i u tom cilju je formulisao i dokazao sledeći, ključni stav:

Ako je red  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ , Abel zbirljiv tj. ako je

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} x^{\nu} = s$$

i ako je niz  $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$ , jednostrano ograničen, tj.  $s_{\nu} \geq -M, M \geq 0$

tada važi

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} f(x^{\nu}) x^{\nu} = s \int_0^1 f(t) dt$$

za svaku funkciju  $f(t)$  koja je ograničena i Riman integrabilna u intervalu  $(0,1)$ .

Nova i kasnije plodotvorna metoda koju je u dokazu ovog stava uveo Karamata, sastoji se iz dve jednostavne ideje. Prva je, da taj stav očevidno važi za stepen tj. kada je  $f(t) = x^{\alpha}, \alpha = 0, 1, 2, \dots$ , pa tako i za svaki polinom proizvoljnog stepena. Druga ideja je u direktnoj primeni poznate Vajerštrasove (Karl Weierstrass) teoreme o uniformnoj aproksimaciji neprekidnih funkcija polinomima, na funkciju  $f(t)$  za  $0 \leq t \leq 1$ .

Ako se u dokazani rezultat specijalno stavi  $x = e^{-\frac{1}{n}}$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} f(e^{-\frac{\nu}{n}}) e^{-\frac{\nu}{n}} = s \int_0^1 f(t) dt,$$

i ako se izabere takva funkcija  $f(t)$  da je

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t < e^{-1}, \\ \frac{1}{t} & \text{za } e^{-1} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dobija se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-\frac{1}{n}}) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_{\nu} f(e^{-\frac{\nu}{n}}) e^{-\frac{\nu}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^n s_{\nu} = s \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{t} dt = s,$$

što znači da je red  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  zbirljiv u Čezarovom smislu. (Hardi i Litlvud su stav o ekvivalentnosti Čezarove i Abelove zbirljivosti za nizove sa pozitivnim članovima formulisali i dokazali 1913. i 1914. godine (G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Tauberian theorems concerning series of positive terms*, Messenger (2)42, 1913, s. 191-192; *Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive*, Proc. Lond. Math. Soc. (2)13, 1914, s. 174-191), ali je dokaz bio dugačak, nepročišćen, prilično težak i daleko od očiglednog (K. Knopp, *Theory and application of infinite series*, 1937, s. 501; E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 1939, s. 227; J. Karamata *O inverznim stavovima zbirljivosti beskrajnih nizova*, s. 14 i s. 17.))

To međutim uz pomenuti Hardijev stav daje i konvergenciju reda, čime je Litlvudova teorema dokazana. Viland (H.Wielandt) je 1952. godine u radu *Zur Umkehrung des Abelschen Stätigkeitssatzes* (Mathematische Zeitschrift, 56, sv.2, 1952, s.206-207), koristeći Karamatinu metodu, pokazao da se taj međukorak preko Čezarove zbirljivosti može izostaviti.

Mada je veliki američki matematičar i tvorac kibernetike Norbert Viner (N.Wiener) dao 1932. godine opštu teoriju inverznih teorema koja sadrži i gore pomenuti rezultat Hardi-Litlvuda, Karamatina metoda nije izgubila svoj značaj i korišćena je u dokazima niza novih rezultata. Zanimljivo je da je redakcija časopisa Mathematische Zeitschrift povodom 60- godišnjice izlaženja u svom izboru od 50 najznačajnijih radova između više hiljada objavljenih, navela i taj Karamatin rad.

Ubrzo po objavljivanju još nekoliko radova vezanih za funkcije Tauberove prirode, kao i dobijanja priznanja od strane tada najvećih matematičara iz iste oblasti, 29. septembra 1930. godine izabran je na mesto docenta za matematiku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Maja meseca 1937. godine izabran je za vanrednog profesora pri katedri teorijske matematike na istom Fakultetu. Redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu je postao 1950. godine.

To je bio redovan put fakultetskog napredovanja skoro svakog univerzitetskog radnika, pa je prvo pravo priznanje njemu i njegovom naučnom radu, u tadašnjoj Jugoslaviji, bio izbor za dopisnog člana Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu, 31. maja 1933. godine. Referat o Karamati je podneo, 20. februara iste godine, akademik dr Vladimir Varićak (1865-1942). U njemu je, pored kraće biografije i spiska od 37, do tada objavljenih radova, napisano: "Mada je još mlad dr. Karamata, ima on već vrlo lijep glas u matematičkom naučnom svijetu...Erst kürzlich, veli K.Knop na 520. strani 3. izdanja svoje knjige o beskonačnim redovima, ist von J.Karamata ein überraschend einfacher Beweis desselben gefunden

worden...I. Titchmarsh prenio je u svoju teoriju funkcija taj Karamatin dokaz, za koji veli da je extremely elegant...I profesor matematike u Göttingenu E.Landau, koji zauzima odlično mjesto među matematičarima, neobično visoko cijeni te radove Karamatine. Naš kandidat danas je već poznata i ugledna ličnost u matematičkom svijetu."

Krajem dvadesetih i početkom tridesetih godina Karamata je osim Tauberovih teorema, intenzivno proučavao i jednu novu klasu funkcija - pravilno promenljive funkcije. Ako su mu radovi vezani za problematiku teorema Tauberove prirode odmah doneli slavu i ime u matematičkom svetu, radovi o pravilno promenljivim funkcijama su tek kasnijim razvojem matematike, prvenstveno teorije verovatnoće, dobili na pravoj vrednosti.

Godine 1930. pored već pomenutog rada o funkcijama Tauberove prirode, pojavila se, ovoga puta u malo poznatom rumunskom časopisu *Mathematica (Cluj)*, rasprava *Sur une mode de croissance régulière des fonctions* u kojoj su date definicija i osnovne osobine pravilne, odnosno sporo promenljive funkcije. Cilj i ideja te rasprave su bili da se uopšte Tauberovski uslovi u nekim inverznim teoremama. Ubrzo se videlo da se te funkcije mogu uspešno primeniti u mnogim granama matematičke analize i u teoriji verovatnoće, gde god nije potrebna sama činjenica konvergencije već i druge dodatne informacije. Time je Karamatina teorija izrasla u ogromnu matematičku zgradu čiji je značaj i dalje u usponu i kojoj su posvećene, između ostalog i tri poznate monografije o pravilnoj promenljivosti funkcija - Seneta (E. Seneta), *Regularly varying functions*, Lecture notes in Mathematics 508, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976; Bingam, Goldi, Tojgels (N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels), *Regular Variation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27, Cambridge Univ. Press, 1987; Geluk, de Han (J. L. Geluk, L. de Haan), *Regular Variation extensions and Tauberian Theorems*, CVVI, Tract 40, Amsterdam, 1987 - a u novije vreme je proširena i na funkcije više promenljivih.

Poreklo ideje o Karamatinim sporo promenljivim funkcijama treba tražiti kod nemačkih matematičara Šmida (Schmidt) u već citiranom vrlo važnom radu *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen* (*Mathematische Zeitschrift* 31, 1925, 89-152) i Šura (I. Schur) u radu *Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte* (*Mathematische Zeitschrift* 31, 1929, s. 391-407). S druge strane na Karamatu su značajno uticali i radovi Landaua *Sur les valeurs moyennes de certains fonctions arithmétiques* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1911, s. 443-472), koji je za neopadajuću funkciju  $L(x)$  posmatrao graničnu vrednost

$$\frac{L(2x)}{L(x)} \rightarrow 1 \quad \text{kada} \quad x \rightarrow \infty,$$

i Polje *Über eine neue Weise, bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen* (*Göttingen Nachrichten*, 1917, s.149-159) u kome je uveo pojam regularnosti monotono rastućeg niza  $q_n$  ako za njega važi  $N(r) = \frac{r^\lambda}{L(r)}$  gde je  $N(r)$  broj elemenata niza manjih ili jednak  $r$ , a  $L(r)$  Landauova funkcija, i *Bemerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen* (*Mathematische Annalen* 88, 1923, s. 169-183) u kome je određene monotone sporo promenljive funkcije nazvao "sporo rastućim" i "sporo opadajućim" (langsam wachsende, langsam abnehmende). Seneta je u pomenutoj monografiji (s. 46) primetio da je malo poznato da se neki elementi Karamatine teorije pojavljuju još u radovima H. Petrinija (1916), i G.Fabera (1917) koji je definisao jednu funkciju koja je u suštini sporo promenljiva. Kako Karamata njihove radove nije citirao, može se pretpostaviti da mu oni nisu bili poznati.

