Наставно–научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 336. тој седници Наставно–научног већа Математичког факултета, одржаној 18. новембра 2016. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним $p$–модификованим нормама и њиховим дуалима" кандидата Стефана Милошевића. После прегледа рукописа који је кандидат предао комисији, подносимо Наставно–научном већу Математичког факултета следећи

# ИЗВЕШТАЈ

## 1. Биографија кандидата

Стефан Милошевић рођен је 1988. године. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2007. године и дипломирао 2011. године, са просечном оценом 9,63. Исте године уписао је Мастер студије на Матаматичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене и положио све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под насловом „Бесконачнодимензионе квантне групе" одбранио је 2012. године (ментор Зоран Ракић). Докторске студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, уписао је 2012. године и положио испите предвиђене планом и програмом студија са просечном оценом 10. Од 2011. до 2014. године радио је као сарадник у настави, а од 2014. године до данас ради као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету Универзитета у Београду.

## 2. Научни и стручни рад

### 2.1. Објављене и прихваћене публикације у часописима са SCI листе

[1] Danko Jocić, Stefan Milošević, *Refinements of operator Cauchy–Shwarz and Minkowski inequalities for p-modified norms and related norm inequalities*, Linear Algebra and its Applications, vol. 488, pp. 284–301, (2016), Print ISSN: 0024-3795, M21, доступно на

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515005741

[2] Danko Jocić, Stefan Milošević, Vladimir Đurić, *Norm inequalities for elementary operators and other inner product type integral transformers with the spectra contained in the unit disc*, Filomat, vol. 31, no. 2, pp. 187–206, (2017), Print ISSN: 0354-5180, Online ISSN: 2406-0933, M22, доступно на

http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/publikacije/filomat/2017/31-2/31-2-3-3269.pdf

[3] Danko Jocić, Đorđe Krtinić, Milan Lazarević, Petar Melentijević, Stefan Milošević, *Refinements of inequalities related to Landau-Grüss inequalities for elementary operators acting on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms*, прихваћено за штампу у Complex Analysis and Operator Theory, Print ISSN: 1661-8254, Online ISSN: 1661-8262, M22, доступно на

https://link.springer.com/article/10.1007/s11785-016-0622-8.

**2.2. Објављене и прихваћене публикације у часописима који нису на SCI листи**

[4] Stefan Milošević, *Norm inequalities for elementary operators related to contractions and operators with spectra contained in the unit disk in norm ideals*, Advances in Operator Theory, vol. 1, no. 2, pp. 147–156 (2016), Online ISSN: 2538-225X, доступно на

http://aot-math.org/article_40568.html.

**2.3. Учешће на пројектима:**

„Постори функција и оператори на њима", Министарство просвете, науке и технолошког развоја, no. 174017, (2014– ).

## 3. Структура дисертације

Докторска дисертација „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним $p$–модификованим нормама и њиховим дуалима" написана је на vi+62+iii стране. Структура рукописа је следећа:

# 4. Приказ садржаја дисертације

Дисертација се састоји од претходно наведених пет поглавља. Прво поглавље је предговор, где је представљен проширени контекст у коме се разматра научна проблематика везана за предмет ове дисертације. Остала четири поглавља представљају уже тематске целине, у којима су представљени резултати аутора дисертације, заједно са неопходном теоријском позадином и најважнијим резултатима других математичара, повезаних са и релевантних за истраживачку тематику разматрану и развијану у овој дисертацији.

У предговору су само дате основне информације о елементарним операторима и трансформацијама типа скаларног производа (т.с.п.), као њиховим недискретним уопштењима линеарних трансформација на просторима ограничених оператора, односно на идеалима компактних оператора на Хилбертовом простору. Уведен је и основни терминолошки оквир неопходан за излагање добијених резултата, који обухвата дефиницију елементарних оператора, трансформација т.с.п, укључујући деривације и уопштене деривације, идеале компактних оператора, унитарно инваријантне норме, међу којима су Ки Фанове норме од нарочите методолошке важности због примене Ки Фановог доминационог својства. Такође се указује и на предстојећу улогу оператор монотоних, оператор конвексних и оператор конкавних функција у овом раду.

