УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Сандра Г. Хоџић

ДИФЕРЕНЦИЈСКЕ СХЕМЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ СУБДИФУЗИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Sandra G. Hodzic

THE DIFFERENCE SCHEMES FOR SOLVING SUBDIFFUSION EQUATION

doctoral dissertation

Belgrade , 2016

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Бошко Јовановић
редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Бошко Јовановић
редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Арпад Такачи
редовни професор
Природно–математички факултет, Универзитет у Новом Саду

др Милан Дражић
ванредни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Резиме

У последње време порасло је интересовање за моделирањем физичких и хемијских процеса једначинама у којима се појављују изводи и интеграли разломљеног реда. Једна таква једначина је једначина субдифузије која се добија из дифузионе једначине заменом класичног извода по временској променљивој изводом реда α, где је $0 < \alpha < 1$.

Предмет ове дисертације јесте почетно-гранични проблем за једначину субдифузије и његова апроксимација коначним разликама. Најпре је разматран једнодимензиони проблем. Показана је егзистенција и јединственост слабог решења. Доказана је стабилност и изведена оцена брзина конвергенције имплицитне и схеме са тежином.

Посебна пажња је посвећена дводимензионом проблему субдифузије, како са Лапласовим, тако и општим диференцијалним оператором другог реда. Претпоставка је да његови коефицијенти задовољавају стандардне услове елиптичности што гарантује постојање решења у одговарајућим просторима типа Собољева. У том случају су, поред горе поменутих, постављене још и адитивна и факторизована схема. Испитана је њихова стабилност као и брзина конвергенције у зависности од глаткости улазних података и генералисаног решења.

Кључне речи: једначина субдифузије, извод разломљеног реда, коначне разлике, диференцијска схема, априорна оцена, стабилност, брзина конвергенције

Научна област: Математика

Ужа научна област: Нумеричка математика

UDK број: [517.962.8:519.63]:517.958(043.3)

Abstract

In recent years there has been increasing interest in modeling the physical and chemical processes with equations involving fractional derivatives and integrals. One of such equations is the subdiffusion equation which is obtained from the diffusion equation by replacing the classical first order time derivative by a fractional derivative of order α with $0 < \alpha < 1$.

The subject of this dissertation is the initial-boundary value problem for the subdiffusion equation and its approximation by finite differences. At the beginning, the one-dimensional equation is observed. The existence and the uniqueness of weak solution is proved. The stability and the convergence rate estimates for implicite and the weighted scheme are obtained.

The main focus is on two-dimensional subdiffusion problem with Laplace operator as well as problem with general second-order partial differential operator. It is assumed that the coefficients of the differential operator satisfy standard ellipticity conditions that guarantees existence of solution in appropriate spaces of Sobolev type. In that case, apart from above mensoned, we constructed the additive and the factorized difference schemes. We investigated their stability and convergence rate depending on the smoothness of the input data and of generalized solution.

Key words: subdiffusion equation, fractional derivative, finite differences, difference scheme, a priori estimate, stability, convergence rate

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Numerical mathematics

UDC number: [517.962.8:519.63]:517.958(043.3)

Предговор

Као класа тзв. псеудо-диференцијалних једначина, једначине са изводима разломљеног реда (енг. FPDE - fractional partial differential equations), постале су значајна област за проучавање, како са са теоријског становишта, тако и са практичног, инжењерског. Због присуства интеграла у дефинцији, извод разломљеног реда у датој тачки садржи информације о функцији у претходном тачкама. То својство нелокалног деловања извода нецелобројног реда је довело до њихове примене у моделовању задатака са „меморијским ефектом” који је карактеристичан за вискоеластичне материјале, полимере и аномалне дифузионе процесе.

Са нумеричке тачке гледишта, FPDE на коначном домену су значајно проучаване. Тако су настале моћне методе за њихово решавање, као што су метода коначних разлика (FDM)([3],[13]), метода коначних елемената (FEM)([44]), приступ случајног хода (RWA)([16]), спектрална метода (SM)([30]), метода интегралне једначине (IEM)([27]), метода хомотопских пертурбација (HPM)([40]), метода репродуковања језгра (RKM) ([53]) и друге. Алгоритми који се заснивају на дискретизацији извода разломљеног реда захтевају складиштење великог броја података и велико заузеће процесора. Ово је нарочито изражено код вишедимензионих проблема. У овом раду смо покушали да укажемо на важност и потребу за конструисањем економичних диференцијских схема које апроксимирају проблеме с фракционим изводима.

Предмет овог рада биће почетно-гранични проблеми за једначину субдифузије и њихова апроксимација методом коначних разлика. Рад се састоји из пет поглавља. У првом поглављу су изложени елементи функционалне анализе и фракционог рачуна који су неопходни за даљи рад. У другом поглављу је постављен проблем, односно једначина субдифузије. Укратко је описан њен физички смисао. Доказани су постојање и јединственост слабог решења почетно-граничног проблема за једначину субдифузије у одговарајућим просторима типа Собољева. Треће поглавље, уједно и најобимније, посвећено је апроксимацији једначине субдифузије методом коначних разлика. Најпре је укратко размотрена једнодимензиона једначина, после чега се прелази на дводимензиони проблем, који и представља главну област истраживања у овом раду. У том случају посматрана је једначина субдифузије са Лапласовим оператором као и са општим диференцијалним оператором другог реда. За имплицитну диференцијску схему и схему са тежинским параметром σ добијене су оцене стабилности и оцене брзине конвергенције у одговарајућим дискретним нормама. У четвртом поглављу су конструисане две нове, економичне диференцијске схеме за почетно-гранични проблем једначине субдифузије. Прва од њих је адитивна диференцијска схема. Она спада у групу локално једнодимензионих диференцијских схема, односно схема променљивих праваца (енг. ADI scheme - alternating direction implicit scheme). Показана је њена стабилност, анализирана грешка и наведен један нумерички експеримент. Друга, под називом факторизована схема за једначину субдифузије, такође представља један облик ADI схеме. И у овом случају су изведене одговарајуће априорне оцене и одређена је брзина конвергенције схеме која је потврђена примером. Кратак закључак је дат у петом поглављу.

* * *

Овом приликом се захваљујем ментору, професору др Бошку Јовановићу на помоћи приликом израде дисертације, а посебно на вишегодишњој помоћи током докторских студија и пренетом знању из области нумеричке математике. Захваљујем се професорима др Арпаду Такачију и др Милану Дражићу на корисним сугестијама. Посебну захвалност дугујем својим родитељима и брату којима посвећујем овај рад.

Математички факултет,
Београд, 2016. Сандра Хоџић

Садржај

1 Математички апарат

1.1 Елементи функционалне анализе

Теорије граничних проблема за парцијалне једначине као и за парцијалне једначине са разломљеним изводима битно се ослањају на функционалну анализу. Од посебне важности је теорија линеарних оператора у Хилбертовом простору. Дефинисаћемо неке основне појмове који ће нам бити потребни у даљем раду.

Нормирани линеарни простор $\mathcal{U}$ је комплетан ако је сваки Кошијев низ из $\mathcal{U}$ конвергентан у $\mathcal{U}$. Комплетан линеарни нормиран простор се зове Банахов простор. Нека је, надаље, $\mathcal{U}$ простор у коме је дефинисан скаларни производ $(\cdot,\cdot)$. Ако је $\mathcal{U}$ комплетан у односу на норму индуковану скаларним производом $\|u\| := (u,u)^{1/2}$, онда се $\mathcal{U}$ зове Хилбертов простор.

Нека су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ два реална линеарна нормирана простора са нормама $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, респективно, и нека је U подскуп од $\mathcal{U}$. Пресликавање $A : U \to \mathcal{V}$ дефинише оператор A на U. Скуп U је област дефинисаности оператора A у ознаци $\mathcal{D}(A)$ а скуп $\mathcal{R}(A) := \{v \in \mathcal{V} : v = Au, u \in \mathcal{D}(A)\}$ је област вредности оператора. Оператор A је линеаран ако је $A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A u_1 + \alpha_2 A u_2$ за свака два вектора u_1, $u_2 \in \mathcal{D}(A)$ и свака два скалара α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Ако постоји реалан број $M > 0$ такав да је

$$\|Au\|_{\mathcal{V}} \leq M\|u\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

кажемо да је оператор ограничен. Норма линеарног ограниченог оператора је дефинисана са

$$\|A\| := \sup_{0 \neq u \in \mathcal{D}(A)} \frac{\|Au\|_{\mathcal{V}}}{\|u\|_{\mathcal{U}}}.$$

Оператор A је инјективан ако за свако $v \in \mathcal{R}(A)$ постоји јединствени елемент $u \in \mathcal{D}(A)$ такав да је $Au = v$, а сурјективан је ако је $\mathcal{R}(A) = \mathcal{V}$. Уколико је оператор истовремено инјективан и сурјективан, кажемо да је бијективан. За инјективан оператор A се може дефинисати инверзни оператор $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$ стављајући $A^{-1}v = u$ ако и само ако је $Au = v$. Ако је A бијективан онда је $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{V}$.

Јединичним оператором $I : U \to U$ називамо оператор који сваки елемент $u \in U$ слика у себе самог. Ако је $A : U \to U$ произвољан оператор тада важи $AI = IA = A$ и $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, уколико A^{-1} постоји.

Нека је $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ произвољан линеарни оператор. Величину (Au, u) називамо његовом енергијом. Оператор је ненегативан ако је $(Au, u) \geq 0$, позитиван ако је $(Au, u) > 0$ за $u \neq 0$ и позитивно дефинитан ако је $(Au, u) \geq \delta \|u\|^2$, $\delta = const > 0$, те ћемо редом писати $A \geq 0$, $A > 0$, односно $A \geq \delta I$.

Ако су A и A^* линеарни оператори који пресликавају $\mathcal{U}$ у $\mathcal{U}$ такви да је $(Au, v) = (u, A^*v)$ за свака два елемента $u, v \in \mathcal{U}$, онда кажемо да је оператор A^* конјугован оператору A. Ако је $A = A^*$ оператор је самоконјугован. Из ограничености оператора A следи ограниченост оператора A^* и важи $\|A\| = \|A^*\|$. Производ два комутативна ненегативна самоконјугована оператора је такође ненегативан самоконјугован оператор.

Оператор B називамо квадратним кореном оператора A ако је $B^2 = A$ и то обележавамо $B = A^{1/2}$. Ако је $A = A^* \geq 0$, онда постоји јединствени квадратни корен $B = A^{1/2}$ који је комутативан са сваким оператором комутативним са А и за који такође важи $B = B^* \geq 0$.

Ако је $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ позитиван самоконјугован оператор, лако се проверава да је са $(u, u)_A = (Au, u)$ задат скаларни производ а са $\|u\|_A = (Au, u)^{1/2}$ норма. Зовемо је енергетска норма. Важи Коши–Шварцова неједнакост

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad \text{односно} \quad |(Au, v)| \leq \|u\|_A \|v\|_A.$$

Уз ову, често се користи и тзв. $\varepsilon-$неједнакост

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + b^2/(4\varepsilon), \quad a, b \in \mathbb{R}, \, \varepsilon > 0.$$

Две норме $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ на Банаховом простору $\mathcal{U}$ су еквивалентне ако постоје два броја $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ тако да за свако $u \in \mathcal{U}$ важи

$$c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1.$$

Ако важи само друга неједнакост, кажемо да је $\| \cdot \|_2$ слабија од норме $\| \cdot \|_1$ или да је норма $\| \cdot \|_1$ јача од норме $\| \cdot \|_2$.

Нека су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ два линеарна нормирана простора и нека је $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Дефинишимо оператор идентитета $I : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ тако да је $Iu = u$ за сваки елемент $u \in \mathcal{U}$ (третирајући слику као елемент из $\mathcal{V}$). Јасно је да је I линеаран. Ако је још и ограничен онда кажемо да постоји потапање $\mathcal{U}$ у $\mathcal{V}$ и пишемо $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{V}$.

Претпоставимо да је $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Оператор $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ називамо функционал. Скуп свих ограничених линеарних функционала који су дефинисани на линеарном нормираном постору $\mathcal{U}$ обележавамо са $\mathcal{U}'$. Збир функционала и множење функционала скаларом дефинишу се на уобичајен начин

$$(f+g)(u) := f(u) + g(u), \quad f, g \in \mathcal{U}',\, u \in \mathcal{U},$$

$$(\lambda f)(u) := \lambda f(u), \quad f \in \mathcal{U}',\, \lambda \in \mathbb{R}\,(\text{или } \mathbb{C}),\, u \in \mathcal{U},$$

па је $\mathcal{U}'$ линеаран простор. Он је и нормиран простор јер је норма функционала дефинисана са

$$\|f\|_{\mathcal{U}'} := \sup_{0 \neq u \in \mathcal{U}} \frac{|f(u)|}{\|u\|_{\mathcal{U}}}.$$

Нормирани линеарни простор $\mathcal{U}'$ је Банахов простор и назива се дуални простор простора $\mathcal{U}$.