Pojam Karamatinih funkcija vezan je za proučavanje graničnih vrednosti tipa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = g(t)$$

gde je funkcija  $f(x)$  pozitivna i neprekidna za  $x > 0$ . Pokazuje se da ako ta granična vrednost postoji i različita je od nule za neki razmak  $t \in [a, b]$  tada ona postoji za sve  $t > 0$  i  $g(t) = t^p$ , gde je  $p$  realan broj. To je dovelo Karamatu do formulacija dve definicije:

Za pozitivnu neprekidnu funkciju  $r(x)$  definisanu na intervalu  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$  se kaže da je pravilno promenljiva (u beskonačnosti) ako za sve  $t > 0$  važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r(tx)}{r(x)} = t^p,$$

gde se broj  $p$  naziva indeks pravilnosti.

Ako je  $p$  iz prethodne definicije nula tada se za pozitivnu neprekidnu funkciju  $L(x)$  definisanu na intervalu  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$  kaže da je sporo promenljiva (u beskonačnosti) ako za svako  $t > 0$  važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

Iz te dve definicije se vidi da svaka pravilno promenljiva funkcija ima oblik  $r(x) = x^p L(x)$ . Ona je dakle uopštenje stepena, gde sporo promenljiva funkcija ima osnovnu ulogu. Navešćemo i neke primere sporo promenljivih funkcija: sve pozitivne funkcije koje teže ka pozitivnoj konstanti,

funkcija  $\prod_{\nu=1}^n (\ln_{\nu} x)^{\xi_{\nu}}$  gde je  $x_n$  realan broj a  $\ln_n x$  označava  $n$ -tu iteraciju logaritma, funkcije  $\log x$ ,  $e^{\sqrt{\log x}}$ ,  $x^{-1} \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ . Navedene, kao i mnoge druge sporopromenljive funkcije, se veoma često javljaju u analitičkoj teoriji brojeva i to u glavnom članu ili u ostatku asimptotskih formula.

Takođe za svako  $a > 0$  i za  $x \in \mathbb{R}$  važi  $x^a L(x) \rightarrow \infty$  i  $x^{-a} L(x) \rightarrow 0$ . To pokazuje da funkcija  $L(x)$  sporije raste (opada) od bilo kog stepena od  $x$ , odnosno da sporo promenljiva funkcija popunjava praznine između svaka dva stepena od  $x$ .

Kada je uveden pojam sporo promenljive funkcije, prirodno je definisati i brzo promenljivu funkciju. Dok spora (pravilna) promenljivost najviše odgovara Abelovom postupku zbirljivosti, Borelovom postupku zbirljivosti (niz  $s_n$  je Borel zbirljiv ako postoji granična vrednost

$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_{\nu} r^{\nu}}{\nu}$ ) više odgovara brže rašćenje (brža promenljivost) funkcije. Bekeši je 1957. godine dao sledeću definiciju brzo promenljive funkcije: Pozitivna neprekidna funkcija  $g(x)$  definisana na intervalu  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$  se naziva brzo promenljiva (u beskonačnosti) ako za svako  $t > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(x)} = 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(x)} = \infty.$$

Napomenućemo da je Karamata u radu *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant* (Mathematica (Cluj), vol. IX, 1932, s.164-178) već dao jednu definiciju brzo promenljive funkcije, gde su tako definisane funkcije činile potklasu funkcija koje zadovoljavaju Bekešijevu definiciju.

Polazeći od tih jednostavnih definicija, Karamata je razvio čitavu teoriju pravilno promenljivih funkcija koja je obuhvatila većinu najvažnijih osobina. Ovde na prvom mestu navodimo dva rezultata koji su osnovni za teoriju i za različite primene. To su:

[1] **Teorema o uniformnoj konvergenciji** koja kaže da za svaku sporo promenljivu funkciju  $L(x)$  količnik  $L(tx)/L(x)$  teži u  $t$  uniformno ka 1, kada  $x \in \mathbb{R}^+$ , za svaki fiksiran konačni interval  $[a, b]$ , odnosno za svaki kompaktni  $t$ -skup iz intervala  $(0, \infty)$ ,

[2] **Teorema o reprezentaciji** koja kaže da je  $L(x)$  sporo promenljiva funkcija, ako i samo ako može biti napisana u obliku

$$L(x) = c(x) e^{ax} \int_a^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

za neko  $a > 0$ , gde je  $c(x)$  neprekidna funkcija koja za  $x \in \mathbb{R}^+$  teži ka pozitivnoj konstanti, a  $e \in \mathbb{R}$ . Ako je  $c(x)$  konstanta tada se funkcija  $L(x)$  naziva normalizovana.

Ova dva rezultata su osnovno oruđe u dokazivanju različitih osobina sporo promenljivih funkcija.

Koristeći koncept pravilne promenljivosti funkcija i generalizaciju Abelovih i Tauberovih teorema u Laplas-Stieltjesovoj transformaciji, Karamata je dobio još jedan čuveni rezultat koji je dat u radu *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche die Laplasche und Stieltjesche Transformationen betreffen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 164, 1931, 27-39). O tom rezultatu Seneta u pomenutoj monografiji na strani 59 kaže: "One of the most famous and very widely useful theorems in probabilistic (amongst other) context is the **famous theorem of Karamata** (naglasio autor) which we prove first."

Formulisaćemo dve glavne teoreme iz tog rada. Prva od njih, koja se danas često naziva Hardi-Litlvud-Karamatina teorema, je sledeća:

Neka su  $L(x)$  i  $L(1/x)$  sporo promenljive funkcije, i neka je  $A(x)$  neopadajuća funkcija na intervalu  $[a, \infty)$  takva da funkcija

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\{A(t)\}$$

konvergira za svako  $x > 0$ . Tada važe sledeća tvrđenja:

Ako  $f(x) \sim x^{-\rho} L(\frac{1}{x})$  za  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\rho \geq 0$  tada  $A(x) \sim x^{\rho} \frac{L(x)}{\Gamma(\rho+1)}$  za  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Ako  $f(x) \sim x^{-\rho} L(x)$  za  $x \in \mathbb{R}^+$  tada  $A(x) \sim x^{\rho} \frac{L(\frac{1}{x})}{\Gamma(\rho+1)}$  za  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Ova teorema proširuje Hardi-Litlvudov rezultat za Laplasovu transformaciju kada je  $L(x) = 1$ .

Druga glavna teorema je da, ako su  $L(x)$  i  $L(1/x)$  sporo promenljive funkcije i ako je  $A(x)$  neopadajuća funkcija na intervalu  $[a, \infty)$  takva da postoji integral

$$\int_0^{\infty} \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^{\rho}} \quad \text{za svako } x > 0 \quad (\rho \geq 0).$$

Tada iz

$$\int_0^{\infty} \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^{\rho}} \sim x^{-\sigma} L(x) \quad \text{za } x \rightarrow \infty \text{ ili } x \rightarrow 0 \quad (0 \leq \sigma \leq \rho)$$

sledi

$$\int_0^{\infty} G\left(\frac{1}{x}\right) d\{A(t)\} \sim x^{\rho-\sigma} L(x) \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} e^{-t} g(t) t^{\sigma-1} dt \quad \text{za } x \rightarrow \infty \text{ ili } x \rightarrow 0,$$

gde je

$$G(y) = \int_0^{\infty} e^{-y\zeta} e^{\zeta} g(\zeta) \zeta^{\rho-1} d\zeta,$$

i  $g(t)$  proizvoljna ograničena Riman integrabilna funkcija.

Važnost ovih teorema je u tome što je u njima sadržana, kao specijalni slučajevi, većina Tauberovih teorema.

Ideja da se stepen  $x^{\rho}$  zameni sa nekom opštijom funkcijom je prirodna i nije bila potpuno nova jer je već bilo pokušaja u tom pravcu. Ali Karamata je bio onaj koji je rešio taj problem u najopštijem smislu. Jednostavno i elegantno ga je formulisao i dokazao uvodeći sporo promenljive funkcije.