У глави 2 дат је увод у тематику и прецизно су дефинисани основни појмови неопходни за даља излагања. Почиње се са основним својствима сингуларних вредности, дефинисане су симетрично нормирајуће функције, као и идеали компактних оператора одређени тим нормама. Даље, за унитарно инваријантне норме су приказана својства монотоности и полунепрекидности одоздо, а на крају је дефинисано $p$-модификовање симетрично нормирајућих функција. Надаље се дефинишу појмови оператор монотоних, оператор конвексних и оператор конкавних функција, као и неке од основних неједнакости међу нормама за различите операторе изражене помоћу таквих функција. Између осталог, за конкавну функцију $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, за ограничене позитивно дефинитне операторе $A_k$ и за $\alpha_k \in [0,1]$ везане условом $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, такве су неједнакости

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k f(A_k)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k\right)\right|\right|\right|,$$

$$\left|\left|\left|f\left(\sum_{k=1}^n A_k\right)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{k=1}^n f(A_k)\right|\right|\right|,$$

као и аналогне неједнакости за конвексне функције. Након тога је описана конструкција Гељфандовог интеграла за оператор вредносне функције, показана су његова основна својства, дефинисане су трансформације т.с.п, а на крају су показане неке од основних неједнакости између норми за слабо$^*$ мерљиве и квадратно интеграбилне фамилије $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, као што је

$$\left\|\int_\Omega \mathcal{A}X\mathcal{B}\,d\mu\right\| \leqslant \sqrt{\left\|\int_\Omega \mathcal{A}\mathcal{A}^*\,d\mu\right\|\left\|\int_\Omega \mathcal{B}^*\mathcal{B}\,d\mu\right\|}\|X\|,$$

где је $X$ ограничен оператор.

У глави 3 су прво дефинисани спектрални оператор дефекта и $\alpha$-спектрални оператор дефекта, па су установљене њихове основне особине. Између осталог, показана је неједнакост

$$\Delta_{A,\alpha} \cdot \sum_{n=0}^\infty \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \cdot \Delta_{A,\alpha} \leqslant I,$$

које важи за ограничен оператор $A$, код кога је спектрални радијус $r(A) \leqslant 1$.

Након тога приказане су неједнакости везане за норме линеарних трансформација, везаних за контрактивне елементарне операторе и трансформације т.с.п. за Шатенове норме. Специјално, за слабо$^*$ мерљиве операторно вредносне функције $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ показана је неједнакост

$$\left\|\Delta_{\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} X \Delta_{\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X - \int_\Omega \mathcal{A}(t)^* X \mathcal{B}(t)\,d\mu(t)\right)\Delta_{\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p,$$

уколико је $r(\int_\Omega \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}\,d\mu) \leqslant 1, r(\int_\Omega \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}\,d\mu) \leqslant 1$ и $\sum_{n=0}^\infty \int_{\Omega^n} \|\mathcal{A}_{t_1}^* \cdots \mathcal{A}_{t_n}^* f\|^2 + \|\mathcal{B}_{t_1}^* \cdots \mathcal{B}_{t_n}^* f\|^2 d\mu^n(t_1, \cdots, t_n) < +\infty$, за све $f \in \mathcal{H}$. Приказане су и примене дате неједнакости за оператор једностраног помака у десно. Такође су изведене неједнакости за операторе $A$ и $B$, чији су спектри садржани у јединичном диску и за које је $r(A)r(B) < 1$, које гласе

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^\infty \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}XB^n \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p$$

и

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} X \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \tbinom{\alpha}{n} A^{*n}XB^n \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p,$$

уколико је још $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (\|A^{*n}f\|^2 + \|B^{*n}f\|^2) < +\infty$, за све $f \in \mathcal{H}$. Осим тога, дати су довољни услови под којима претходна неједнакост важи и када је $r(A) = r(B) = 1$.

У глави 4 наставља се са резултатима везаним за елементарне операторе и трансформације т.с.п. из претходног поглавља, али у овом случају са додатним захтевима о нормалности и комутативности бар неке од фамилија које дефинишу те линеарне трансформације. Први међу њима су Коши - Шварцове неједнакости за $p$-модификоване норме при $p \geqslant 2$.

Даље се даје неједнакост

$$\left\| \sqrt{I - \int_\Omega \mathcal{A}(t)^* \mathcal{A}(t) d\mu(t)} X \Delta_{\mathcal{B}} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| X - \int_\Omega \mathcal{A}(t)^* X \mathcal{B}(t) d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)}},$$

која важи уколико се фамилија $\mathcal{A}$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, а обе трансформације $\int_\Omega \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}\, d\mu$ и $\int_\Omega \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}\, d\mu$ имају спектрални радијус мањи од 1. Слична неједнакост важи и уколико се фамилија $\mathcal{B}$ састоји међусобно комутирајућих нормалних оператора. На крају ове главе приказане су и одговарајуће неједнакости за контрактивне елементарне операторе, специјално

$$\left|\!\left|\!\left| \Big(I - A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \Big(I - B^*B\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \right|\!\right|\!\right| \leqslant |\!|\!| X |\!|\!|,$$

као и

$$\left|\!\left|\!\left| \Big(I - A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}} X \Big(I - B^*B\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \right|\!\right|\!\right| \leqslant \left|\!\left|\!\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tbinom{\alpha}{n} A^n X B^n \right|\!\right|\!\right|,$$

које важе за нормалне контракције $A$ и $B$. Осим тога приказане су и варијанте датих неједнакости за $Q$ норме уколико је само један од оператора $A$ и $B$ нормална контракција, које гласе

$$\left\| \Big(I - A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \Delta_{B,\alpha} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \| X \|_{\Phi^{(p)}},$$

где је $A$ нормална контракција, а $B$ такав да је $r(B) \leqslant 1$, као и неједнакост

$$\left\| \Big(I - A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}} X \Delta_{B,\alpha} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tbinom{\alpha}{n} A^n X B^n \right\|_{\Phi^{(p)}},$$

где је још додатно $r(A)r(B) < 1$. Приказане су и сличне неједнакости у случају када је $B$ нормална контракција.