Нека је $\mathcal{U}$ реалан Хилбертов простор са нормом $\|\cdot\|$ и нека је $a(\cdot,\cdot)$ функционал дефинисан на производу $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Кажемо да је функционал $a(\cdot,\cdot)$

- билинеаран, ако је $a(v,w)$ линеаран по v за фиксирано w и линеаран по w за фиксирано v,
- ограничен, ако постоји позитиван реалан број c_1 тако да је

$$|a(v,w)| \leq c_1 \|v\| \|w\|, \quad \forall v, w \in \mathcal{U},$$

- $\mathcal{U}-$коерцыван, ако постоји позитиван реалан број c_0 тако да је

$$a(v,v) \geq c_0 \|v\|^2, \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Билинеарни функционал се такође назива и билинеарном формом.

Размотримо варијациони проблем следећег облика: за дати ограничени линеарни функционал f на реалном Хилбертовом простору $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}-$коерцивни ограничени билинеарни функционал $a(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, наћи $u \in \mathcal{U}$ тако да је

$$a(u, v) = f(v), \;\; \forall v \in \mathcal{U}.$$

Теорема 1.1. ([23]) (Лакс-Милграм) *Нека је $\mathcal{U}$ реалан Хилбертов простор са нормом $\|\cdot\|$, f ограничен реалан функционал на $\mathcal{U}$ и $a(\cdot, \cdot)$ ограничен билинеаран, $\mathcal{U}-$коерциван функционал на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Тада постоји јединствени елемент $u \in \mathcal{U}$ такав да*

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Уз то је и

$$\|u\| \leq \frac{1}{c_0} \|f\|_{\mathcal{U}'}.$$

Нагласимо да се гранични проблеми за парцијалне диференцијалне једначине елиптичког типа могу свести на варијационе проблеме овог облика у одговарајућим просторима функција.

1.2 Основни простори функција

1.2.1 Простори $C^m(\Omega)$ и $L_p(\Omega)$

Отворен и повезан скуп $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ називамо облашћу. Граница области Ω је скуп $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$, где је $\bar{\Omega}$ затворење скупа Ω. Носач функције $f : \Omega \to \mathbb{C}$ је затворење скупа тачака у којима је функција различита од нуле и означавамо га са $\operatorname{supp} f$. Елементе скупа $\mathbb{R}^n$ представљаћемо као векторе и означавати са $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, а елементе скупа $\mathbb{N}_0^n$ са $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ и називати мултииндексима. Функција је финитна ако је $\operatorname{supp} f$ ограничен скуп. У случају функције више променљивих, њене парцијалне изводе означаваћемо са

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \;\; D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \;\; \text{где је } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Са $C^m(\Omega)$ ћемо означавати простор свих непрекидних функција f дефинисаних на Ω за које је $D^\alpha f$ такође непрекидна функција на Ω за сваки мултииндекс α, $|\alpha| \leq m$. Даље, дефинишемо $C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$. Специјално, $C^0(\Omega)$ скраћујемо на запис $C(\Omega)$. Са $C^m(\overline{\Omega})$ ћемо означавати скуп свих $f \in C^m(\Omega)$ којима се извод $D^\alpha f$ може непрекидно продужити на $\bar{\Omega}$ за сваки мултииндекс α, $|\alpha| \le m$. То је Банахов простор са нормом

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|\le m} \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|.$$

Простор $\dot{C}^m(\Omega) = C_0^m(\Omega)$ је потпростор $C^m(\Omega)$ кога чине функције са компактим носачем у Ω. У теорији дистрибуција елементи скупа $\dot{C}^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ зову се тест функције.

Нека је Ω ограничен и отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. За $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda \le 1$ означимо са $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ скуп свих функција $u \in C^k(\bar{\Omega})$ за које је величина

$$|u|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} := \max_{|\alpha|=k} \sup_{x\ne y,\, x,y\in\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

коначна. $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ је Банахов простор са нормом

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + |u|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})}.$$

Када u припада простору $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $0 < \lambda < 1$ кажемо да је u непрекидна у смислу Хелдера на $\bar{\Omega}$ са експонентом λ а за $\lambda = 1$ кажемо да је функција u непрекидна у смислу Липшица.

За реални број $p \ge 1$ дефинишемо и простор мерљивих функција $L_p(\Omega)$ за које је

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

односно

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty.$$

$L_p(\Omega)$ је Банахов простор, а специјално, $L_2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

$L_{p,loc}(\Omega)$ је простор локално интеграбилних функција, односно $f \in L_{p,loc}(\Omega)$ ако је $f \in L_p(\Omega')$ за сваку ограничену подобласт Ω' такву да је $\Omega' \Subset \Omega$ (тј. $\bar{\Omega}' \subset \Omega$).

Функција f је апсолутно непрекидна на $[a,b]$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваки коначан, по паровима дисјунктан низ интервала $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, \dots n$, за који је $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, следи да је $\sum_{k=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k)) < \varepsilon$. Простор таквих функција ћемо означавати са $AC[a, b]$. Он се поклапа са простором примитивних функција за функције из $L_1[a, b]$, односно

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \;\; \int_a^b |\varphi(t)|\,dt < \infty.$$

За $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо и

$$AC^n[a, b] = \{f \in C^{n-1}[a, b] : f^{(n-1)} \in AC[a, b]\}.$$

Специјално, $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

1.2.2 Дистрибуције

Дефиниција 1.1. *За низ функција $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ако су испуњени следећи услови:*

- *постоји компактан скуп $K \subset \mathbb{R}^n$ такав да $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ за свако j*
- *за сваки мултииндекс α, низ $D^\alpha \varphi_j$ униформно конвергира ка $D^\alpha \varphi$ на K кад $j \to \infty$.*

Простор $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ са овако дефинисаном конвергенцијом означавамо са $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а његове елементе називамо основним функцијама.

Дефиниција 1.2. *Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ зовемо дистрибуцијама или генералисаним функцијама. Скуп дисрибуција обележавамо са $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Вредност дистрибуције $f \in \mathcal{D}'$ на основној функцији $\varphi \in \mathcal{D}$ означавамо са $\langle f, \varphi \rangle$. При томе $\langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$ и важе следећи услови:*

линеарност: $\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle f, \psi \rangle, \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \;\; \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}$

непрекидност: ако $\varphi_k \to \varphi, \; k \to \infty$ *тада,* $\langle f, \varphi_k \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \; k \to \infty.$

Скуп $\mathcal{D}'$ је линеаран векторски простор у односу на сабирање дистрибуција и множење дистрибуција скаларом.

У простор дистрибуција се, даље, уводи конвергенција.

Дефиниција 1.3. *За низ дистрибуција $f_k \in \mathcal{D}'$ кажемо да конвергира ка f и пишемо $f_k \to f,\ \ k \to \infty$ ако:*

$$\langle f_k, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \quad k \to \infty, \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Може се показати да је простор дистрибуција с овако дефинисаном конвергенцијом комплетан.

Дистрибуције су регуларне ако су индуковане неком локално интеграбилном функцијом јер је за $f(x) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ са

$$\varphi(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx$$

дефинисан један линеаран ограничен функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Зато се свака регуларна дистрибуција може поистоветити са одговарајућом функцијом која је индукује, што се може писати:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Конволуција две локално интеграбилне функције, у ознаци $f*g$, дефинише се на следећи начин

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Дефиниција 1.4. *Функционал $f(x) \cdot g(y)$ одређен једнакошћу*

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x,y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle, \quad \forall \varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}),$$

називамо директним производом дистрибуција $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Дефиниција 1.5. *За низ функција $\eta_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ кажемо да конвергира ка 1 у $\mathbb{R}^n$ ако*
(а) За сваки компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ постоји индекс N такав да је

$$\eta_j = 1 \quad \text{за} \quad \forall x \in K \quad \text{и} \quad \forall j \geq N.$$

(б) Функције η_j су равномерно ограничене у $\mathbb{R}^n$, заједно са својим парцијалним изводима

$$|D^\alpha \eta_j(x)| < C_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}_0^n.$$

Сада се може дефинисати и конволуција дистибуција f и g са

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle f(x) \cdot g(y), \eta_j(x,y)\varphi(x+y) \rangle,$$

где је $\eta_j(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ произвољан низ функција који конвергира ка 1 у $\mathbb{R}^{2n}$.

Важи следеће правило диференцирања дистрибуција.

Дефиниција 1.6. *Нека је $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Са $D^\alpha f$ означавамо функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ дефинисан на следећи начин:*

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

За $n = 1$ уведимо скуп дистрибуција које се анулирају за $x < 0$:

$$\mathcal{D'}_+ = \{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \ \text{ за } \ x < 0 \}.$$

Скуп $\mathcal{D'}_+$ представља алгебру у односу на сабирање дистрибуција, множење дистрибуција скаларом и конволуцију.

1.2.3 Дистрибуције спорог раста

Важна особина ове класе дистрибуција је та да оне имају добро дефинисану Фуријеову трансформацију, што је од посебног значаја за теорију парцијалних једначина.

Нека је $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ скуп свих тест функција $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ које, грубо говорећи, брзо опадају заједно са свим својим парцијалним изводима када $|x| \to \infty$, односно теже нули брже од сваког степена $1/|x|$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{ f \in \ C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\beta D^\alpha f(x) \to 0, \ |x| \to \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \}.$$

Линеарност простора $\mathcal{S}$ се показује на уобичајени начин. У овом скупу се такође дефинише конвергенција.

Дефиниција 1.7. *За низ функција $\varphi_j \in \mathcal{S}$ кажемо да конвергира ка функцији $\varphi \in \mathcal{S}$ ако*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : x^\beta D^\alpha \varphi_j(x) \to x^\beta D^\alpha \varphi(x), \ j \to \infty$$

униформно по $x \in \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{D}$ је прави подскуп од $\mathcal{S}$. Из конвергенције у $\mathcal{D}$ следи конвергенција у $\mathcal{S}$. Простор $\mathcal{D}$ је густ у $\mathcal{S}$.

Линеарни простор $\mathcal{S}$ са уведеном конвергенцијом називамо простором брзо опадајућих функција или Шварцовим простором.

Дефиниција 1.8. *Линеарне непрекидне функционале на скупу $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ називамо дистрибуцијама спорог раста а њихов скуп означавамо са $\mathcal{S}'$. За низ дистрибуција $f_k \in \mathcal{S}'$ кажемо да конвергира ка $f \in \mathcal{S}'$ ако:*

$$\langle f_k, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \;\; k \to \infty, \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Фуријеова трансформација за функцију $\varphi \in \mathcal{S}$ дефинише се на следећи начин:

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i\xi \cdot x} \, dx,$$

где је $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$. Није тешко проверити да важе следеће формуле

$$D^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i\xi \cdot x} \, dx = \mathcal{F}[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi) \qquad (1.1)$$

$$\mathcal{F}[D^\alpha \varphi](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) e^{i\xi \cdot x} \, dx = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[\varphi(x)](\xi) \qquad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) следи

$$\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \xi^\beta \mathcal{F}[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[D^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi).$$

Из линеарности интеграла и

$$|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\beta (x^\alpha \varphi(x))| \, dx < \text{const},$$

следи да је $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ линеарна непрекидна операција. Инверзна Фуријеова трансформација се дефинише на следећи начин

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{-i\xi \cdot x} \, d\xi.$$

Теорема 1.2. ([22]) *За свако $\varphi \in \mathcal{S}$ важе једнакости*

$$\varphi = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]].$$

За функцију $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ формулом (1.2) дефинисана је такође Фуријеова трансформација $\mathcal{F}[f](\xi)$. На основу Риман–Лебегове леме ([48]) $\mathcal{F}[f]$ је ограничена и непрекидна функција на $\mathbb{R}^n$ и зато индукује једну дистрибуцију из $\mathcal{S}'$ по правилу

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Користећи Фубинијеву теорему добијамо

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](\xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \Big[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi\cdot x}\, dx\Big] \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Big[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i\xi\cdot x}\, d\xi\Big]\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx,$$

односно

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ову релацију узимамо за дефинициону релацију Фуријеове трансформација на скупу дистрибуција спорог раста. Инверзна Фуријеова трансформација на скупу $\mathcal{S}'$ дата је формулом

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \mathcal{F}[f(-x)], \ \ \forall f \in \mathcal{S}'.$$

1.2.4 Простори Собољева

Дефиниција 1.9. *Нека је Ω отворен подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ и k ненегативан цео број. Тада је за $1 \le p \le \infty$*

$$W_p^k(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), \ \ |\alpha| \le k\} \tag{1.3}$$

простор Собољева реда k са нормом

$$\|u\|_{W_p^k}(\Omega) := \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \Big)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.4}$$

односно

$$\|u\|_{W_\infty^k}(\Omega) := \max_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty. \tag{1.5}$$

Придружена полунорма је дата са

$$|u|_{W_p^k}(\Omega) := \Big(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \Big)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

односно

$$|u|_{W_\infty^k}(\Omega) := \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty.$$

У овој дефиницији изводе треба схватити у смислу извода дистрибуција при чему се дистрибуција поистовећује са локално интеграбилном функцијом која је индукује. Простор $W_p^k(\Omega)$ са нормом $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$, $1 \le p \le \infty$, $k > 0$ је Банахов. Специјално, за $p = 2$, нормирани линеарни простор $W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)}\, dx.$$

Теорема 1.3. ([22],[32]) *Ако је* $\Omega = \mathbb{R}^n$, H^k *може бити дефинисан са* (1.3) *или са*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \big(1 + |\xi|^2\big)^{1/2} \mathcal{F}[u](\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1.6}$$

где је $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. *При томе се норма дефинише са*

$$|[u]|_{H^k(\mathbb{R}^n)} = \Big\| \big(1 + |\xi|^2\big)^{1/2} \mathcal{F}[u](\xi) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.7}$$

и еквивалентна је са раније уведеном нормом (1.4) *за* $p = 2$.