Vojislav Avakumović je 1947. godine u radu *Sur l'equation differentielle de Thomas-Fermi* (Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe, Beograd, 1, 1947, s. 101-113) prvi uveo sporo promenljive i regularno promenljive funkcije u proučavanje asimptotskog ponašanja rešenja određenih nelinearnih diferencijalnih jednačina Tomas-Fermijevog tipa, za velike vrednosti promenljive, a V. Marić i M. Tomić su 1990. godine u radu *A classification of solutions of second order linear differential equations by means of regularly varying functions*, (Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe, Beograd, 48(62), 1990. s. 199-207) formulisali teoreme o primeni sporo promenljivih i regularno promenljivih funkcija na linearne diferencijalne jednačine.

Neočekivano i za samog Karamatu, sporo promenljive i pravilno promenljive funkcije su se pokazale od izuzetnog značaja u primeni na teoriju verovatnoće što je po prvi put došlo do potpunog izražaja u knjizi V. Felera *Uvod u verovatnoću* (W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications I i II*, Willey, New York, 1969-1971). Pravilna promenljivost ima važnu ulogu u teoremama u kojima se pretpostavlja slaba konvergencija niza funkcija raspodele, kao što su slabi zakon velikih brojeva i centralno granična teorema, a što je tesno povezano sa teorijom privlačenja i teorijom obnavljanja.

Navešćemo i dve generalizacije Karamatinih funkcija. Jedna je još iz 1935. godine, koju je u radu *Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité* (C. R. Acad. Sci. Paris 200, 1935, s. 1515-1517) dao V. Avakumović uvodeći klasu R-0 funkcija za proširenje nekih tauberijanskih uslova. Drugu je izneo de Han iz koje se razvila teorija paralelna Karamatinoj i sa primenom prvenstveno na uopštene stohastičke procese. De Hanova teorija dala je novi podsticaj proučavanju Karamatinih funkcija i njihovoj daljoj primeni kojoj je posvećen ogroman broj radova.

U tom najvažnijem periodu naučnog rada Karamata je dobio jednako lepe i ne manje značajne rezultate i iz nekih drugih oblasti matematičke analize. Tako se u radovima *O uopštenjima Mercerovog stava* (GLAS SKA, Beograd, 146(72), 1931, s. 87-120) i *Sur quelques inversions*

*d'une proposition de Cauchy et leur généralisations* (Tôhoku Math. Journ. 36, 1932, s. 22-28) bavi stavovima iz zbirljivosti beskrajskih nizova koje je podelio u dve grupe: jednu koja sadrži uopštenja klasičnog Merseerovog stava i drugu koja sadrži uopštenja Poljaovog stava. Zatim je formulisao i dokazao dva opšta stava od kojih jedan sadrži većinu Poljaovih, a drugi skoro sve Merseerove stavove. Taj njegov metod se mnogo koristio u novim dokazima i često je citiran. Takođe je iz Koši-Jensenove teoreme skoro direktno izveo kao posledicu više elementarnih teorema Merseerove prirode.

U kratkom radu *Sur inégalité relative aux fonctions convexes* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 1932, s. 145-148) formulisao je i dokazao teoremu po kojoj su za važenje nejednakosti

$$\sum_{\nu=1}^n f(x_{\nu}) \leq \sum_{\nu=1}^n f(X_{\nu})$$

za sve funkcije  $f(x)$  koje su konveksne nad intervalom  $(a,b)$ , potrebni i dovoljni uslovi

$$\sum_{\nu=1}^k x_{\nu} \leq \sum_{\nu=1}^k X_{\nu}$$

za svako  $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , i

$$\sum_{\nu=1}^n x_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n X_{\nu}$$

gde su brojevi  $x_n$  i  $X_n$  poređani po rastućem redosledu tj.

$$a \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n \leq b \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b.$$

Ova teorema za

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}$$

sadrži kao specijalan slučaj Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije. Mada je Karamata mislio da su Hardi i Litlvud pre njega, 1929. godine, dokazali ovu teoremu, što je i dopisao u svom već objavljenom radu, ovaj rezultat je kao značajan, citiran u dve poznate monografije o nejednakostima - G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, 1934, s.89, i E.F.Beckenbach, R.Bellman, *Inequalities*, 1961, s. 30-32 - kao dopuna Hardi-Litlvudovom dokazu, a ne kao ponovljen dokaz. Nejednakost je nazvana Karamatinim imenom i detaljno je dokazana.

Kalderon i Zigmund u poznatom radu o singularnim integralima (A. P. Calderón, A. Zygmund, *On singular integral*, Amer. Journ. Math., 78, 1956, s. 289-309) pominju Karamatin rad *Ein Konvergenzatz für trigonometrische Integrale* (Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, 178, 1937, s. 29-33) kao značajan za početak kasnijeg razvoja vrlo komplikovane teorije trigonometrijskih i singularnih integrala, kao i njenog prirodnog nastavka, važne teorije singularnih integralnih operatora i pseudodiferencijalnih operatora, koja je otvorila novo polje istraživanja u savremenoj matematičkoj analizi.

U radu *Sur le théorème tauberien de N. Wiener* (Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe, Beograd, 3, 1950, s. 201-206), Karamata je dao kratak i vrlo direktan dokaz Tauberove teoreme N. Vinera pod različitim Tauberovskim uslovima. Dokaz se bazira na Pit-Vinerovoj centralnoj teoremi i Karamatinim radovima *Über einen Satz von Vijayaraghavan* (Mathematische Zeitschrift, 34, 1932, s. 737-740), *Sur les théorèmes inverses des procédés de*

*sommabilité* (Actualités scientifiques et industrielles, 450, Hermann et Comp. Paris, 1937) i *Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale*.

Naravno, u tom periodu od desetak godina, od kraja dvadesetih godina do početka Drugog svetskog rata, Karamata je učestvovao na, za ono vreme, velikom broju naučnih skupova i kongresa, na kojima je bio rado viđen gost, i kao predavač, i kao cenjen naučnik. Bio je, takođe, poštovan i na mnogim univerzitetima širom Evrope. Do 1939. godine je, pored već pomenutog kongresa u La Rošelu, učestvovao na još 9 kongresa, na kojima je uvek prikazao neke od svojih rezultata.

To su bili sledeći kongresi:

[1] 1. nacionalni kongres rumunskih matematičara u Klužu, 9-12. maj 1929. godine (rad 14),

[2] 53. kongres AFAS u Le Havru, 25-31. juli 1929. godine (11),

[3] 1. kongres slovenskih matematičara u Varšavi, 23-27. septembar 1929. godine (10),

[4] 54. kongres AFAS u Alžiru 1930. godine (12),

[5] 55. kongres AFAS u Nansiju 1931. godine (16),

[6] 2. nacionalni kongres rumunskih matematičara u Turn-Severinu, 5-9. maj 1932. godine (26),

[7] Internacionalni kongres matematičara u Cirihi, 1-12. septembar 1932. godine (25), (boravio je kao delegat Jugoslavije pri Internacionalnoj komisiji za usavršavanje nastave matematike),

[8] 2. kongres slovenskih matematičara u Pragu, 23-28. septembar 1934. godine (41, 46),

[9] Međunarodni kongres matematičara u Oslu 1936. godine (60).

Kao gostujući profesor održao je predavanja na Univerzitetima u Poljskoj (Lavov, Varšava, Poznanj) i Rumuniji (Černanc) početkom 1933. godine, u Nemačkoj (Hamburg i Getingen) u junu 1936. godine, Švajcarskoj (Lozana Ženeva) i Belgiji (Brisel - Institut des Hautes Etudes de Belgique) i opet u Nemačkoj (Štuttgart, Getingen, Kil, Berlin, Hamburg, Gisen, Lajpcig, Jena) u toku 1937. godine. Na poziv nemačkog Ministra prosvete, u toku zimskog semestra školske 1937-38. godine na Univerzitetu u Tibingenu držao je specijalni kurs iz teorije funkcija. Pozvan je bio da održi niz predavanja i na Sorboni u Parizu, na više univerziteta u Indiji i da učestvuje u radu Italijanske akademije nauka Convegno Volta, ali ga je u tome sprečilo izbijanje Drugog svetskog rata.