У глави 5 прво се излажу познати резултати везани за Кларксон - МекКартијеве неједнакости за више (од два) оператора, који су добијени применом неједнакости за оператор монотоне и оператор конвексне функције. Затим се дају профињења неједнакости Коши - Шварца, Минковског и Ландау - Гриса за $p$-модификоване операторне норме.

Излагање нових резултата почиње идентитетом

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(cI + \sqrt{c^2 I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n}\Big)^{-1}\sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - cXB_n\Big|^2 = c^2\sum_{n=1}^{N}|XB_n|^2,$$

где су $A_n, B_n$ и $X$ ограничени оператори, $c \geqslant \|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\|^{1/2}$ и $d > 0$, који је примењен за профињењене Коши - Шварцове неједнакости за $p$-модификоване операторне норме

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} = \Big\|\Big(\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big\|\Big(\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} I$$
$$+\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1}\sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} X B_n\Big|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\Phi^{(p)}},$$

за све $0 < p \leqslant 2$, док је за све $2 \leqslant p < +\infty$

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} = \Big\|\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^p\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big\|\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^p + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} I$$
$$+\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1}\sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} X B_n\Big|^p\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}}\Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}}.$$

Нови идентитет

$$\Big|X - \sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(I + \Big(I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1}\sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - XB_n\Big|^2$$
$$= \Big|\Big(I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}} X\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}|A_n X - XB_n|^2,$$

даје нову профињену допуну Шварц-Кошијеве неједнакости за $p$ модификоване операторне норме

$$
\begin{aligned}
&(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac12}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}\\
&\leqslant\left\|\left|\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)X\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}\\
&\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac12}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}\\
&\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\Bigg(\left\|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\\
&+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac12}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\Bigg),
\end{aligned}
$$

под додатним условима да је $\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n$ контракција, $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathcal{H})$ и $0<p\leqslant q$. Такође, из првог идентитета је затим изведена и профињена неједнакост Минковског за $p$-модификоване операторне норме

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=1}^{N}C_n\right\|_{\Phi^{(p)}}^p\\
&\leqslant\left\|\left|\sum_{n=1}^{N}C_n\right|^p+\left(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\right)^{-\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{-\frac{p}{2}}\left|\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\sum_{m=1}^{N}C_m-\sum_{m=1}^{N}\|C_m\|_{\Phi^{(p)}}C_n\right|^p\right\|_{\Phi}\\
&\qquad\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{1-p}}{\left(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\right)^{1-p}}\left\||C_n|^p\right\|_{\Phi}=\left(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\right)^p,
\end{aligned}
$$

где су $C_1,\cdots,C_N\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $p\geqslant2$.

Такође је из идентитета

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right|^2\\
&\quad+\sum_{1\le m<n\le N}\alpha_m\alpha_n\Bigg|(\alpha_m^{-1}A_m-\alpha_n^{-1}A_n)\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n+\left|\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\right)^{\frac12}\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right)-cX(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n)\Bigg|^2\\
&\quad=\ c^2\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\left|X\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right),
\end{aligned}
$$

при $c \geqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$, а $A_n, B_n$ и $X$ су ограничени оператори, између осталог, изведено следеће профињење операторне Ландау - Грисове неједнакости за $p$-модификоване норме

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^{N} A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^{N} B_n \right) \right\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^{N} B_n \right|^2 \right\|_{\Phi^{(p/2)}}.$$

## 5. Закључак и предлог

Рукопис „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним $p$–модификованим нормама и њиховим дуалима” кандидата Стефана Милошевић садржи битан научни допринос у Теорији оператора. Доказан је низ процена норми различитих класа елементарних оператора, као и низ профињења познатих операторних неједнакости. Кандидат се успешно бави научним радом у овој области, до сада је објавио три рада на SCI листи, као и један самосталан рад, чији резултати представљају суштински део ове дисертације.

На основу изложеног, комисија предлаже да се рукопис „Елементарни оператори и трансформације типа скаларног про извода на идеалима компактних оператора генерисаним $p$–модификованим нормама и њиховим дуалима” кандидата Стефана Милошевића **прихвати** као докторска дисертација, као и да се одреди комисија за њену одбрану.

Београд, 10.11.2017.

проф. др Данко Јоцић, редовни професор (ментор)

проф. др Драган Ђорђевић, редовни професор

др Ђорђе Кртинић, доцент