У неким случајевима је погодно укључити услове које функција задовољава на граници области у саму дефиницију простора у коме се тражи решење. Када се ради о Дирихлеовим граничним условима дефинише се $\dot{W}_p^k(\Omega)$ као затворење $C_0^\infty(\Omega)$ у норми $W_p^k(\Omega)$. $\dot{W}_p^k(\Omega)$ је Хилбертов потпростор од $W_p^k(\Omega)$.

Уведимо сада просторе Собољева разломљеног реда.

Дефиниција 1.10. *Нека је* s *позитиван реалан број,* $s = m + \sigma$, *где је* $0 < \sigma < 1$ *и* $m = [s]$ *цео део од* s. *Простор Собољева разломљеног реда* $W_p^s(\Omega)$ *представља скуп функција* $u \in W_p^m(\Omega)$ *таквих да је*

$$|u|_{W_p^s(\Omega)} := \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dxdy \right\}^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

односно

$$|u|_{W^s_\infty(\Omega)} = \max_{\alpha=m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\sigma}, \quad p = \infty.$$

Норма у $W^s_p(\Omega)$ *се уводи на следећи начин*

$$\|u\|_{W^s_p(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + |u|^p_{W^s_p(\Omega)}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

односно

$$\|u\|_{W^s_\infty(\Omega)} := \|u\|_{L_\infty(\Omega)} + |u|_{W^s_\infty(\Omega)}, \quad p = \infty.$$

$W^s_p(\Omega)$ је Банахов простор. Као и у случају простора Собољева целобројног реда, за реално $s > 0$ дефинише се $\dot{W}^s_p(\Omega)$ као затворење $C^\infty_0(\Omega)$ у норми простора $W^s_p(\Omega)$. За реално $s > 0$ и $1 < p < \infty$ дефинише се и линеарни простор ограничених линеарних функционала на простору Собољева $\dot{W}^s_p(\Omega)$ у ознаци $W^{-s}_q(\Omega)$ где је q конјуговано спрегнут са p, тј. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Дакле, $W^{-s}_q(\Omega) = (\dot{W}^s_p(\Omega))'$. Пошто је $\mathcal{D}(\Omega) \subset \dot{W}^s_p(\Omega)$ следи да је $W^{-s}_q(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, односно елементи простора $W^{-s}_q(\Omega)$ су дистрибуције.

Нека је Ω ограничен отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. За границу те области кажемо да је непрекидна по Липшицу ако за сваку тачку x са границе $\partial\Omega$ постоји околина U_x тако да је $U_x \cap \partial\Omega$ график Липшиц–непрекидне функције. Ограничен отворен скуп са границом непрекидном по Липшицу називамо и Липшицов домен.

Теорема 1.4. ([23]) (Теорема потапања Собољева) *Нека је Ω Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$ и Ω^k пресек Ω са $k-$димензионалном хиперравни у $\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$. Специјално, за $k = n$ имамо да је $\Omega^k = \Omega$. Нека су j и m ненегативни цели бројеви. За $1 \le p < \infty$ важе следећа потапања*

1. *ако је $mp < n$ и $n - mp < k \le n$, тада*

$$W^{j+m}_p(\Omega) \hookrightarrow W^j_q(\Omega^k), \quad p \le q \le kp/(n-mp), \tag{1.8}$$

и специјално, за $k = n$

$$W^{j+m}_p(\Omega) \hookrightarrow W^j_q(\Omega), \quad p \le q \le np/(n-mp) \tag{1.9}$$

док за $k = n$ и $j = 0$

$$W^m_p(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega), \quad p \le q \le np/(n-mp). \tag{1.10}$$

Штавише, ако је $p = 1$ а тиме и $m < n$, потапање (1.8) такође постоји за $k = n - m$;

2. *ако је $mp = n$, тада за свако k, $1 \leq k \leq n$*

$$W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega^k), \quad p \leq q < \infty; \tag{1.11}$$

3. *ако је $mp > n > (m-1)p$, тада*

$$W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \lambda \leq m - (n/p); \tag{1.12}$$

Потапање (1.12) важи и за $n = (m-1)p$ и $0 < \lambda < 1$ као и за $n = m - 1$, $p = 1$ и $0 < \lambda \leq 1$.

Теорема 1.5. ([23]) (Поенкареова неједнакост) *Нека је Ω Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$ коначне ширине d, у смислу да Ω лежи између две паралелне хиперравни на растојању d и нека је $s > 0$ и $1 \leq p < \infty$. Тада постоји константа $c = c(s, p, d)$ таква да важи*

$$\|u\|^p_{W_p^s(\Omega)} \leq c|u|^p_{W_p^s(\Omega)}, \quad \forall u \in \dot{W}_p^s(\Omega). \tag{1.13}$$

Наведимо сада и теорему о трагу.

Теорема 1.6. ([23]) *Претпоставимо да је Ω Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$ и нека је $1 < p < \infty$. За $1/p < s \leq 1$, пресликавање γ_0 дефинисано на $C^\infty(\bar{\Omega})$ са*

$$\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega}$$

има јединствено непрекидно продужење до линеарног оператора из $W_p^s(\Omega)$ на $W_p^{s-1/p}(\partial\Omega)$; ово продужење и даље означавамо са γ_0. Даље, за $1/p < s \leq 1$, простор $\dot{W}_p^s(\Omega)$ дефинисан као затворење $C_0^\infty(\Omega)$ у $W_p^s(\Omega)$ има и следећу карактеризацију

$$\dot{W}_p^s(\Omega) = \left\{u \in W_p^s(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\right\}.$$

1.2.5 Интерполација Банахових простора

Нека су A_0 и A_1 два Банахова простора линеарно и непрекидно потопљена у линеаран тополошки простор $\mathcal{A}$. Оваква два простора чине интерполациони или Банахов пар $\bar{A} = \{A_0, A_1\}$. Дефинишимо простор $\Delta(\bar{A}) = A_0 \cap A_1$

са нормом

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right)$$

и простор

$$\Sigma(\bar{A}) = A_0 + A_1 = \{a : a \in \mathcal{A},\ \exists\, a_j \in A_j,\ j = 0,1,\ a = a_0 + a_1\}$$

са нормом

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1,\, a_i\in A_i} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}). \tag{1.14}$$

Лема 1.7. ([50]) Нека је $\{A_0, A_1\}$ интерполациони пар. Тада су $A_0 \cap A_1$ и $A_0 + A_1$ Банахови простори и важи

$$A_0 \cap A_1 \subset A_j \subset A_0 + A_1, \quad j = 0,1.$$

За два Банахова пара $\bar{A}$ и $\bar{B}$ уведимо линерни оператор $T : \bar{A} \to \bar{B}$ ($T \in \mathcal{L}(\bar{A}, \bar{B})$) као ограничено линеарно пресликавање $T : \Sigma(\bar{A}) \to \Sigma(\bar{B})$ такво да $T(A_0) \subset B_0$ и $T(A_1) \subset B_1$. Можемо сматрати да је T ограничено линеарно пресликавање из A_i у B_i, $i = 0,1$. Дефинишимо и

$$\|T\|_{\bar{A}\to\bar{B}} = \max\{\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\}.$$

Специјално, за $\bar{A} = \bar{B}$, писаћемо $\|T\|_{\bar{A}}$.

За било који Банахов пар $\bar{A}$ средишњи простор (или међупростор) Z је Банахов простор са особином $\Delta(\bar{A}) \subset Z \subset \Sigma(\bar{A})$. Такав простор Z називамо интерполационим простором ако за свако $T \in \mathcal{L}(\bar{A})$ важи $T(Z) \subset Z$.

Једна од најчешће коришћених интерполационих метода је такозвана $K-$метода ([50],[23],[25]). Нека је $\bar{A} = \{A_0, A_1\}$ Банахов пар и дефинишимо функцију

$$K(t,a) = K(t,a,A_0,A_1) := \inf_{a\in A_1+A_2,\ a=a_0+a_1,\ a_j\in A_j} \{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}.$$

Јасно, за $t = 1$, $K(1,a)$ је норма у простору $\Sigma(\bar{A})$ дефинисана са (1.14), док је за друге позитивне вредности t, $K(t,a)$ њој еквивалентна норма. За $0 < \theta < 1$ и $1 \le p \le \infty$ дефинишимо простор $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ као скуп свих елемената $a \in A_0 + A_1$ за које је норма $\|a\|_{(A_1,A_2)_{\theta,p}}$ коначна, где је

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} := \left\{ \int_0^\infty \left[t^{-\theta} K(t,a,A_0,A_1) \right]^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p}, \quad \text{ако је } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} := \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a,A_0,A_1), \quad \text{ако је } p = \infty.$$

Дефинисан на овај начин, нормиран линеаран простор $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ је интерполациони. Важе следеће релације

$$(A_0,A_1)_{\theta,p} = (A_1,A_0)_{1-\theta,p}, \quad (A,A)_{\theta,p} = A,$$

$$(A_0,A_1)_{\theta,1} \subset (A_0,A_1)_{\theta,p} \subset (A_0,A_1)_{\theta,\tilde{p}} \subset (A_0,A_1)_{\theta,\infty}, \quad 1 \leq p \leq \tilde{p} \leq \infty,$$

$$(A_0,A_1)_{\theta,p} \subset (A_0,A_1)_{\tilde{\theta},\tilde{p}}, \quad \text{ако је} \quad A_0 \subset A_1 \quad 0 < \theta < \tilde{\theta} < 1, \quad 1 \leq p \leq \tilde{p} \leq \infty,$$

$$\exists C_{\theta,p} > 0, \quad \forall a \in A_0 \cap A_1, \quad \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} \leq C_{\theta,p} \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^{\theta}.$$

Примери интерполационих простора су простори Беселових потенцијала H_p^s, затим простори Бесова B_{pq}^s и Собољева W_p^s. О овим просторима се више може наћи у [50].

За $0 \leq s_1, s_2 < \infty$, $s_1 \neq s_2$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ имамо да је

$$\left(W_p^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_p^{s_2}(\mathbb{R}^n) \right)_{\theta,p} = W_p^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{ако је } s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2 \notin \mathbb{Z}$$

док за $p = 2$ важи претходна релација без ограничења

$$(W_2^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_2^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = W_2^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\mathbb{R}^n).$$

Аналогни интерполациони резултати важе у просторима Собољева са Липшицовим доменом $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Дакле, простори Собољева $W_2^s(\Omega)$ који ће нам надаље бити од интереса у раду са фракционим изводима су интерполациони простори.

1.2.6 Анизотропни простори Собољева

Простори Собољева који се састоје од функција више променљивих које немају исту глаткост у свим координатним правцима називају се анизотропним. Дефинишимо посебну класу тих простора која је од важности за анализу проблема који зависе од временске променљиве.

Нека је $\mathcal{U}$ Банахов простор са нормом $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ и нека је $|\cdot|_{\mathcal{U}}$ полунорма на $\mathcal{U}$ тако да је $|u|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{\mathcal{U}}$ за свако $u \in \mathcal{U}$. Претпоставимо да је (c,d) отворен интервал на $\mathbb{R}$ и $1 \leq p < \infty$. Дефинишимо простор $L_p((c,d),\mathcal{U})$ свих функција $u : (c,d) \to \mathcal{U}$ таквих да је $t \mapsto \|u(t)\|_{\mathcal{U}}$ мерљиво на (c,d) са

$$\int_c^d \|u\|_{\mathcal{U}}^p \, dt < \infty, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{односно} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(c,d)} \|u(t)\|_{\mathcal{U}} < \infty, \quad p = \infty.$$

Може се показати да је то Банахов простор са нормом

$$\|u\|_{L_p((c,d),\mathcal{U})} := \left(\int_c^d \|u\|_{\mathcal{U}}^p \, dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

односно

$$\|u\|_{L_\infty((c,d),\mathcal{U})} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(c,d)} \|u(t)\|_{\mathcal{U}} \quad p = \infty.$$

За цео број $k \geq 0$ означимо са $C^k((c,d),\mathcal{U})$ скуп свих непрекидних функција $u : t \in (c,d) \mapsto u(t) \in \mathcal{U}$ чији су изводи по t реда мањег или једнаког k такође непрекидни на (c,d). Са $C^k([c,d],\mathcal{U})$ означимо скуп функција u из $C^k((c,d),\mathcal{U})$ таквих да се сви изводи по времену до реда k могу непрекидно продужити са (c,d) на $[c,d]$. $C([c,d],\mathcal{U})$ је Банахов простор снабдевен нормом дефинисаном са

$$\|u\|_{C([c,d],\mathcal{U})} := \max_{t\in[c,d]} \|u(t)\|_{\mathcal{U}}.$$

Слично, норма у простору $C^k([c,d],\mathcal{U})$ задата је са

$$\|u\|_{C^k([c,d],\mathcal{U})} := \max_{0\leq m\leq k} \sup_{t\in(c,d)} \|u^{(m)}(t)\|_{\mathcal{U}}.$$