Zahvaljujući svom naučnom ugledu Jovan Karamata je decembra meseca 1935. godine bio predložen za prijem u Češko kraljevsko naučno društvo, gde je 8. januara 1936. godine izabran za njegovog dopisnog člana. Pristupni rad pod naslovom *Un théorème relatif aux sommabilités*

$$\sigma \int_0^{1/\sigma} \psi(\sigma t) s(t) dt$$

de la forme (Věstník Královské České Společnosti Nauk, II, 1936, Praha 1937, s.1-5) prikazan je 11. novembra 1936. godine.

Kao vrhunac priznanja za rezultate njegovog celokupnog dotadašnjeg, prvenstveno naučnog, ali i pedagoškog rada, Jovan Karamata je, na glavnom godišnjem skupu Srpske kraljevske akademije održanom 16. februara 1939. godine, izabran, a na svečanom godišnjem skupu održanom 7. marta iste godine, i proglašen za dopisnog člana Srpske kraljevske akademije. Na



2. skupu Akademije prirodnih nauka Srpske kraljevske akademije, 22. maja 1939. godine, " ...primljeno je k znanju da je član dopisnik g-din dr Jovan Karamata poslao svoju biografiju i izjavio zahvalnost na izboru za dopisnog člana". U Godišnjaku SKA za 1938. godinu, štampana je biografija i spisak radova Jovana Karamate, ali ne i referat pri izboru.

Za redovnog člana Srpske akademije nauka izabran je na glavnom godišnjem skupu SAN-a, 18. marta 1948. godine, a rukom pisani Referat za izbor se nalazi u Arhivu SANU-a, u okviru Dosijea 35 (J.Karamata).

Tada je već bio član sledećih naučnih društava: Société mathématique suisse, Société mathématique de France, Association française pour l'avancement des Sciences i Deutsche Mathematiker Vereinigung, kao i stalni referent referativnih časopisa Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Gisen) i Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (Berlin, Pruska akademija nauka). Koliko smo uspeli da vidimo, Karamata je referisao u tim časopisima oko 60 radova, među kojima i radove najistaknutijih matematičara tog vremena. Često su te kratke zabeleške predstavljale prave male matematičke bisere, a neke se i navode u drugim radovima i monografijama. Tako je L. Biberbah (Bieberbach) u knjizi *Predavanja o Algebri (Vorlesungen über Algebra, Leipzig, B. G. Teubner, 1928)*, naveo jednu takvu zabelešku.

U tom najplodnijem periodu bavljenja naučnim radom, Karamata bi se, slobodnije procenjujući, mogao svrstati u onu grupu svetskih matematičara koja je dolazila odmah posle analista ranga Hardija i Vinera. U svakom slučaju njegov ugled u matematičkom svetu bio je vrlo visok i rastao je naročito posle pojave pomenute Felerove knjige *Uvod u verovatnoću*. Na žalost u svojoj zemlji, gde je i proveo svoje najplodnije dane, među najširim matematičkim krugovima, dugo nije uživao takav ugled.

Karamata je u to vreme bio i u odboru za očuvanje Zadužbine Luke Čelovića-Trebinjca, beogradskog trgovca, iz čijeg fonda se, između ostalog, jednim delom finansiralo i štampanje časopisa Publications Mathématique Univerziteta u Beogradu, kao i u Odboru za zaštitu od vazdušnih napada grada Beograda.

Takođe je bio i redakcijski saradnik za matematiku i astronomiju, pri izradi našeg prvog *Sveznanja*, a odrednica sa njegovim imenom je na strani 999.

Godine 1931. pokrenuo je inicijativu za izdavanje časopisa Matematički list za srednju školu, čiji je bio i vlasnik. Urednik časopisa je bio R. Kašanin, a u uređivačkom odboru su pored Karamate bili i V. Varićak, R. Župančić, J. Mihajlović, B. Živković, V. Mišković, M. Nedić i M. Lipovac. Do 1932. godine kada je list prestao da se štampa, izašlo je 10 brojeva. U tom časopisu Karamata je objavio i dva stručno-pedagoška rada *Praktične mogućnosti matematičkih rešenja* i *Elementarno iznalaženje maksimuma i minimuma*.

Oko 1937. godine, kako piše M. Tomić, žar i zanos iz mladih dana se polako stišavaju. On piše i radi. Nezadovoljan, videvši da to nije neki napredak, on baca i ostavlja po strani nedovršene radove. Tada nailaze godine iskušenja, godine kada svaki naučni rad postaje nemoguć i besmislen. U to vreme, pred rat, već oženjen Emilijom Nikolajević (1906-1959), sa troje dece, dva sina i jednom ćerkom, porodica Karamata nije lako živela.

Drugi svetski rat, kao i period neposredno pre i posle njega, bio je, možda i najteži period njegovog života i naučnog rada. Skoro desetogodišnje odsustvo sa glavne matematičke scene, doprinelo je da izgubi sve veze i kontakte sa naučnicima ali i prijateljima širom Evrope. Što su više prolazile godine i što se više udaljavao od savremenih matematičkih tokova, to je i sam sve manje pokušavao da se bori i skoro je sasvim zapostavio naučni rad. O tome je i sam jednom prilikom 1945. godine izjavio: "Zaboravio sam ne samo ono šta sam ja radio, već i mnoge opšte

poznate matematičke činjenice. Više ne znam šta se dalje dešavalo u oblasti koju sam nekada znao tako dobro."

Ali to nije značilo da se potpuno odvojio i iz lokalnog, beogradskog matematičkog života. Do samog izbijanja Aprilskog rata 1941. godine, on je i dalje učestvovao u radu sednica Akademije prirodnih nauka na kojima je, od 1939. godine, zajedno sa M. Petrovićem, B. Gavrilovićem ili A. Bilimovićem, podneo 7 referata o radovima podnetim za štampanje u GLASU SKA. To su radovi Božidara Popovića i Jordana Petrovića (18. decembra 1939. godine), Jovana Voučka (21. oktobra 1940. godine), M. Radojčića (16. decembra 1940. godine, dva rada), V. Avakumovića (31. marta i 15. juna 1941. godine). Pored toga zajedno sa Mihailom Petrovićem, Tadijom Pejovićem i Nikolom Saltikovim, referiše 27. juna 1938. godine o Milošu Radojčiću pri njegovom izboru za docenta Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. U tom periodu radio je, zajedno sa Mihailom Petrovićem, i na sređivanju i sistematizaciji Petrovićevih matematičkih radova. U jesen 1940. godine je osmislio i prvi počeo da drži kurs iz teorije verovatnoće na Filozofskom fakultetu koji je trajao samo jedan semestar zbog izbijanja Aprilskog rata 1941. godine.

Krajem 1941. godine ponuđena mu je od strane nemačkog Ministarstva prosvete, katedra na nekom Univerzitetu u Nemačkoj, što je Karamata odbio.

Za Mihaila Petrovića je vezan još jedan događaj čiji je inicijator bio Jovan Karamata i koji je imao srećan završetak. Petrović je, sticajem okolnosti, odmah po izbijanju Aprilskog rata 1941. godine zarobljen i odveden u Nirnberški logor. Početkom maja Karamata je posetio Đorđa Karađorđevića i tom prilikom ukazao na mogućnost Petrovićevog povratka iz zarobljeništva. Pri tome je mislio na Jelenu, Kraljicu Italije i tetku Đorđa Karađorđevića. Ova inicijativa je donela rezultata i Mihailo Petrović se u junu iste godine vratio u zemlju.

Na žalost dve godine po povratku u Beograd Mihailo Petrović je preminuo, pa je na sednici Akademije prirodnih nauka od 6. jula 1943. godine, formiran odbor za pregled Petrovićevih rukopisa u koji su, pored Jovana Karamate, ušli A. Bilimović, V. Mišković, N. Saltikov, R. Kašanin i M. Radojčić.

Rat je završio jedno poglavlje njegovog života, ali i naučnog i stvaralačkog rada i to ono najlepše i najznačajnije.

### **Pedagoški rad**

Ovo poglavlje je napisano prvenstveno zahvaljujući sećanjima akademika Miodraga Tomića, jednog od prvih Karamatinih đaka, i nosioca prve doktorske titule dodeljene na Srpskoj akademiji nauka, 24. marta 1950. godine rađene pod rukovodstvom profesora Karamate. Većina tih sećanja je i objavljena u Tomićevim radovima o Jovanu Karamati.

Posle rata, porušen životnim olujama, umoran i izgubljen, daleko od nauke koju skoro deset godina nije pratio, Karamata traži nove oblike rada gde bi mogao da se zapali onim zanosom iz mladih dana u kome se sve zaboravlja. On počinje da radi sa svojim učenicima. I pre rata on je pokazao da ume na jedan poseban način da radi sa mlađima. To je bila neka vrsta zajedničkog rada. Oni koji su bili te sreće da uđu u krug njegovih učenika i da istraju u toj školi, sećaće se celog života tih dana. Njima je kapao znoj sa lica, jer se počinjalo za stolom oko 2 po podne i ustajalo oko 10 uveče. Od njegovih oštrih kritika njima su suze navirale. Njegove prve reči su bile: da vidimo te vaše gluposti. Ali ako bi primetio zrno istine, on se oduševljavao, on je klesao zajedno sa njima i radovao se svakom uspehu kao da je njegov.

Za one koji su ga bliže poznavali, za njegove prijatelje, drugove i učenike on je bio čovek koga su voleli zbog jedne srdačne drugarske atmosfere koju je donosio. Njegovi učenici sećaće se ne samo rada na polju nauke, već i časova veselja koje su sa njime provodili, zaboravljajući da je on profesor a oni đaci. U takvoj atmosferi oni su lakše dočekivali sutrašnji dan napora i rada i željno očekivali veće zaborava i odmora.

Karamatina nastavna karijera na Beogradskom univerzitetu počinje 1930. godine njegovim izborom za docenta Filozofskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, i traje, igrom sudbine, upravo do njegovog izbora za redovnog profesora Univerziteta u Beogradu, 1950. godine.

Početak tridesetih godina njegove kolege na Filozofskom fakultetu i na tehnicima već su znatno unapredili nastavu matematike učinivši je savremenijom. Oni su to radili postupno. Karamata je bio najradikalniji u zavođenju novih predmeta i načina njihovog izlaganja. Taj njegov pokušaj završio se nekom vrstom studentskog protesta 1933. godine. U ono vreme to se objašnjavalo njegovom nečuvenom strogošću na ispitima i kolokvijumima. Možda je u tome donekle i bilo istine, ali je i činjenica da je sigurno većina studenata teško prihvatila nove naučne discipline. Treba se setiti da je nešto slično doživeo i Mihailo Petrović na početku svoje nastavne karijere. Novi naučni pojmovi i nove teorije su teška stvar, a već naviknuto mišljenje se opire novim idejama. Karamata je hteo da stara shvatanja istisne iz glava studenata, a to je naišlo na otpor. U to vreme se nije mnogo raspravljalo o tome, da li je fakultet samo škola za obrazovanje nastavnika ili prvenstveno naučna ustanova. Karamata je smatrao da je cilj fakulteta samo nauka i svoja predavanja, pa čak i ona uvodna, tako je podešavao. Nije čudo da ga onda većina studenata nije razumela.

Profesor Karamata je imao običaj da održi sva svoja predavanja u jednom danu. Niz potpuno različitih kurseva: elementarna algebra, viša algebra, uvod u analizu, teorija nizova i redova i nacrtana geometrija - smenjivali su se jedan za drugim. Za vreme odmora njegov kabinet je bio pun studenata koji su donosili zadatke i tražili savete za svoje seminarske radove. Na predavanjima on je davao i probleme. Neki su bili tako teški da ih u prvi mah studenti nisu ni shvatali. On je ponavljao često čitava predavanja želeći da ukaže na značaj pojedinih pojmova i stavova. Bilo je studenata koji su danima pokušavali da reše neke probleme. Rezultati takvog rada osetili su se kasnije. Neki su posvećivali sav rad tumačenju njegovih predavanja. Drugi, naprotiv, nisu više ni dolazili na njegova predavanja. Kako je sam držao veliki broj kurseva na prvoj godini, to broj onih koji su posle nekoliko njegovih predavanja pobešli sa matematike sigurno nije bio mali. On je neka svoja predavanja detaljno spremao i bilo je trenutaka kada se sa njegovih časova izlazilo ozarena lica. Prvi korak ka izradi seminarskih radova bio je upoznavanje sa inostranom literaturom, bez koje se seminarski rad nije mogao ni zamisliti. Ako se ima u vidu ne veliko znanje iz matematike i stranog jezika sa kojim se dolazilo iz gimnazije, može se zaključiti koliko je napora zahtevalo takvo studiranje. Onda se može i shvatiti gnev ponekog od mladih. Na kraju, Karamata je rušio iluzije mnogih koji su kao obdareni došli da studiraju matematiku. Umesto talenta videli su da je naporan rad važniji od svega.

Đaci koji su cenili i mogli da prate njegov način predavanja i rada, ali koji su imali i intelektualne mogućnosti da prihvate probleme koje je pred njih profesor Karamata postavljao, u mnogome su doprineli nastavku njegovog naučnog delovanja. A kakvi su to bili đaci, ali i kakav je Jovan Karamata bio čovek, možda najbolje govori jedna kratka izjava "On je mene pretekao", upućena Vojislavu Avakumoviću, jednom od njegovih učenika.

Ne samo u našoj zemlji, već i u inostranstvu Karamata je od svojih učenika stvorio veliki broj matematičara. Mnogi od njih su upravo i doprineli današnjem uspehu i aktuelnosti njegovih radova tako što su u svoje radove, iz novih oblasti matematike, preneli i ugradili i njegove rezultate.

U posleratnom periodu bavio se pedagoškom aktivnošću, pa se iz te faze može navesti nekoliko predavanja koje je održao na sastancima društava matematičara i fizičara Srbije i Hrvatske:

[1] Rad Mihaila Petrovića u oblasti teorije funkcija, 10.6.1948,

[2] Trigonometrijski polinomi, 17.11.1948, Matematičko-fizička sekcija Hrvatskog prirodoslovnog društva, Zagreb,

[3] O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija, 22.2.1949,

[4] Vinerova metoda predviđanja pojava, 18.4.1952,

stručno-pedagoški radovi objavljeni u Vesniku Društva matematičara i fizičara Srbije (*O aproksimaciji eksponencijalne funkcije nizom racionalnih funkcija* i *Neki specijalni slučajevi prvog stava o srednjim vrednostima*), Biltenu Društva matematičara i fizičara Makedonije (*Neke primene kompleksnog broja u geometriji*), i u zagrebačkom Glasniku matematičko-fizičko i astronomskom (*Mihailo Petrović, 24.6.1868-8.6.1943. (in memoriam)*), kao i u njima postavljeni problemi i zadaci za samostalno rešavanje čitalaca tih časopisa.

Karamata je smatrao da udžbenike treba pisati na kraju svoje naučne karijere. Posle rata objavio još 50 naučnih radova, od kojih 17 kao koautor. (M. Tomić, P. Erdeš, S. Aljančić, V. Marić, B. Bajšanski, M. Vijmije, R. Bojanić. Od radova nastalih pre rata samo su tri nastala u saradnji, i to sa V. Avakumovićem, H. Vendelinom (Wendelin) i M. Petrovićem. Zajednički rad sa Petrovićem je jedini rad u kome se Petrović javlja kao koautor.) Bio je duboko svestan da je ono što će ostati zabeleženo u istoriji i razvoju matematike, već uradio. To je sigurno i bio jedan od razloga što se odmah posle rata i posvetio pisanju udžbenika, iako su i pre rata štampana tri spisa nastala prvenstveno zahvaljujući Jovanu Karamati, ali i trudu i aktivnosti Udruženja studenata matematike Beogradskog univerziteta. To su *Rešenja diplomskih zadataka iz teorijske matematike*, *Dedekindovi preseki* i *teorija iracionalnih brojeva* i *Teorija nizova sa primerima i zadacima*.