Нека је $1 \leq p < \infty$, $r > 0$ и $r = m + \rho$, $0 \leq \rho < 1$, где је $m = [r]$ цео део од r. Дефинишимо простор $W_p^r((c,d),\mathcal{U})$ свих функција $u \in L_p((c,d),\mathcal{U})$ чији је $m-$ти извод на интервалу (c,d) такође елемент $L_p((c,d),\mathcal{U})$ и

$$\mathcal{N}_{r,p}(u) := \left(\int_c^d \int_c^d \frac{\|u^{(m)}(\tau) - u^{(m)}(\tau')\|_{\mathcal{U}}^p}{|\tau - \tau'|^{1+p\rho}} \, d\tau d\tau'\right)^{1/p} < \infty$$

за $\rho > 0$. Ако је $\rho = 0$, тада је $\mathcal{N}_{r,p}(u) = 0$. Простор $W_p^r((c,d),\mathcal{U})$ је Банахов снабдевен нормом

$$\|u\|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} := \Big(\|u\|^p_{L_p((c,d),\mathcal{U})} + \|u^{(m)}\|^p_{L_p((c,d),\mathcal{U})} + \mathcal{N}^p_{r,p}(u)\Big)^{1/p}$$

и придруженом природном полунормом која је дефинисана за цео број $r = m > 0$ и реално нецелобројно $r > 0$, редом са

$$|u|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} := \|u^{(m)}\|_{L_p((c,d),\mathcal{U})} \qquad \text{и} \qquad |u|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} := \mathcal{N}_{r,p}(u).$$

Нека је Ω Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$ и $Q := \Omega \times (c,d)$. За $1 \le p < \infty$ уведимо анизотропни простор Собољева

$$W_p^{s,r}(Q) := L_p((c,d), W_p^s(\Omega)) \cap W_p^r((c,d), L_p(\Omega)) \tag{1.15}$$

са нормом

$$\|u\|_{W_p^{s,r}(Q)} := \Big(\|u\|^p_{L_p((c,d),W_p^s(\Omega))} + \|u\|^p_{W_p^r((c,d),L_p(\Omega))}\Big)^{1/p} \tag{1.16}$$

и полунормом

$$|u|_{W_p^{s,r}(Q)} := \Big(|u|^p_{L_p((c,d),W_p^s(\Omega))} + |u|^p_{W_p^r((c,d),L_p(\Omega))}\Big)^{1/p}, \tag{1.17}$$

с уобичајеном изменом за $p = \infty$.

1.2.7 Брамбл–Хилбертова лема

Приликом анализе грешке диференцијске схеме добијене методом коначних разлика, важну улогу има „интегрална” репрезентација функције, тј. репрезентација функције (појединих сабирака у изразу за грешку) у облику интеграла. Она се постиже применом Њутн–Лајбницове формуле. Међутим, исти ефекат се може постићи и применом леме Брамбл–Хилберта. Њена предност је у једноставнијој примени али и у томе што су поред основне леме за целобројне просторе Собољева, развијена и уопштења леме на анизотропне и просторе са разломљеним редом. Она има фундаменталну улогу у оцењивању линеарних функционала у просторима Собољева.

Теорема 1.8. ([23]) *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Липшицов домен и нека је за позитиван цео број m и реалан број $p \in [1,\infty]$ дат ограничен линеаран функционал η на* *простору Собољева* $W_p^m(\Omega)$ *такав да*

$$\mathcal{P}_{m-1} \subset Ker(\eta) \tag{1.18}$$

где је $\mathcal{P}_{m-1}$ *скуп свих полинома од* n *променљивих степена не већег од* $m-1$. *Тада постоји позитиван реалан број* $C = C(m, p, n, \Omega)$ *такав да је*

$$|\eta(v)| \leq C\|\eta\||v|_{W_p^m(\Omega)}, \qquad \forall v \in W_p^m(\Omega),$$

где је $\|\eta\|$ *стандардна норма функционала (дефинисана на стр. 3).*

Теорема 1.9. ([23]) *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Липшицов домен и нека је за позитиван реалан број* s *и реалан број* $p \in [1, \infty]$ *дат ограничен линеаран функционал* η *на простору Собољева* $W_p^s(\Omega)$ *такав да важи* $\mathcal{P}_m \subset Ker(\eta)$, *при чему је* $s = m+\alpha$, *где је* m *ненегативан цео број и* $0 < \alpha \leq 1$. *Тада постоји позитиван реалан број* $C = C(m, p, n, \Omega)$ *такав да*

$$|\eta(v)| \leq C\|\eta\||v|_{W_p^s(\Omega)}, \qquad \forall v \in W_p^s(\Omega).$$

Уопштења ове леме на анизотропне просторе Собољева као и мултилинеарну варијанту можемо наћи у [8],[14],[23]. Специјално, овде ћемо навести билинеарну варијанту Брамбл–Хилбертове леме која ће нам бити потребна у даљем раду.

Дефиниција 1.11. *Коначан скуп* A *мултииндекса* $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}_+^2$ *је регуларан ако* $(0,0) \in A$ *и ако за сваки* $(\alpha, \beta) \in A$ *постоји* $\alpha_0 \geq \alpha$ *и* $\beta_0 \geq \beta$ *такви да* $(\alpha_0, 0) \in A$ *и* $(0, \beta_0) \in A$.

Нека је $\Omega_x = (0,1)$, $\Omega_y = (0,1)$ и $Q = \Omega_x \times \Omega_y$. Уведимо следеће полунорме за мултииндексе (α, β) са уобичајеном модификацијом за $p = \infty$.
За $\alpha = [\alpha]$, $\beta = [\beta]$,

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \|D^{\alpha,\beta}u\|_{L_p},$$

За $\alpha = 0$, $0 < \beta < 1$

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left(\int_{Q_x} \int_{Q_y} \int_{Q_y} \frac{|u(x,y_1) - u(x,y_2)|^p}{|y_1 - y_2|^{1+\beta p}} \, dy_1 dy_2 dx \right)^{1/p},$$

За $\beta = 0$, $0 < \alpha < 1$

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left(\int_{Q_y} \int_{Q_x} \int_{Q_x} \frac{|u(x_1,y) - u(x_2,y)|^p}{|y_1 - y_2|^{1+\alpha p}} \, dx_1 dx_2 dy \right)^{1/p},$$

За $0 < \alpha, \beta < 1$

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} =$$

$$\left(\int_{Q_y} \int_{Q_y} \int_{Q_x} \int_{Q_x} \frac{|u(x_1,y_1) + u(x_2,y_2) - u(x_1,y_2) - u(x_2,y_1)|^p}{|x_1 - x_2|^{1+\alpha p} |y_1 - y_2|^{1+\beta p}} \, dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \right)^{1/p}.$$

У осталим случајевима је $\alpha \geq 1$ или $\beta \geq 1$ и тада дефинишемо

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left| u^{[\alpha],[\beta]} \right|_{(\alpha-[\alpha],\beta-[\beta]),p}.$$

За дати регуларан скуп мултииндекса $A \in \mathbb{R}^2_+$, простором $W^A_p(Q)$ зваћемо затворење скупа $C^\infty(Q)$ у норми

$$\|u\|_{W^A_p} = \left(\sum_{(\alpha,\beta)\in A} |u|^p_{(\alpha,\beta),p} \right)^{1/p}.$$

Даље, нека је $\kappa(A)$ конвексни омотач скупа A у $\mathbb{R}^2$ и $\partial_0\kappa(A)$ део полигоналне границе $\kappa(A)$ који не лежи на координатним осама а укључује две граничне тачке на осама. На крају, нека је $A_\partial = A \cap \partial_0\kappa(A)$ и B непразни подскуп од A_∂ такав да је $B \cup \{(0,0)\}$ регуларан скуп мултииндекса. Дефинишимо

$$\nu(B) := \left\{ (\gamma_1,\gamma_2) \in \mathbb{N}^2_+ : \partial_1^{\lfloor\alpha\rfloor} \partial_2^{\lfloor\beta\rfloor} x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} \equiv 0, \quad \forall (\alpha,\beta) \in B \right\},$$

где је $\lfloor\alpha\rfloor$ највећи цео број строго мањи од α.

Важи следећа билинеарна верзија леме Брамбла-Хилберта.

Теорема 1.10. *Нека су $\Omega_k \subset \mathbb{R}^2$, $k = 1,2$, Липшицови домени а A_k и B_k скупови мултииндекса који задовољавају услове истог типа као A и B. Нека је $(v_1,v_2) \to \eta(v_1,v_2)$ ограничен билинеаран функционал на простору $W^{A_1}_{p_1}(\Omega_1) \times W^{A_2}_{p_2}(\Omega_2)$ који се анулира за $v_k = x_k^{\alpha_k} y_k^{\beta_k}$, $(x_k,y_k) \in \Omega_k$, $(\alpha_k,\beta_k) \in \nu(B_k)$. Тада постоји реалан број $C = C(A_1,B_1,p_1,\Omega_1,n_1,A_2,B_2,p_2,\Omega_2,n_2)$, та-*

кав да је

$$|\eta(v_1, v_2)| \leq C\|\eta\| \prod_{k=1}^{2} \sum_{(\alpha_k,\beta_k)\in B_k} |v_k|_{(\alpha_k,\beta_k),p_k}, \quad \forall v \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2).$$

1.2.8 Мултипликатори у простору Собољева

Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$ и нека су V и W два простора садржана у $\mathcal{D}'(\Omega)$. Функција a дефинисана на Ω назива се мултипликатор (или множитељ) из V у W ако за свако $v \in V$, производ av припада W. Скуп свих мултипликатора из V у W обележава се са $M(V \to W)$. Специјално, за $V = W$, пишемо скраћено $M(V) = M(V \to V)$. Норма у $M(V \to W)$ је дефинисана са

$$\|a\|_{M(V\to W)} := \sup\{\|av\|_W : \|v\|_V \leq 1\}.$$

Посматрајмо мултипликаторе из $M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$, $1 \leq p < \infty$, $t \geq s \geq 0$. Навешћемо њихове основне особине.

Лема 1.11. ([23]) *Ако* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$, $t \geq s \geq 0$, *тада*

$$a \in M(W_p^{t-s}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)),$$

$$a \in M(W_p^{t-\sigma}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)), \quad 0 < \sigma < s,$$

$$D^\alpha a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)), \quad |\alpha| \leq s,$$

$$D^\alpha a \in M(W_p^{t-s+|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)), \quad |\alpha| \leq s.$$

Лема 1.12. ([23]) *Ако* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$, $s \geq k$, *за сваки мултииндекс* α, *тада диференцијални оператор*

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.19}$$

дефинише непрекидно пресликавање $M(W_p^s(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$.

Под неким условима, важи и обратно.

Лема 1.13. ([23]) *Нека (1.19) дефинише непрекидно пресликавање из* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *у* $W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ *и нека је* $p(s-k) > n$, $p > 1$. *Тада* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$ *за сваки мултииндекс* α.

Претходна тврђења важе и у просторима Собољева у области. Наиме, ако је Ω Липшицова област у $\mathbb{R}^n$ и a припада $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$, тада постоји продужење $\tilde{a}$ на $\mathbb{R}^n$ које припада простору $M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$. Показује се да важе и следећи резултати.

Лема 1.14. ([23]) *Нека је Ω ограничен Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ и $p > 1$. Ако $a \in W_q^t(\Omega)$, где је*

$$q = p, \quad t = s, \qquad \textit{када је} \quad sp > n,$$

или

$$q \geq n/s, \quad t = s + \varepsilon \notin \mathbb{N}, \quad \varepsilon > 0, \qquad \textit{када је} \quad sp \leq n,$$

тада $a \in M(W_p^s(\Omega))$.

Лема 1.15. *Нека је Ω ограничен Липшицов домен у $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ и $p > 1$. Ако $a \in L_q(\Omega)$, где је*

$$q = p, \qquad \textit{када је} \quad sp > n,$$

$$q > p, \qquad \textit{када је} \quad sp = n, \textit{и}$$

$$q \geq n/s, \qquad \textit{када је} \quad sp < n,$$

тада $a \in M(W_p^s(\Omega) \to L_q(\Omega))$.

1.2.9 Оператори Стеклова

За реалну функцију $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ дефинишимо Стекловљеве операторе усредњења. Нека је h позитивна константа и e_i јединични вектор координатне осе O_{x_i}, $i = 1, 2 \ldots, n$. Означимо

$$T_i^+ f(x) = \int_0^1 f(x + hse_i)\, ds, \quad T_i^- f(x) = \int_{-1}^0 f(x + hse_i)\, ds,$$

$$T_i^2 f = T_i^+(T_i^- f) = \int_{-1}^1 (1 - |s|) f(x + hse_i)\, ds.$$

За ове операторе је познато да повећавају глаткост функције по променљивој по којој се изглађује. Непосредно се показује да они пресликавају парцијалне изводе у количнике разлике

$$T_i^- \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = u_{\bar{x}_i}, \quad T_i^+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = u_{x_i}, \quad T_i^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) = u_{x_i \bar{x}_i}.$$

1.3 Основне особине интеграла и извода разломљеног реда

1.3.1 Специјалне функције

Специјалне функције, као што су гама, бета, Митаг–Лефлерова а затим и Гаусова хипергеометријска и Беселова играју важну улогу у фракционом рачуну. Оне се јављају приликом израчунавања фракционих интеграла неких елементарних функција као и при решавању једначина које у себи садрже фракционе изводе. Овде ћемо навести само дефиниције поменутих функција, док се више о њима може наћи у [26], [43].