Posle rata su izašla dva zvanična univerzitetska udžbenika. To su *Kompleksan broj* i *Teorija i primena Stiltjesova integrala*, koji, mada danas skoro zaboravljeni, imaju sve odlike njegovog rada - od originalnosti do sadržajnosti. Kada mu je nemački matematičar, profesor Kamke (E. Kamke), predložio da monografiju o Stiltjesovom integralu izda na nemačkom, Karamata je tražio dozvolu Akademijškog saveta SAN da se ona prevede, ali kako je bio nezadovoljan sa njom, smatrao je da je treba tako preraditi da bi to bila nova knjiga. Na žalost, kako više nije imao volje za takav rad, to nije urađeno.

Pored tih zvaničnih udžbenika, Karamata je bio autor ili koautor još 7 knjiga. Godine 1947. studenti Beogradskog univerziteta su izdali *Algebru I*, *Algebru II* i *Kurs opšte matematike*, 1948. su izašli *Elementi matematičke analize*, 1949. godine je štampana *Algebra I* u dva dela, kao i priručnik *Pregled elementarne matematike*, nastao u saradnji sa Mirkom Stojakovićem (1915-1985) i Tatomirovom Anđelićem (1903-1993) i prvenstveno namenjen da svršenim učenicima gimnazije olakša pripremanje ispita iz matematike na tehničkim školama i 1950. godine *Teorija funkcija*. Konačno 1956. godine objavljena je knjiga *Predavanja iz analize*, napisana u saradnji sa Bogoljubom Stankovićem. To su bile i poslednje Karamatine knjige, sa kojima je on i okončao rad u našoj nastavi.

### **Aktivnost u Matematičkom institutu i odlazak u Ženevu**

Posleratni period života i rada Jovana Karamate karakteriše i njegova izuzetna aktivnost u radu novoosnovanog Matematičkog instituta pri SAN. U periodu od 1946. godine pa do 1951. godine,

kada je otišao u Ženevu, imao je 29 saopštenja svojih naučnih radova. Zbog česte odsutnosti na sednicama Instituta, njegove radove su prikazivali njegovi najbliži saradnici. Od 1951. godine pa do 1961. godine, kada je Matematički institut izdvojen iz SANU, 15 puta su saopštavani njegovi naučni rezultati. Donosimo pregled svih saopštenja koja je Karamata održao u Matematičkom institutu:

- [1] Primedbe na saopštenje Vojislava Avakumovića Asimptotsko ponašanje integrala jedne klase nelinearnih diferencijalnih jednačina, 8.11.1946.
- [2] O asimptotskom ponašanju integrala jedne klase diferencijalnih jednačina drugog reda, 2.4.1947.
- [3] O balističkoj jednačini, 25.6.1947.
- [4] O izvesnim nejednačinama koje se odnose na količnik i razliku integrala tipa  $\int f(x) dx$  i  $\int f(x) dx$ , 3.9.1947.
- [5] Geometrijska ispitivanja trigonometrijskih suma, 19.11.1947
- [6] O granicama realnih korena, 24.12.1947.
- [7] O aproksimaciji eksponencijalne funkcije racionalnim funkcijama, 14. 1. 1948.
- [8] O prvom stavu o srednjim vrednostima, 4.2.1948.
- [9] O Furijeovim redovima, 5.5.1948.
- [10] O približnim kvadraturama, 19.5.1948.
- [11] Zapremina piramide, 23.6.1948.
- [12] O jednom problemu Ramanudžana, 4.8.1948.
- [13] O verižnim razlomcima za tangens i tangens hiperbolikus, 6.10.1948.
- [14] Teorija i praksa Stieltjesovih integrala, 20.10.1948.
- [15] Jedna primedba o korenima. Primedba u vezi saopštenja Dragoljuba Markovića Uopštavanje jednog problema Landaua, 27.10.1948.
- [16] O nulama polinoma, 19.1.1949.
- [17] Postupak za ubrzavanje konvergencije redova, 2. 3. 1949.
- [18] Upoređivanje reda beskonačno malih veličina (sa A. Bilimovićem), 2. 3. 1949.
- [19] Primedba na saopštenje M. Tomića O Ojlerovom postupku zbirljivosti, 4.5.1949.
- [20] O Bernštajnovoj zbirljivosti, 18.5.1949.
- [21] O jednom Fragmenovom stavu iz teorije Dirihleovih radova, 22.6.1949.
- [22] O jednom približnom obrascu, 20.7.1949.

- [23] Izveštaj o putu u Švajcarsku, 16.11.1949.
- [24] O teoremi o srednjoj vrednosti, 18.1.1950.
- [25] O Ležendrovim polinomima, 25.1.1950.
- [26] O Milankovičevom postupku geometrijske interpretacije konvergencije geometrijskih redova, 1.2.1950.
- [27] O približnim kvadraturama, 8.3.1950.
- [28] O jednom Avakumovičevom stavu, 26.7.1950.
- [29] O kriterijumima konvergencije Furijeovih radova koji se odnose na regularno rastuće funkcije, 18.10.1950.
- [30] Asimptotski raspored nula izvesnog niza polinoma, 2.4.1952.
- [31] O Košijevom stavu, 26.12.1952.
- [32] Elementarne metode u teoriji brojeva (sa R.Bojanićem), 17.2.1954.
- [33] Elementarna procena k-tih tipičnih Rizovih suma, 29.11.1954.
- [34] Algebra torzora, 5.1.1955.
- [35] Brzina rašćenja funkcija kao relacija poretka, 16.3.1955.
- [36] O skupovima koji su totalno uređeni s obzirom na asimptotsku relaciju, 12.10.1955.
- [37] O C-majorabilnosti i nekim Tauberovim stavovima u teoriji brojeva, 21.12.1955.
- [38] Pravilno promenljive funkcije i Frulanijev integral (sa S.Aljančićem), 20.6.1956.
- [39] Problem poboljšanja konvergencije jedne klase beskonačnih redova (sa R.Bojanićem), 19.3.1958.
- [40] O jednoj klasi rešenja jednačine  $y'' = F(x)y(x)$ , (sa V.Marićem), 3.10.1960.
- [41] Generalizacija Helerove teoreme (sa B.Bajšanskim), 7.12.1960.

Početkom maja 1949. godine otpočeli su u Matematičkom institutu, pod rukovodstvom Jovana Karamate, stručni sastanci na kojima su se držala predavanja vezana za metodiku nastave savremene matematike na Univerzitetu. Prvi ciklus predavanja je bio posvećen problemima konvergencije, brzine i pravilnosti rašćenja redova i funkcija.

U tom periodu je biran u mnogobrojne uprave, odbore i komisije, što je prvenstveno vezano upravo za rad na Matematičkom institutu i SAN. Pokušaćemo da ih sve navedemo:

Veće i Naučni savet Matematičkog instituta (1946. godine), Odbor za publikacije (1946), Odbor za univerzitetsku nastavu (1946), Komisija za matematičku terminologiju (1946), Odbor za vezu sa inostranstvom (1946), Uprava Društva matematičara i fizičara Srbije (1948), Odbor astronomsko-numeričke sekcije (1949), Uprava Saveza Društava matematičara i fizičara FNRJ

(1949), Komisija stručnjaka kao stručnog organa Saveta Matematičkog instituta (1949), Stručni odbor Komisije za organizaciju naučno-istraživačkog rada Akademijškog saveta FNRJ za matematiku (1950), Redakcioni odbor biltena Akademijškog saveta FNRJ (1951), Nacionalni komitet za teorijsku i primenjenu mehaniku (1951). Bio je i glavni urednik časopisa Matematički vesnik Društva matematičara i fizičara Srbije (1949), član Redakcionog odbora časopisa Publications de l'Institut Mathématique (1952), kao i upravnik Matematičkog instituta (predložen je 12. februara 1949. godine na 2. skupu OPMN SAN, a 4.maja je na 9. sednici Institutske komisije SAN Komitet za naučne ustanove, univerzitet i velike škole je dao saglasnost da se Jovan Karamata postavi za upravnika Matematičkog instituta).