Гама функција $\Gamma(z)$ се дефинише преко Ојлеровог интеграла друге врсте

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

који конвергира за све комплексне вредности z за које је $\Re(z) > 0$. Заиста,

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\ln t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \ln t) + i \sin(y \ln t)]\, dt.$$

Израз у загради на десној страни је ограничен за свако t; конвергенција у бесконачности постоји због члана e^{-t}, а за конвергенцију у нули морамо имати $x = \Re(z) > 0$. Ова функција задовољава редукциону формулу

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0,$$

која се може доказати парцијалном интеграцијом. Помоћу ње се гама функција може продужити на леву полураван тј. за вредности $\Re(z) \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, на следећи начин

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \Re(z) > -n,\ n \in \mathbb{N},\ z \notin \mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, \ldots\},$$

где је $(z)_n$ Похамеров симбол за $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ дефинисан са

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)...(z+n-1).$$

Одавде закључујемо да је гама функција аналитичка свуда у комплексној равни $\mathbb{C}$ осим у тачкама $0, -1, -2, ...$ у којима има полове првог реда.

Бета функција $B(z, \omega)$ се дефинише помоћу Ојлеровог интеграла прве врсте

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}\, dt, \quad \Re(z) > 0,\ \Re(\omega) > 0.$$

Веза између гама и бета функција дата је формулом

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$

Митаг–Лефлерова функција једног параметра дефинише се преко степеног реда

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0.$$

Јасно, за $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ добијамо развоје експоненцијалне функције и хиперболичког косинуса

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{z}$$

Двопараметарска Митаг–Лефлерова функција је дефинисана редом

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

За различите вредности параметара α, β одатле добијамо многе добро познате функције, на пример

$$E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{2,1}(z^2) = \cosh z, \quad E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh z}{z}.$$

Гаусова хипергеометријска функција се дефинише у јединичном кругу $|z| < 1$ помоћу суме хипергеометријског реда

$${}_2F_1(a; b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где су $a, b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ параметри. Ред апсолутно конвергира за $|z| < 1$ док за $|z| = 1$ конвергира ако је задовољен услов $\Re(c - a - b) > 0$.

Беселова функција $J_\nu(z)$ се дефинише помоћу хипергеометријске функције

$$ {}_0F_1(c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(c)_k k!} = \lim_{a\to\infty} {}_1F_1\left(a;c;\frac{z}{a}\right), \quad |z| < \infty $$

на следећи начин

$$ J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1;-\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)k!} $$

1.3.2 Риман–Лиувилов извод

Постоји више приступа дефинисању извода и интеграла нецелобројног реда ([4],[41],[42],[43]) али су најзаступљенији Риман–Лиувилов и Капутов приступ. Ако у Кошијевој формули за n-тоструку интеграцију непрекидне функције

$$ \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi, \quad n \in \mathbb{N}, $$

заменимо $n \in \mathbb{N}$ са $\alpha > 0$ и факторијел са Ојлеровом гама функцијом долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 1.12. *Нека је $f \in L_1(a,b)$ и $\alpha > 0$. Тада се леви Риман–Лиувилов интеграл разломљеног реда α, у ознаци $I^\alpha_{a+}f$, дефинише са*

$$ I^\alpha_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a,b], \tag{1.20} $$

док се десни Риман–Лиувилов интеграл разломљеног реда α, у ознаци $I^\alpha_{b-}f$, дефинише са

$$ I^\alpha_{b-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\xi-x)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a,b]. \tag{1.21} $$

За $\alpha = 0$ дефинишемо $I^0_{a+}f = I^0_{b-}f = f$.

У специјалном случају када је $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$, односно $f(x) = (b-x)^{\beta-1}$, $x \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, имамо

$$ I^\alpha_{a+}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0, $$

$$I_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Теорема 1.16. ([26]) *Нека су $\alpha, \beta > 0$ и $f \in L_1(a,b)$. Тада важи*

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x)$$

скоро свуда на $[a,b]$. Специјално, ако је $f \in C([a,b])$ или $\alpha+\beta \geq 1$, онда једнакост важи на целом интервалу $[a,b]$.

Теорема 1.17. ([26],[46]) *Уз услове претходне теореме важи једнакост*

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x).$$

Напомена 1.18. *Из претходне две теореме следи да фамилија оператора*

$$\{I_{a+}^{\alpha} : L_1(a,b) \to L_1(a,b), \alpha > 0\}$$

формира комутативну полугрупу. Идентички оператор I_{a+}^{0} је неутрални елемент ове полугрупе.

Оператори I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α} су ограничени оператори из $L_p(a,b)$ у $L_p(a,b)$ за $p \geq 1$.

Сада уведимо инверзни оператор фракционе интеграције кога називамо фракциони извод или извод разломљеног реда.

Дефиниција 1.13. *Нека је $f \in AC^n([a,b])$ и $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Тада се леви Риман–Лиувилов извод реда α функције f, у ознаци D_{a+}^{α}, дефинише као*

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a,b], \end{aligned}$$

док се десни Риман–Лиувилов извод реда α функције f, у ознаци D_{b-}^{α}, дефинише као

$$\begin{aligned} D_{b-}^{\alpha} f(x) &= (-1)^{[\alpha]+1} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_{b-}^{[\alpha]+1-\alpha} f(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\xi-x)^{n-\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a,b], \end{aligned}$$

где је $[\alpha]$ цео део од α.

Претходна дефиниција дозвољава $\alpha = 0$ што даје $D^0_{a+}f(x) = D^0_{b-}f(x) = f(x)$. Ако функција $f(x)$ има непрекидни $n-$ти извод на $[a,b]$, онда за $\alpha \to n$ или $\alpha \to n-1$, леви (десни) Риман–Лиувилов извод постаје обични извод $n-$тог или $(n-1)-$ог реда функције $f(x)$.

За функције више променљивих парцијални извод разломљеног реда се дефинише аналогно, на пример:

$$D^\alpha_{x,a+}f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\bigg(\int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1}f(\xi,t)\,d\xi\bigg), \;\; x > a,$$

$$D^\beta_{t,c+}f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\frac{d^m}{dt^m}\bigg(\int_c^t (t-\tau)^{m-\beta-1}f(x,\tau)\,d\tau\bigg), \;\; t > c,$$

где је $n-1 < \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$ и $n, m \in \mathbb{N}$.

Лема 1.19. ([4]) *Ако је $f \in AC^n[a,b]$, онда изводи $D^\alpha_{a+}f$ и $D^\alpha_{b-}f$ постоје скоро свуда на $[a,b]$ и важи*

$$D^\alpha_{a+}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\xi)\,d\xi,$$

$$D^\alpha_{b-}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (\xi-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\xi)\,d\xi.$$

У специјалном случају када је $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$, $x > a$, односно $f(x) = (b-x)^{\beta-1}$, $x < b$, имамо

$$D^\alpha_{a+}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1},$$

$$D^\alpha_{b-}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

Из последње две једнакости следи да је извод константе

$$D^\alpha_{a+}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \;\text{ и }\; D^\alpha_{b-}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}.$$

За разлику од оператора интеграције, Риман–Лиувилов оператор диференцирања у општем случају не задовољава својство полугрупе а ни комутативност. Важи следећа теорема.

Теорема 1.20. ([46]) *Нека је $\alpha, \beta \geq 0$, $\varphi \in L_1(a,b)$ и нека је $f = I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi$. Тада* *важи*

$$D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f = D_{a+}^{\alpha+\beta} f.$$

Теорема 1.21. ([46]) *Нека је* $\alpha \geq 0$. *Тада за свако* $f \in L_1(a,b)$ *важи*

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x) \;\; и \;\; D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

скоро свуда на $[a,b]$.

На основу претходне теореме следи да је Риман–Лиувилов извод D_{a+}^{α} (D_{b-}^{α}) леви инверзни оператор за Риман–Лиувилов интеграл $I_{a+}^{\alpha}(I_{b-}^{\alpha})$. У општем случају се не може тврдити да је и десни.

На скупу генералисаних функција из $\mathcal{D}'_+$ интеграли и изводи разломљеног реда се интерпретирају као конволуција

$$I_{0+}^{\alpha} f = f * \psi_{\alpha}, \quad D_{0+}^{\alpha} f = f * \psi_{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где је $\psi_{\alpha} \in \mathcal{D}'_+$ фамилија дистрибуција дефинисана на следећи начин

$$\psi_{\alpha} = \begin{cases} \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, & \alpha > 0 \\ \psi'_{\alpha+1}(x), & \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Прецизније, оператор $A : \mathcal{D}'_+ \to \mathcal{D}'_+$ одређен формулом

$$Af = f * \psi_{\alpha}, \;\; f \in \mathcal{D}'_+,$$

називамо оператором Риман–Лиувила. Он представља оператор диференцирања за $\alpha < 0$, односно оперетор интеграљења за $\alpha > 0$. Фракциони изводи задовољавају полугрупно својство на $\mathcal{D}'_+$.

1.3.3 Капутов извод

Дефиниција фракционог извода Риман–Лиувила игра велику улогу у развоју теорије фракционог рачуна и његове примене. Ипак, та дефиниција носи собом и нека ограничења. Наиме, како се за потребе праксе, рецимо у области механике, долази до диференцијалних једначина са разломљеним изводима, јавља се и потреба за дефинисањем почетних услова за такве једначине. Риман–Лиувилов приступ доводи до почетних услова који садрже граничне вредности Риман–Лиувиловог извода:

$$\lim_{x\to a} D_{a+}^{\alpha-1} f(x) = b_1, \ldots, \lim_{x\to a} D_{a+}^{\alpha-n} f(x) = b_n.$$

Иако се проблеми са оваквом врстом почетних услова могу решити математички, њихова решења су практично бескорисна зато што није позната физичка интерпретација за такву врсту почетних услова. За потребе праксе погоднија је Капутова дефиниција извода разломљеног реда.

Дефиниција 1.14. *Леви Капутов извод разломљеног реда* α, *у ознаци* ${}^C D_{a+}^{\alpha}$, *дефинише се са*

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi)\, d\xi, \quad n-1 \le \alpha < n,\ x \in [a,b],$$

док се десни Капутов извод разломљеног реда α, *у ознаци* ${}^C D_{b-}^{\alpha}$, *дефинише са*

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (\xi-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi)\, d\xi, \quad n-1 \le \alpha < n,\ x \in [a,b].$$

Није тешко видети да је

$${}^C D_{a+}^{\alpha} = I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}, \quad {}^C D_{b-}^{\alpha} = (-1)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{[\alpha]+1-\alpha} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}},$$

где су $I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha}$ и $I_{b-}^{[\alpha]+1-\alpha}$ леви и десни Риман–Лиувилов фракциони интеграл респективно.

За разлику од Риман–Лиувиловог извода, Капутов извод константе је једнак нули

$${}^C D_{a+}^{\alpha} C = 0 \ \text{ и } \ {}^C D_{b-}^{\alpha} C = 0.$$

За $n-1 \le \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, Капутови изводи ${}^C D_{a+}^{\alpha}$ и ${}^C D_{b-}^{\alpha}$ су ограничени оператори који пресликавају $C^n[a,b]$ на

$$C_a = \{f : f \in C[a,b], f(a) = 0\} \ \text{ и } \ C_b = \{f : f \in C[a,b], f(b) = 0\}$$

респективно. У општем случају, Риман–Лиувилов и Капутов извод нису једнаки. За $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ веза између њих је дата са

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+0)\frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}$$

и

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(b-0)\frac{(b-x)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}.$$

1.4 Појам диференцијске схеме

Нека се у области Ω променљивих $x_1, x_2, ..., x_n$ тражи решење u линеарне парцијалне диференцијалне једначине

$$Lu(x) = f(x), \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \tag{1.22}$$

које на граници Γ области Ω задовољава гранични услов

$$lu(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \tag{1.23}$$

Да би се задатак $(1.22)-(1.23)$ решио, изврши се његова дискретизација. Област $\bar{\Omega} = \Omega\cup\Gamma$ се замени скупом дискретних тачака (чворова) $\bar{\Omega}_h$, који називамо мрежом. Код мреже разликујемо скуп унутрашњих чворова Ω_h и скуп граничних чворова $\Gamma_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Густину распореда чворова карактеришемо параметром $h>0$ (обично је то корак мреже или велична која од њега зависи). Уколико изводе који се јављају у $(1.22)-(1.23)$ заменимо количницима разлика функције у чворовима добијемо апроксимациони задатак

$$L_h v_h(x) = f_h(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{1.24}$$

$$l_h v_h(x) = g_h(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{1.25}$$

Дискретан задатак $(1.24)-(1.25)$ представља систем алгебарских једначина и назива се диференцијском схемом задатка $(1.22)-(1.23)$.