U periodu od 1945. godine do odlaska u Ženevu 1951. godine, Karamata je učestvovao na 5 kongresa:

[1] 63. Kongres AFAS u Bijaricu, 1947. godine (rad 76),

[2] Kongres međunarodne unije Akademija u Briselu, 1947. godine,

[3] Kongres francuskih matematičara u Ženevi, 1948. godine (77),

[4] 1. kongres matematičara i fizičara Jugoslavije na Bledu, od 8. do 12. novembra 1949. godine (81),

[5] Internacionalni kongres matematičara u Kembridžu (SAD) od 30. avgusta do 6.septembra 1950. godine (84),

U toku aprila 1950. godine boravio je na studijskom putovanju u Švajcarskoj gde je održao niz predavanja na univerzitetima u Ženevi, Cirihu i Lozani.

Zbog ekonomskih i političkih prilika u posleratnoj Jugoslaviji, Karamata, ali i mnogi njegovi saradnici, napustili su Beograd i Jugoslaviju, a oni koji se nisu odlučili za odlazak često su radili pod pritiscima, a i na nematičnim fakultetima. Karamatinim odlaskom u Švajcarsku, gde je za redovnog profesora Univerziteta u Ženevi izabran 1951. godine, počinje poslednji period njegovog života i rada.

Za nastavak svoje univerzitetske i naučne karijere Karamata je izabrao Ženevu, verovatno iz više razloga. Jedan od veoma značajnih je taj što je u Švajcarskoj završio gimnazijsko školovanje, znao je savršeno francuski jezik, a ukazalo se i upražnjeno mesto profesora na Univerzitetu, na koje su ga pozvali njegove kolege matematičari, pre svih, Ram (Georges De Rahm), Karamatin poznanik iz školskih dana, i Fer (Henri Fehr), jedan od osnivača časopisa L'Enseignement Mathématique, čiji će član redakcionog odbora i direktor postati i Karamata i sa kojim se upoznao još preko Mihaila Petrovića. Na Univerzitetu u Ženevi je držao predavanja iz diferencijalnog i integralnog računa i mehanike, kao i kurseve iz analize čiji su se sadržaji menjali.

Odlaskom u Ženevu, Karamata nije prekinuo i rad sa svojim učenicima. Do 1958. godine je redovno dolazio u Beograd i još intenzivnije radio sa mladim talentima. Sa njima je najčešće radio grupno na Matematičkom institutu SAN, ali ponekad i individualno, obično u hotelu Mažestik. Jednom takvom prilikom Karamata je nagovestio vezu između postojanja Frulanijevog integrala i spore promenljivosti funkcija. I još pre njegovog sledećeg dolaska u Beograd ta veza je pronađena u obliku nove karakterizacije sporo-promenljivih funkcija. Taj rezultat je objavljen u zajedničkom radu sa S. Aljančićem *Pravilno promenljive funkcije i Frulanijev integral* (Zbornik radova Matematičkog Instituta SANU Beograd, 50, 1956, s.239-248).

U tom radu je ukazano na tesnu vezu između Frulanijevog integrala oblika

$$\int_0^{\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt, \quad a > 0, b > 0.$$

i klase regularno promenljivih funkcija. Još je Koši (A.-L. Cauchy) 1823. godine pokazao da integral tog oblika postoji kada je funkcija  $f(x)$  integrabilna u svakom konačnom intervalu koji ne sadrži koordinatni početak i ako granične vrednosti  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  postoje. Iyengar je 1940. godine pokazao da je zbirljivost-C potreban i dovoljan uslov za egzistenciju Frulanijevog integrala za svako pozitivno  $a$  i  $b$ , što se u suštini svodi na sledeći stav:

Neka je funkcija  $f(x)$  integrabilna u svakom konačnom intervalu  $(a, b)$ ,  $\forall a > 0$ . Potreban i dovoljan uslov da postoji granična vrednost

$$J(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t} dt$$

za svako  $\lambda > 0$  je da  $f(x)$  bude zbirljiva-C kada  $x \rightarrow \infty$ . Ako sa  $L$  označimo njen C-zbir, tada je  $J(\lambda) = L \log \lambda$ .

Aljančić i Karamata su pokazali da je ovaj Iyengarov stav samo specijalan slučaj osnovnih rezultata iz teorije regularno promenljivih funkcija, jer se u njemu radi o regularno promenljivim funkcijama specijalne strukture. Naime, ako se uzme da je

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \log p(x),$$

tada je i

$$\int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t} dt = \log \frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

Poslednj integral, iz definicije i osobina regularno promenljivih funkcija, konvergira za  $\lambda > 0$  kada  $x \rightarrow \infty$  ako i samo ako je funkcija  $p(x)$ , koja ovde ima specijalnu strukturu, regularno promenljiva u tački  $x = \infty$ . Tako  $J(\lambda)$  iz Iyengarovog stava postaje

$$J(\lambda) = \alpha \log \lambda,$$

gde je  $\alpha$  indeks regularnosti regularno promenljive funkcije  $p(x)$  koji je jednak C-zbiru funkcije  $f(x)$  kad  $x \rightarrow \infty$ .

U toku svojih dolazaka u Beograd držao je i mnogobrojne specijalne kurseve na Matematičkom institutu SAN: Račun torzora, Opšti postupci zbirljivosti Furijeovih redova, Sporo-promenljive funkcije i primena.

Na poziv dr Branka Horvata, tadašnjeg direktora Ekonomskog instituta u Beogradu, zajedno sa Branislavom Ivanovićem i S.Aljančićem je organizovao i vodio kurseve verovatnoće i opšte matematike, sa idejom da se ekonomske nauke što više matematizuju.

Takođe je bio i mentor pri izradi doktorskih disertacija Miodraga Tomića (*O trigonometrijskim zbirovima*, 1950. godine), Slobodana Aljančića (*O asimptotskom razvijanju neapsolutno konvergentnih linearnih operacija*, 1953), Ranka Bojanića (*Asimptotska rešenja linearnih diferencijalnih jednačina*, 1953), kao i član komisije za ocenu teze Vladete Vučkovića (*O nekim*



stavovima Tauberove prirode sa proširenim uslovima konvergencije, 1953), Bogoljuba Stankovića (*O jednoj klasi singularnih integralnih jednačina*, 1954), Šefkije Raljevića (*O izvesnim klasama polinoma i rasporedu njihovih nula*, 1954), Bogdana Bajšanskog (*Opšta klasa postupaka zbirljivosti Ojler-Borelovog tipa i njihova primena na analitičko produženje*, 1956). Zajedno sa Nikolom Saltikovim i Tadijom Pejovićem je 24. februara 1950. godine Savetu Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu podneo referat na osnovu koga je Miloš Radojčić izabran u zvanje vanrednog profesora za predmet geometrija pri Katedri matematike istog fakulteta, a 29. septembra 1959. godine je u referatu napisanom sa Radivojem Kašaninom Radojčića predložio za dopisnog člana SAN-u.

Odlaskom na Univerzitet u Ženevi, Karamata je intenzivirao i svoja putovanja na kongrese i naučne skupove, održao je veliki broj predavanja u SAD, Francuskoj, Rumuniji, Mađarskoj, SSSR-u i svuda gde je odlazio bio je rado viđen gost, priman je sa poštovanjem koje je i zasluživao i uvek je imao zapažena izlaganja. U tom periodu je učestvovao u radu sledećih naučnih skupova:

[1] Kongres C.C.I.R. u Ženevi 1952. godine (rad 94),

[2] Međunarodni kongres matematičara u Amsterdamu od 2. do 9. septembra 1954. godine (97),

[3] 79. kongres Sociétés Savantes u Alžiru 1954. godine (98),

[4] Kongres sovjetskih matematičara u Moskvi 1956. godine,

[5] Skup o teoriji redova održanom u Briselu od 18. do 20. decembra 1957. godine, u Parizu i u Luvenu 1958. godine (108).

Takođe je više puta boravio kao gostujući istraživač u Matematičkom istraživačkom centru u Medisonu (Mathematical Research Center in Madison, Wisconsin, USA) i to od decembra 1960. godine do avgusta 1961. godine i od jula do septembra 1962, 1963. i 1964. godine. Rezultati istraživanja dobijeni tokom tih boravaka su dati u radovima koji su uglavnom nastali u saradnji sa Rankom Bojanićem i Bogdanom Bajšanskim, matematičarima koji su krajem pedesetih godina napustili Jugoslaviju i otišli na Državni univerzitet u Ohaju (Columbus), i sa M. Vijmije (Monique Vuilleumier) njegovom vernom saradnicom iz Ženeve, koja se krajem šezdesetih godina pridružila Bojaniću i Bajšanskom na Univerzitetu u Ohaju.