У скупове функција дефинисаних на $\bar{\Omega}_h$, Ω_h и Γ_h уведимо редом норме $\|\cdot\|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{2,h}$ и $\|\cdot\|_{3,h}$. Са u_h означимо пројекцију решења $u=u(x)$ задатка $(1.22)-(1.23)$ на простор функција дефинсаних на $\bar{\Omega}_h$. Грешку схеме означимо са $z_h = v_h - u_h$. Ако су оператори L_h и l_h линеарни тада z_h

задовољава услове

$$L_h z_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in \Omega_h,$$

$$l_h z_h(x) = \psi_h(x), \quad x \in \Gamma_h,$$

где је $\varphi_h(x) = L_h u(x) - f_h(x)$, $x \in \Omega_h$ и $\psi_h(x) = l_h u(x) - g_h(x)$, $x \in \Gamma_h$. За диференцијску схему (1.24)$-$(1.25) кажемо да апроксимира задатак (1.22)$-$(1.23) ако $\|\varphi_h\|_{2,h} \to 0$ и $\|\psi_h\|_{3,h} \to 0$ када $|h| \to 0$. Диференцијска схема конвергира брзином $O(|h|^k)$ ако је $\|v_h - u_h\|_{1,h} = O(|h|^k)$. За диференцијску схему се уводе појмови стабилности и коректности. Схема је стабилна ако за довољно мало h њено решење v_h непрекидно зависи од улазних података f_h и g_h, односно ако постоје константе M_1 и M_2 које не зависе од h, f_h и g_h, такве да је

$$\|v_h\|_{1,h} \leq M_1 \|f_h\|_{2,h} + M_2 \|g_h\|_{3,h}. \tag{1.26}$$

Неједнакости облика (1.26) називамо априорним оценама за схему (1.24)$-$(1.25).

Ако је схема стабилна и за $|h| \leq h_0$ једнозначно решива при произвољним улазним подацима f_h и g_h кажемо да је она коректна.

Диференцијска схема се обично своди на систем линеарних једначина с великим бројем непознатих па је важно да она буде економична, односно да апроксимира полазни задатак са датом тачношћу и да се њено решење добија са минималним бројем аритметичких операција.

Појам мреже и оператора коначних разлика биће уведен при апроксимацији конкретног задатка.

2 Једначина субдифузије

2.1 Физички смисао

Изводи разломљеног реда се јављају при моделирању различитих појава у разним областима науке. Једначинама са таквим изводима описују се бројни задаци у оквиру класичне механике, хидродинамике, нанофизике, електротехнике, хемије и других наука ([4],[6],[9],[42],[43],[51]). У литератури се често наилази на једначине које описују вискоеластична својства материјала и процес дифузије честица ([7],[10],[39]) а у скорије време популарна је примена у описивању вискоеластичности ткива плућа ([19]) и конструкцији фракционог модела средњег уха или људског зуба.

Као први пример примене фракционих оператора можемо навести Абелову једначину ([43]). Абел се бавио проблемом одређивања облика криве такве да је време спуштања тела занемарљиве масе низ ту криву, без трења, под утицајем гравитације независно од почетног положаја тела. Интегрална једначина

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt = f(t), \quad t>0,$$

где је $0<\alpha<1$, назива се општа Абелова једначина. Њено решење је дато формулом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dt, \quad t>0,$$

које се чешће пише у обрнутом поретку

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dt = \varphi(x), \quad t>0.$$

У ознакама фракционог рачуна последње две једначине су редом облика

$$I^{\alpha}_{t,0+}\varphi(t) = f(t), \quad t>0, \quad D^{\alpha}_{t,0+}f(t) = \varphi(t), \quad t>0.$$

Други пример се односи на кретање честица. Нормална или обична дифузија је процес ширења честица унутар гаса или течности. Назива се још и Гаусова дифузија и карактеришу је кретање честица из области више концентрације ка области ниже концентрације. Такав систем је близак равнотежном стању. Једначина која описује једнодимензионо Брауново случајно кретање тест честице која из позиције j насумично прелази на најближу суседну позицију, односно $j-1$ или $j+1$ у дискретној временској јединици Δt, дата је са

$$W_j(t+\Delta t) = \frac{1}{2}W_{j-1}(t) + \frac{1}{2}W_{j+1}(t).$$

Ова једначина дефинише функцију густине вероватноће. Коефицијент $\frac{1}{2}$ говори да је кретање честице изотропно, тј.вероватноћа да се она помери лево или десно је $\frac{1}{2}$. Користећи Тејлоров развој, за $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ добијамо

$$W_j(t+\Delta t) = W_j(t) + \Delta t \frac{\partial W_j}{\partial t} + O((\Delta t)^2),$$

$$W_{j\pm 1}(t) = W_j(x,t) \pm \Delta x \frac{\partial W_j}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3),$$

што доводи до обичне једначине дифузије

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t), \quad K_1 = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} < \infty.$$

Инспирисани том формулом, дефинишимо стандардни Кошијев проблем за једначину дифузије на начин који је показан у [38], односно

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{2.1}$$

са почетним условом $u(x,0^+) = u_0(x)$. Познато је да је фундаментално решење тог проблема (или Гринова функција), за почетни услов $u_0(x) = \delta(x)$ који се своди на хомогени услов када $|x| \to \infty$, Гаусова функција густине вероватноће (енг. probability density function, pdf)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)},$$

чија варијанса, односно други централни моменат расте линеарно,

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x,t)\, dx = 2t,$$

па за обичну дифузију важи да је асимптотско средње-квадратно премештање честица линеарна функција времена. Међутим, у одређеним системима не важи описано понашање и они су далеко од стања равнотеже, а дифузија је или спора или брза. Такво одступање од обичне дифузије се зове аномална дифузија ([39]).

Гринова функција $u(x,t)$ може се записати у облику

$$u(x,t) = t^{-1/2}U(x/t^{1/2}) \quad \text{где је} \quad U(x) := u(x,1).$$

Функција $U(x)$ се зове редукована Гринова функција и зависи од сложене променљиве $X := x/t^{1/2}$. Сада се, користећи алат фракционог рачуна, може генерализовати Кошијев проблем у циљу добијања разломљене по времену једначине дифузије. Нека је $0 < \alpha < 1$. Следећа два проблема

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{t+}^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_0^+; \quad u(x,0^+) = u_0(x),$$

$${}^C D_{t+}^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_0^+; \quad u(x,0^+) = u_0(x), \tag{2.2}$$

где су $D_{t+}^{1-\alpha}$ и ${}^C D_{t+}^{\alpha}$ Риман–Лиувилов и Капутов извод, редом, су еквивалентна. Фундаментално решење (2.2) са $u_0(x) = \delta(x)$ може се добити применом Фуријеове и Лапласове трансформације узастопно, те њиховим инвертовањем што је показано у [16],[37],[38]. Тако се долази до закључка да

$$u(x,t) = t^{-\alpha/2}U(|x|/t^{\alpha/2}), \quad U(x) \sim Ax^a e^{-bx^c},\ |x| \to \infty$$

где су A, a, b, и c израчунљиве константе које зависе од α. Овде је варијанса

$$\sigma^2(t) = \frac{2t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

па за $\alpha < 1$ добијамо суб-линеаран раст по времену. Процеси за које важи та карактеристика називају се субдифузионим, а сам задатак (2.2) представља почетни проблем за једначину субдифузије (енг. Initial Value Problem).

Предмет нашег изучавања биће почетно-гранични проблем (енг. Initial - Boundary Value Problem) за дводимензиону једначину субдифузије и њена апроксимација методом коначних разлика.

2.2 Специфични простори Собољева за једначину суб-дифузије

Овде ћемо се упознати са новим функционалним просторима које ћемо надаље користити. Дефинисаћемо полунорме и норме у њима и уочити везу која постоји између простора дефинисаних помоћу Риман–Лиувиловог извода и простора Собољева разломљеног реда на ограниченом домену.

Дефиниција 2.1. *Нека је $\alpha > 0$. Дефинишимо полунорме*

$$|u|_{C^\alpha_+[a,b]} = \left\|D^\alpha_{a+}u\right\|_{C[a,b]}, \quad |u|_{C^\alpha_-[a,b]} = \left\|D^\alpha_{b-}u\right\|_{C[a,b]},$$

$$|u|_{H^\alpha_+(a,b)} = \left\|D^\alpha_{a+}u\right\|_{L_2(a,b)}, \quad |u|_{H^\alpha_-(a,b)} = \left\|D^\alpha_{b-}u\right\|_{L_2(a,b)},$$

и норме

$$\|u\|_{C^\alpha_\pm[a,b]} = \left(\|u\|^2_{C^{\lfloor\alpha\rfloor}[a,b]} + |u|^2_{C^\alpha_\pm[a,b]}\right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{H^\alpha_\pm(a,b)} = \left(\|u\|^2_{H^{\lfloor\alpha\rfloor}(a,b)} + |u|^2_{H^\alpha_\pm(a,b)}\right)^{1/2}.$$

Простор функција са коначном нормом $\|\cdot\|_{C^\alpha_+[a,b]}$ ($\|\cdot\|_{C^\alpha_-[a,b]}$), означимо са $C^\alpha_+[a,b]$ ($C^\alpha_-[a,b]$). Са $H^\alpha_+(a,b)$ ($H^\alpha_-(a,b)$) означимо простор функција са коначном нормом $\|\cdot\|_{H^\alpha_+(a,b)}$ ($\|\cdot\|_{H^\alpha_-(a,b)}$). Са $\dot{H}^\alpha_+(a,b)$ ($\dot{H}^\alpha_-(a,b)$) означимо затворење скупа $\dot{C}^\infty(a,b)$ у норми $\|\cdot\|_{H^\alpha_+(a,b)}$ ($\|\cdot\|_{H^\alpha_+(a,b)}$).

Дефиниција 2.2. *Нека је $\alpha > 0$, $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Дефинишимо полунорму*

$$|u|_{H^\alpha_c(a,b)} = \left|\left(D^\alpha_{a+}u, D^\alpha_{b-}u\right)_{L_2(a,b)}\right|^{1/2}$$

и норму

$$\|u\|_{H^\alpha_c(a,b)} = \left(\|u\|^2_{H^{\lfloor\alpha\rfloor}(a,b)} + |u|_{H^\alpha_c(a,b)}\right)^{1/2}.$$

Са $\dot{H}^\alpha_c(a,b)$ означимо затворење скупа $\dot{C}^\infty(a,b)$ у норми $\|\cdot\|_{H^\alpha_c(a,b)}$.

Дефиниција 2.3. *За два или више простора кажемо да су еквивалентни ако имају еквивалентне полунорме и норме.*

Теорема 2.1. ([30]) *Нека је $\alpha > 0$, $\alpha \neq n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тада су простори $\dot{H}^\alpha_-(a,b)$, $\dot{H}^\alpha_+(a,b)$, $\dot{H}^\alpha_c(a,b)$ и $\dot{H}^\alpha(a,b)$ еквивалентни.*

За испитивање егзистенције слабих решења једначина са фракционим операторима, неопходна су следећа тврђења за оперисање са њима.

Лема 2.2. ([15],[24]) *Нека је* $\alpha > 0$, $u \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *и* $\operatorname{supp} u \in (a,b)$. *За реалну функцију* $u(x)$ *важи*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}u, D_{b-}^{\alpha}u\right)_{L_2(a,b)} = \cos(\pi\alpha)\left\|D_{a+}^{\alpha}u\right\|_{L_2(a,+\infty)}^2.$$

Из ове леме се непосредно добија следећа

Последица 2.3. *За* $\alpha = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *важи* $(D_{a+}^{\alpha}u, D_{b-}^{\alpha})_{L_2(a,b)} = 0$. *На пример,* $(D_{a+}^{1/2}u, D_{b-}^{1/2}u)_{L_2(a,b)} = (u', u)_{L_2(a,b)} = 0$.

Лема 2.4. ([24],[30],[33]) *Нека је* $0 < \alpha < 1$, $u \in H_{+}^{\alpha}(a,b)$, $v \in H_{-}^{\alpha}(a,b)$. *Тада*

$$(D_{a+}^{\alpha}u, v)_{L_2(a,b)} = (u, D_{b-}^{\alpha}v)_{L_2(a,b)}.$$

Лема 2.5. ([30]) *Нека је* $0 < \alpha < 1$, $u \in H_{+}^{\alpha}(a,b)$, $v \in H_{-}^{\alpha/2}(a,b)$. *Тада*

$$(D_{a+}^{\alpha}u, v)_{L_2(a,b)} = (D_{a+}^{\alpha/2}u, D_{b-}^{\alpha/2}v)_{L_2(a,b)}.$$

Нека је $A_0^{\alpha}[a,b]$ скуп свх функција $u(x)$ које на $[a,b]$ имају апсолутно непрекидан интеграл реда $1-\alpha$ са почетком у a и крајем у x који је једнак нули за $x = a$. Важи следећа

Теорема 2.6. ([42]) *За* $0 \le \alpha < 1$ *и било коју функцију* $u \in A_0^{\alpha}[a,b]$ *важи*

$$(u, D_{a+}^{\alpha}u) \ge 0 \quad \text{и} \quad (u, D_{a+}^{\alpha}u) = 0 \quad \text{ако и само ако} \quad u = 0.$$

Позитивност оператора фракционог диференцирања омогућава да се добију априорне оцене за решења велике класе граничних проблема.

2.3 Формулација проблема

У даљем раду ћемо, за $0 < \alpha < 1$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и $Q = \Omega \times (0,T)$, разматрати једначину

$$D_{t,0+}^{\alpha}u - \Delta u = f(x,t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

где је $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Једначини придружујемо гранични

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2.4}$$

и почетни услов

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{2.5}$$

Осим ове, биће разматрана и нешто општија једначина са променљивим коефицијентима

$$D^{\alpha}_{t,0+}u + \mathcal{L}u = f(x,t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2.6}$$

са истим почетно-граничним условима (2.4), (2.5), где је

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au.$$

Претпостављамо да коефицијенти диференцијалног оператора $\mathcal{L}u$ задовољавају стандардне услове елиптичности

$$\begin{gathered} a_{ij},\, a \in L_\infty(\Omega), \qquad a \geq 0, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \\ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad c_0 > 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

У класичној теорији се тражи решење u која задовољава (2.3) – (2.5) и припада простору $W_t^1((0,T), C(\Omega)) \cap C([0,T], C^2(\Omega))$ где је $W_t^1(0,T) = \{u : u \in C^1(0,T], u' \in L_1(0,T)\}$ ([36],[34],[35]). Ако класично решење постоји онда $f \in C(\bar{Q})$. Међутим, оваква формулација не може да задовољи захтеве праксе јер улазни подаци најчешће нису непрекидне функције. Да бисмо се ослободили јаких ограничења класичне теорије и радили са једначинама у којима су дате функције мање глаткости, уместо класичног решења, тражимо слабо решење проблема. То је генерализација појма решења у смислу да су захтеви на глаткост функције u ослабљени. Тако, у случају да су улазни подаци сумабилне функције, решење тражимо у специјалним просторима собољевског типа. Дефинишимо анизотропни простор Собољева на уобичајени начин ([32])

$$H^{\alpha,\beta}(Q) = L_2((0,T), H^\alpha(\Omega)) \cap H^\beta((0,T), L_2(\Omega)) \tag{2.8}$$

са нормом

$$\|u\|_{H^{\alpha,\beta}(Q)} = \left(\|u\|^2_{L_2((0,T),H^\alpha(\Omega))} + \|u\|^2_{H^\beta((0,T),L_2(\Omega))}\right)^{1/2}. \tag{2.9}$$

Аналогно, дефинишимо и

$$H_{\pm}^{\alpha,\beta}(Q) = L_2((0,T), H^{\alpha}(\Omega)) \cap H_{\pm}^{\beta}((0,T), L_2(\Omega)).$$

Како је, за $0 \le \beta < 1/2$, $\dot{H}^{\beta}(\Omega) = H^{\beta}(\Omega)$, приметимо да тада важи и

$$H_{+}^{\alpha,\beta}(Q) = H_{-}^{\alpha,\beta}(Q) = H^{\alpha,\beta}(Q).$$

Претпоставимо да је $f \in L_2(Q)$. Ако помножимо (2.6) са тест функцијом v, интегралимо по области Ω и применимо парцијалну интеграцију, добијамо

$$\left(D_{t,0+}^{\alpha} u, v\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)} + (au, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Ако применимо лему 2.5 и добијену једнакост интегралимо по t од 0 до T можемо увести следећу слабу форму разматраног проблема: Наћи $u \in \dot{H}^{1,\alpha/2}(\Omega)$ тако да

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \dot{H}^{1,\alpha/2}(\Omega), \tag{2.10}$$

где је

$$a(u, v) = \left(D_{t,0+}^{\alpha/2} u, D_{t,T-}^{\alpha/2} v\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(Q)} + (au, v)_{L_2(Q)}$$

билинеарни функционал на $\dot{H}^{1,\alpha/2}(\Omega) \times \dot{H}^{1,\alpha/2}(\Omega)$ и

$$l(v) = (f, v)_{L_2(Q)}$$

линеарни функционал на $\dot{H}^{1,\alpha/2}(\Omega)$.

Теорема 2.7. *Нека је $0 < \alpha < 1$, $f \in L_2(Q)$ и нека важе услови (2.7). Тада је проблем (2.6) са условима (2.4), (2.5), коректно постављен у $\dot{H}^{1,\alpha/2}(Q)$ и његово решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|u\|_{H^{1,\alpha/2}(Q)} \le C \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{2.11}$$

Доказ. Користећи неједнакост Коши–Шварца показује се ограниченост функционала $a(u, v)$, а уз помоћ лема 2.1, 2.2 и неједнакости (1.13) коерцивност, односно

$$a(u,u) \geq c\|u\|^2_{H^{1,\alpha/2}(Q)} \tag{2.12}$$

Функционал $l(v)$ је очигледно ограничен. Тиме су испуњени услови за примену леме 1.1, па постоји јединствено слабо решење $u \in \dot{H}^{1,\alpha/2}(Q)$. Оцена стабилности (2.11) се добија за $v = u$ у (2.10) уз примену неједнакости Коши–Шварца не десној страни и неједнакости (2.12). □

За елемент u простора $\dot{H}^{\alpha/2}((0,T), L_2(\Omega))$ важи неједнакост ([32])

$$\int_0^T (T-t)^{-\alpha} \|u(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt < C\|u\|^2_{H^{\alpha/2}((0,T),L_2(\Omega))},$$

те се може дефинисати и следећа норма

$$\|u\|^2_{B^{1,\alpha/2}(Q)} = \int_0^T \Big[(T-t)^{-\alpha}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}\Big]\, dt, \tag{2.13}$$

која је слабија од норме $\|\cdot\|_{H^{1,\alpha/2}(\Omega)}$. Због тога је директна последица претходне теореме и следећа априорна оцена

$$\|u\|_{B^{1,\alpha/2}(Q)} \leq C\|f\|_{L^2(Q)}.$$

Под нешто јачим условима може се показати да проблем (2.6), (2.4), (2.5) има и јако решење, тј. решење које припада простору $H^{2,\alpha}_+$.

Теорема 2.8. *Нека важе претпоставке теореме 2.7 и нека $a_{ij} \in W^1_\infty(\Omega)$. Тада решење проблема (2.6), (2.4), (2.5), припада простору $H^{2,\alpha}_+(Q) \cap \dot{H}^{1,\alpha/2}(Q)$ и важи следећа априорна оцена*

$$\|u\|_{H^{2,\alpha}_+(Q)} \leq C\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Доказ. Множећи једначину (2.6) са $\mathcal{L}u$ и интегрирајући по области Q добијамо

$$(D^\alpha_{t,0+}u, \mathcal{L}u)_{L_2(Q)} + (\mathcal{L}u, \mathcal{L}u) = (f, \mathcal{L}u)_{L_2(Q)}. \tag{2.14}$$

Даље је

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{L}u)_{L_2(Q)} = \|\mathcal{L}u\|^2_{L_2(Q)} \qquad \text{и} \qquad (f, \mathcal{L}u)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\|\mathcal{L}u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Докажимо још да је први сабирак у једнакости (2.14) позитиван. Користећи чињеницу да је оператор $\mathcal{L}$ самоконјугован и позитивно дефинитан, важи следеће

$$
\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{t,0+}u, \mathcal{L}u)_{L_2(Q)} &= \int_0^T (D^{\alpha}_{t,0+}u(\cdot,t), \mathcal{L}u(\cdot,t))_{L_2(Q)}\, dt \\
= \int_0^T (D^{\alpha}_{t,0+}u(\cdot,t), u(\cdot,t))_{\mathcal{L}}\, dt &= \int_0^T \left(D^{\alpha/2}_{t,0+}u(\cdot,t), D^{\alpha/2}_{t,T-}u(\cdot,t)\right)_{\mathcal{L}} dt \\
= \cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty} \left\|D^{\alpha/2}_{t,0+}u(\cdot,t)\right\|^2_{\mathcal{L}} dt &\geq \cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^T \left\|D^{\alpha/2}_{t,0+}u(\cdot,t)\right\|^2_{\mathcal{L}} dt \\
\geq c_0 \cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^T \left\|D^{\alpha/2}_{t,0+}u(\cdot,t)\right\|^2_{H^1(\Omega)} dt &\geq 0,
\end{aligned}
$$

где je $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ енергетски скаларни производ. Слично, множећи једначину (2.6) са $D^{\alpha}_{0,+}u$ и интегрирајући по области Q, добијамо

$$
(D^{\alpha}_{t,0+}u, D^{\alpha}_{t,0+}u)_{L_2(Q)} + (D^{\alpha}_{t,0+}u, \mathcal{L}u) = (D^{\alpha}_{t,0+}u, f)_{L_2(Q)}. \tag{2.15}
$$

Даље je

$$
(D^{\alpha}_{t,0+}u, D^{\alpha}_{t,0+}u)_{L_2(Q)} = \|D^{\alpha}_{t,0+}u\|^2_{L_2(Q)} \text{ и } (D^{\alpha}_{t,0+}u, f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\|D^{\alpha}_{t,0+}u\|^2_{L_2(Q)}.
$$

Пошто смо за други члан у једнакости (2.15) показали да je позитиван, тако добијамо

$$
\|D^{\alpha}_{t,0+}u\|^2_{L_2(Q)} + \|\mathcal{L}u\|^2_{L_2(Q)} \leq 2\|f\|^2_{L_2(Q)}.
$$

Коначан резултат добијамо користећи тзв. другу основну неједнакост ([28])

$$
\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right),
$$

из које следи еквивалентност норми $\|\mathcal{L}u\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|u\|_{H^2(Q)}$. □

3 Апроксимација методом коначних разлика

У овом поглављу поставићемо диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије засноване на методи коначних разлика које су већ сретане у литератури ([2],[3],[13],[29],[54]). Најпре ћемо посматрати једнодимензиону једначину за коју имплицитна схема и схема са тежином, слично као у случају параболичких једначина, имају добре особине. Показаћемо стабилност и коректност тих схема у одговарајућим нормама и одредити им брзину конвергенције у истим. Приликом дискретизације граничних проблема за једначину субдифузије добија се систем са великим бројем непознатих. Матрице таквих система имају посебну структуру. На пример, ако поставимо имплицитну схему у једнодимензионом случају, добије се систем са тродијагоналном матрицом. Такав систем једначина се лако решава и број аритметичких операција је пропорционалан броју непознатих. За схеме које имају ту особину лаке решивости, кажемо да су економичне. Овај резултат се не може директно пренети за вишедимензиони случај, те настаје проблем како да се конструише економична схема. У ту сврху, развијене су тзв. схеме променљивих праваца ([21],[45]). Оне редукују вишедимензионе проблеме на низ једнодимензионих. Постоје две класе економичних схема које су значајне: адитивне и факторизоване схеме. Али, о њима ће бити речи у наредном поглављу.

Аналитичко решење једначине субдифузије може се наћи у [37],[47]. Постоји више нумеричких метода развијених за поменуту једначину. Често се заснивају на методи коначних разлика. Лин, Ли и Ксу ([31]) су предложили апроксимацију базирану на методи коначних разлика по временској променљивој и Лагранжевој спектралној методи по просторној. Ли и Ксу ([30]) су користили спектралну методу по обе променљиве. Зуанг ([54]) је предложио имплицитну схему и проучио њену стабилност и конвергенцију. Чен је показао да је експлицитна схема, као и у параболичким проблемима, условно стабилна, док је имплицитна безусловно стабилна ([11]). Посебно су значајни радови Алиханова, који је за једнодимензиону једначину субдифузије предложио схему са тежином ([1], [2], [3]).

За разлику од горе поменутих аутора који су оцене стабилности и брзине конвергенције добијали под претпоставком да је функција довољно глатка, овде ће бити циљ што више смањити услов на глаткост решења.

Извод разломљеног реда по времену главна је разлика између класичне параболичке једначине и једначине субдифузије. Покажимо како се Риман–Лиувилов извод апроксимира у дискретном случају.

Нека је $\bar{\Omega} = [0,1]$ и $\bar{Q} = \Omega \times [0,T]$. Дефинишимо равномерну мрежу $\bar{Q}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ где је $\bar{\omega}_h = \{x = ih : i = 0,1,...,N; h = 1/N\}$ и $\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau : k = 0,1,...,M; \tau = T/M\}$. Скуп чворова мреже за које је $t_j = const$ називаћемо временски слој. Уведимо такође мреже $\omega_h = \bar{\omega}_h \cap \Omega$, $\omega_h^- = \bar{\omega}_h \cap [0,1)$, $\omega_h^+ = \bar{\omega}_h \cap (0,1]$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T)$, $\omega_\tau^- = \bar{\omega}_\tau \cap [0,T)$, $\omega_\tau^+ = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T]$ и $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$. Користићемо стандардне ознаке

$$v = v(x,t), \quad \hat{v} = v(x,t+\tau), \quad \check{v} = v(x,t-\tau)$$

$$v_i = v(x_i,t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \qquad v^k = v(x,t_k), \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

Леви Капутов извод разломљеног реда α, $0 < \alpha < 1$, на мрежи $\bar{\Omega}_{h\tau}$ апроксимирамо на следећи начин

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha_{t,0+,\tau} u(x,t_k) = {}^C D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} (t_k - t)^{-\alpha}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} (t_k - t)^{-\alpha}\, dt \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{u^{l+1} - u^l}{\tau} \int_{t_l}^{t_{l+1}} (t_k - t)^{-\alpha}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^{k-1} u_t \big[(t_k - t_l)^{1-\alpha} - (t_k - t_{l+1})^{1-\alpha}\big] \\
= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^{k-1} u_t \big[(k-l)^{1-\alpha} - (k-l-1)^{1-\alpha}\big] &= \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l} u_t, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

где је

$$a_{k-l} = (k-l)^{1-\alpha} - (k-l-1)^{1-\alpha}, \quad 0 \le l < k \le M.$$

Коефицијенти a_{k-l} су строго опадајући и важи $1 = a_1 > a_2 > \ldots > a_M > 0$. Како за $0 < \alpha < 1$ важи релација

$$D^\alpha_{0+} u(x,t) = {}^C D^\alpha_{0+} u(x,t) + \frac{u(x,0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha},$$

следи да су, за функцију u која задовољава хомеген почетни услов ($u(x,0)=0$), Риман–Лиувилов и Капутов извод једнаки. Леви Риман –Лиувилов извод се тада такође апроксимира формулом (3.1). Приметимо да је репрезентација иста и у случају да функција u зависи и од две или више просторних променљивих. Из (3.1) следи и да ће апроксимација нашег задатка на $k-$том слоју садржати вредности тражене функције са свих претходних временских слојева. То је последица нелокалног карактера оператора фракционог диференцирања.