Karakteristika naučnog rada, u posleratnom periodu života i rada Jovana Karamate, je pre svega veća raznovrsnost oblasti matematike kojima se bavio. Imao je i dalje radove iz klasične analize - teorije funkcija i redova, ali i iz teorije brojeva, geometrije, matematičke verovatnoće, mehanike i istorije matematike. Iz tih radova se vidi, ne samo kolika je bila Karamatina originalnost pristupa različitoj problematici, već i široko matematičko obrazovanje i svestrani matematički interes. Proučavajući klasične i već istorijske rezultate najvećih svetskih matematičara, nalazio je u njima mogućnosti za neke dopune, proširenja ili makar samo za uprošćavanje i "ulepšavanje" njihovih dokaza.

U proleće 1966. godine, na inicijativu akademika Jovana Karamate, Radivoja Kašanina i Miodraga Tomića datoj početkom 1965. godine, u Beograd je došao Kazimir Kuratovski (Kazimir Kuratowski), redovni član i potpredsednik Poljske akademije nauka. Poseti SANU, 13. aprila 1966. godine, prisustvovali su, pored Karamate, M. Tomić i S. Aljančić. To je bio i poslednji boravak Jovana Karamate u Beogradu.

Poslednjih godina svog života Karamata je putovao od Ženeve do Beograda, od Pariza do Čikaga. Išao je od nekadašnjih drugova, prijatelja i učenika do novih poznanstava. Lutao je i po matematici, kako sam priznaje. Umoran i bolestan, Akademik Jovan Karamata je umro u Ženevi 14. avgusta 1967. godine, kada je ponovo trebalo da putuje u SAD, gde je planirao da održi niz predavanja na nekoliko univerziteta. Kremirani ostaci su preneti u Jugoslaviju i počivaju na Zemunskom groblju.

Na spisku preminulih članova Akademije na strani 35 Godišnjaka SANU u knjizi LXXIV za 1967. godinu stoji:

Jovan Karamata, matematičar (Zagreb 1. februar 1902 - Ženeva 14. avgust 1967). Profesor Univerziteta u Ženevi. Dopisni član Akademije od 7. marta 1939. godine, redovni član od 18. marta 1948. godne.

22. septembra 1967. godine na 5. skupu OPMN SAN minutom ćutanja je odata pošta preminulom akademiku, a 18. novembra 1967. godine je održana komemorativna sednica posvećena uspomeni na Jovana Karamatu. Prigodni govor je održao Miodrag Tomić, tadašnji sekretar Odeljenja prirodno-matematičkih nauka. Krajem decembra je data u štampu Spomenica.

Jovanu Karamati, najjačem srpskom matematičaru, svetsku slavu su doneli njegovi originalni matematički rezultati, ali za istoriju naše matematike jednaku važnost imaju poznata Karamatina škola matematike i njegovi đaci, kasnije i ugledni matematičari-saradnici. Čini se da i danas, nakon više od 30 godina od smrti Jovana Karamate i više od 40 godina od napuštanja zemlje i odlaska u Ženevu, njegovo delo i njegovi đaci daju specifičan pečat razvoju naše vrhunske matematike.

Na kraju donosimo mišljenje o naučnom radu Jovana Karamate koje je u okviru istorije razvoja nauke u SANU izneo akademik M. Tomić:

Naučni rezultati iz matematike uglavnom nemaju trajnu vrednost. Kasnije dolaze novi rezultati koji obuhvataju prethodne ili sam problem nije više od interesa. Neke oblasti matematike otišle su dalje u svom razvitku, jer se nauka brzo razvija, dok matematičar ne može više da raste. Stručnjaci čiji su radovi bili često citirani, koji su bili poznata imena u svojoj oblasti vremenom izlaze iz toka naučnih zbivanja. Ipak svi rezultati ne iščezavaju, jer tada nauke ne bi ni bilo. Ostaju neki kristali koji se ne rastvaraju, oko kojih se gradi dalje nauka i koji donose stvarni napredak u nauci. To su rezultati od trajne naučne vrednosti. Ideal svakog matematičara je da postigne bar jedan takav rezultat. To je pošlo za rukom Jovanu Karamati. Dva njegova rada iz tridesetih godina su danas poznatija nego u doba svog postanka. To je njegov dokaz Abelovog inverznog stava odnosno nov dokaz Hardi-Litlvudovog stava i njegova teorija sporo promenljivih funkcija. Klasična matematička analiza kod nas, koju je započeo još D. Nešić, na kojoj je delom radio i M. Petrović, dostiže svoj vrhunac sa Karamatom, i to u vreme kad je ona u matematičkom svetu bila na glasu. Karamata je bio đak M. Petrovića, ali je naučno radio sve suprotno od učitelja. Radio je skoro isključivo u jednoj oblasti. Iako je bio francuski đak i po maturi i po studijama u inostranstvu, on je pripadao pre nemačkoj i engleskoj nego francuskoj školi. Bio je plodan pisac, i uz sve to mnogo je pazio na formu i stil naučnog iskaza i nije posmatrao probleme koje nije mogao da savlada. Štaviše, on nije ni tražio probleme, a nove ideje je posmatrao kao neostvarene želje. Ali ono što je uradio niko više nije morao ni mogao doterivati. Njegovo naučno otkriće - kako ga je nazvao R. Šmid - nov dokaz Hardi-Litlvudovog stava, ušao je u sve udžbenike i monografije iz teorije redova. Veliki američki matematičar, tvorac kibernetike N. Viner dao je opštu teoriju inverznih stavova koja sadrži i Hardi-Litlvudov stav, ali svi i dalje koriste Karamatin dokaz. Uopštenje toga stava sa tzv. ostatkom, koji su dali Frojd, Korevar i Viland, koriste Karamatinu ideju za dokaz. I zato nije čudo što je redakcija

časopisa *Mathematische Zeitschrift*, povodom 60 godina njegovog izlaženja, u svom izboru 50 najznačajnijih rezultata između nekoliko hiljada objavljenih priloga navela i taj rad. Možda još lepši primer njegovog naučnog uspeha predstavlja njegova teorija sporo promenljivih, odnosno pravilno promenljivih, funkcija. Reč teorija ne potiče od njega, nju su izmislili strani autori posle njegove smrti. Prvobitno zamišljena sa jedinim ciljem da uopšti Hardi-Litlvudov stav, bez nekih naročitih ambicija, objavljena prvi put u jednom beznačajnom rumunskom časopisu, ona je već u svojoj prvoj verziji bila potpuno izgrađena. Tek nakon njegove smrti doživela je potpuni uspeh. Mnogo godina kasnije, ušla je u mnoge grane analize. Ipak, njen pravi značaj se pokazao u računu verovatnoće. Poznati američki naučnik V. Feler posvetio je čitavu glavu, u svojoj obimnoj monografiji, sporo promenljivoj funkciji i od tada ona se stalno izvodi u brojnim problemima računa verovatnoće tzv. graničnim teoremama, Markovljevim i specijalnim procesima. Sigurno je Karamata i danas mnogo citiran, jer i svako ko u računu verovatnoće upotrebi izraz  $L(t)$  za sporo promenljivu funkciju ne pozivajući se na njegovo ime, u stvari citira Karamatu, jer sve osobine koje se koriste potiču iz njegovog rada. To sigurno nisu i jedini rezultati po kojima je on poznat. Veliki broj radova je objavio i u raznim brojevima *Glasa Akademije nauka*. Glas CXLIII (1931) sadrži prve nagoveštaje ovih značajnih rezultata. Kako je mnogo publikovao u inostranstvu, on je imao tu retku sreću da bude poznatiji tamo, nego u svojoj zemlji, u kojoj se ipak razvijao najznačajniji period njegovog stvaralačkog rada u vremenu od 1926. do 1938. godine.

Priredio Aleksandar Nikolić

Autor je ovaj tekst pripremio za izdanje *Život i delo srpskih naučnika*, knjiga 4, SANU

***Preuzeto iz Spomenice 130 godina Matematičkog fakulteta***