Осим формуле (3.1) често се користи и следећа репрезентација дискретизованог разломљеног извода

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{l=0}^{k-1} a_{k-l}\left(u^{l+1}-u^l\right) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{l=0}^{k-1}\left(a_{k-l}u^{l+1}-a_{k-l}u^l\right)\\
&= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left(u^k+\sum_{l=0}^{k-2}a_{k-l}u^{l+1}-\sum_{l=1}^{k-1}a_{k-l}u^l-\left(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}\right)u^0\right)\\
&= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg(u^k+\sum_{l=1}^{k-1}\Big[(k-l+1)^{1-\alpha}-(k-l)^{1-\alpha}-\Big((k-l)^{1-\alpha}-(k-l-1)^{1-\alpha}\Big)\Big]u^l\\
&\quad -\left(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}\right)u^0\Bigg) = \frac{1}{\tau\Gamma(1-\alpha)}\left(b_0u^k+\sum_{l=1}^{k-1}[b_{k-l}-b_{k-l-1}]u^l-b_{k-1}u^0\right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где је

$$b_{k-l}=\int_{t_{k-l}}^{t_{k-l+1}}\frac{dt}{t^{\alpha}}=\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left((k-l+1)^{1-\alpha}-(k-l)^{1-\alpha}\right)=\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}a_{k-l+1}.$$

Следеће тврђење кинеског математичара Суна игра кључну улогу у оцени брзине конвергенције диференцијских схема које су предложене од стране већине аутора за решавање таласно-дифузионих једначина. За функцију која је два пута непрекидно диференцијабилна, тачност апроксимације Риман–Лиувиловог извода формулом (3.1) или формулом (3.2) је реда $O(\tau^{2-\alpha})$. Једноставности ради, претпоставимо да функција u зависи само од једне, временске променљиве. Важи следећа лема.

Лема 3.1. ([49]) *Нека је* $0<\alpha<1$ *и нека* $u\in C^2[0,t_k]$, $t_k\in\omega_\tau^+$. *Тада*

$$\left|D^{\alpha}_{t,0+}u-D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k\right|\le\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{12}+\frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha}-(1+2^{-\alpha})\right]\max_{0\le t\le t_k}|u''(t)|\,\tau^{2-\alpha}.$$

Доказ. Како је

$$\left|D^{\alpha}_{t,0+}u - D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k\right| =$$
$$\Gamma(1-\alpha)\left|\int_0^{t_k} u'(t)\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}} - \frac{1}{\tau}\left(b_0u^k - \sum_{l=1}^{k-1}\left[b_{k-l}-b_{k-l-1}\right]u^l - b_{k-1}u^0\right)\right|,$$

и како је

$$\sum_{l=1}^{k}\frac{u(t_l)-u(t_{l-1})}{\tau}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}} = \sum_{l=1}^{k}\frac{u(t_l)-u(t_{l-1})}{\tau}\frac{1}{1-\alpha}\left[(t_{k-l+1})^{1-\alpha}-(t_{k-l})^{1-\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_{l=1}^{k}b_{k-l}\big(u(t_l)-u(t_{l-1})\big) = \frac{1}{\tau}\left(b_0u^k - \sum_{l=1}^{k-1}[b_{k-l}-b_{k-l-1}]u^l - b_{k-1}u^0\right),$$

довољно је да оценимо израз

$$\int_0^{t_k}u'(t)\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}} - \sum_{l=1}^{k}\frac{u(t_l)-u(t_{l-1})}{\tau}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}} \equiv A.$$

Користећи Тејлоров разој функције са остатком у интегралном облику добијамо

$$u'(t) - \frac{u(t_l)-u(t_{l-1})}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left[\int_{t_{l-1}}^{t}u''(s)(s-t_{l-1})ds - \int_t^{t_l}u''(s)(t_l-s)ds\right],$$

па имамо

$$A = \sum_{l=1}^{k}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left[u'(t) - \frac{u(t_l)-u(t_{l-1})}{\tau}\right]\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{\tau}\sum_{l=1}^{k}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left[\int_{t_{l-1}}^{t}u''(s)(s-t_{l-1})ds - \int_t^{t_l}u''(s)(t_l-s)ds\right]\frac{dt}{(t_k-t)^{\alpha}}.$$

Мењајући поредак интеграције лако се добија да важи

$$A = \frac{1}{1-\alpha}\sum_{l=1}^{k}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\Bigg\{(t_k-s)^{1-\alpha}$$
$$- \left[\frac{s-t_{l-1}}{\tau}(t_k-t_l)^{1-\alpha} + \frac{t_l-s}{\tau}(t_k-t_{l-1})^{1-\alpha}\right]\Bigg\}u''(s)ds.$$

Ако искористимо оцену ([49])

$$\sum_{l=1}^{k}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left\{(t_k-s)^{1-\alpha}-\left[\frac{s-t_{l-1}}{\tau}(t_k-t_l)^{1-\alpha}+\frac{t_l-s}{\tau}(t_k-t_{l-1})^{1-\alpha}\right]\right\}ds$$

$$\leq\left[\frac{1-\alpha}{12}+\frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha}-(1+2^{-\alpha})\right]\tau^{2-\alpha},$$

тражена неједнакост је очигледна. □

Напоменимо да се тврђење лако преноси на случај кад функција u зависи и од једне или више просторних променљивих. Са десне стране би се уместо максимума другог извода појавио максимум другог парцијалног извода по t на одговарајућем домену.

3.1 Неке важне леме

Приликом испитивања стабилности диференцијских схема врше се одговарајуће процене и користе разне неједнакости. У следећих неколико лема, на које ћемо се касније често позивати, изложене су неке релације које задовољава дискретизовани фракциони извод.

Лема 3.2. ([13]) *За било коју функцију $v(t)$ дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ такву да је $v(0)=0$, важи следећа једнакост*

$$\tau\sum_{k=1}^{M}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}(v^2)\right)^k=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{M}\left(t_{M-k+1}^{1-\alpha}-t_{M-k}^{1-\alpha}\right)\left(v^k\right)^2. \tag{3.3}$$

Лема 3.3. ([3]) *За било коју функцију $v(t)$ дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ важе следеће неједнакости*

$$v^kD_{t,0+,\tau}^{\alpha}v^k\geq\frac{1}{2}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}(v)^2\right)^k+\frac{\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}{2}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v^k\right)^2, \tag{3.4}$$

$$v^{k-1}D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v^k\geq\frac{1}{2}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}(v)^2\right)^k-\frac{\tau^\alpha\Gamma(2-\alpha)}{2(2-2^{1-\alpha})}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v^k\right)^2. \tag{3.5}$$

Лема 3.4. ([3],[13]) *За $0<\alpha<1$ и било коју функцију $v(t)$ дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ важи следећа једнакост*

$$v^k(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v)^k=\frac{1}{2}\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha}(v^2)\right)^k+\frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\left[\sum_{l=1}^{k-1}\left(a_{k-l+1}^{-1}-a_{k-l}^{-1}\right)(w_k^l)^2+a_1^{-1}(w_k^k)^2\right] \tag{3.6}$$

где је $a_l = l^{1-\alpha} - (l-1)^{1-\alpha}$ *и* $w_k^l = \tau \sum_{s=0}^{l-1} a_{k-s}\, v_t^s, \quad l = 1, 2, \ldots, k.$

Лема 3.5. ([18]) *За* $0 < \alpha < 1$ *и било коју функцију* $v(t)$ *дефинисану на мрежи* $\bar{\omega}_\tau$ *важи следећа једнакост*

$$v^k (D^\alpha_{t,0+,\tau} v)^k \geq \frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2) \right)^k + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)} \left(v_t^{k-1} \right)^2. \tag{3.7}$$

Доказ. Пошто је $a^{-1}_{l+1} > a^{-1}_l$, сабирци у суми на десној страни (3.6) су позитивни па за $l = k-1$ и $k \geq 2$ добијамо

$$\begin{aligned}
& v^k (D^\alpha_{t,0+,\tau} v)^k - \frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2) \right)^k \geq \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\left(a_2^{-1} - a_1^{-1} \right) (w_k^{k-1})^2 + a_1^{-1} (w_k^k)^2 \right] \\
& = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\Big((2^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha})^{-1} - 1 \Big) (w_k^{k-1})^2 + \Big(\tau \sum_{s=0}^{k-1} a_{k-s} v_t^s \Big)^2 \right] \\
& = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\Big(\frac{1}{2^{1-\alpha} - 1} - 1 \Big) (w_k^{k-1})^2 + (w_k^{k-1} + \tau v_t^{k-1})^2 \right] \\
& = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{1}{2^{1-\alpha} - 1} (w_k^{k-1})^2 + 2\tau w_k^{k-1} v_t^{k-1} + \tau^2 (v_t^{k-1})^2 \right] \\
& = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{(w_k^{k-1})^2}{2^{1-\alpha} - 1} + 2\tau w_k^{k-1} v_t^{k-1} + \tau^2 (2^{1-\alpha} - 1)(v_t^{k-1})^2 + (2 - 2^{1-\alpha}) \tau^2 (v_t^{k-1})^2 \right] \\
& = \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \left[\Big(\frac{w_k^{k-1}}{\sqrt{2^{1-\alpha} - 1}} + \tau \sqrt{2^{1-\alpha} - 1}\, v_t^{k-1} \Big)^2 + 2(1 - 2^{-\alpha}) \tau^2 (v_t^{k-1})^2 \right] \\
& \geq \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)} (v_t^{k-1})^2,
\end{aligned}$$

одакле следи тврђење. За $k = 1$ тврђење такође важи јер из (3.6) следи

$$\begin{aligned}
v^1 (D^\alpha_{t,0+,\tau} v)^1 = & \frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2) \right)^1 + \frac{\tau^{-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \tau^2 (v_t^0)^2 \\
& \geq \frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2) \right)^1 + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{2\Gamma(2-\alpha)} \tau^2 (v_t^0)^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 Једнодимензиони случај

3.2.1 Имплицитна схема

Посматрајмо почетно-гранични проблем за једнодимензиону разломљену по времену једначину субдифузије

$$D_{t,0+}^{\alpha} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T], \tag{3.8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]. \tag{3.10}$$

Имплицитна схема за дати задатак је облика

$$D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v^k - v_{x\bar{x}}^k = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1,\ldots,M, \tag{3.11}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau^+, \tag{3.12}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.13}$$

где се може ставити $\bar{f} = f$ уколико је $f \in C(\bar{Q})$. Уколико функција f није непрекидна, таква диференцијска схема није добро дефинисана. Тада се за апроксимацију функције f мора узети нека њена усредњена вредност, на пример $\bar{f} = T_1^2 f$.

Имплицитна схема (3.11)-(3.13) је нумерички ефикасна. На сваком временском слоју она представља систем линеарних једначина са тродијагоналном матрицом. Са друге стране, решење v^k на $k-$том временском слоју експлицитно зависи од решења на свим претходним слојевима. Зато је нумеричка сложеност алгоритма $O(NM^2)$. Поређења ради, у случају обичне дифузионе једначине, односно за $\alpha = 1$, сложеност имплицитне схеме је $O(NM)$.

Дефинишимо следеће скаларне производе и норме

$$(v,w)_h = (v,w)_{L_2(\omega_h)} = h \sum_{x \in \omega_h} vw, \qquad \|v\|_h = \|v\|_{L_2(\omega_h)} = (v,v)_h^{1/2},$$

$$(v,w]_h = (v,w)_{L_2(\omega_h^+)} = h \sum_{x \in \omega_h^+} vw, \qquad \|v]|_h = \|v\|_{L_2(\omega_h^+)} = (v,v]_h^{1/2},$$

$$[v,w)_h = (v,w)_{L_2(\omega_h^-)} = h\sum_{x\in\omega_h^-} vw, \qquad |[v\|_h = \|v\|_{L_2(\omega_h^-)} = [v,v)_h^{1/2},$$

$$|v|_{H^1(\omega_h)} = \|v_{\bar{x}}]|_h, \qquad \|v\|_{H^1(\omega_h)} = \left(|v|^2_{H^1(\omega_h)} + \|v\|^2_{L_2(\omega_h)}\right)^{1/2},$$

$$|v|_{H^2(\omega_h)} = \|v_{x\bar{x}}\|_h, \qquad \|v\|_{H^2(\omega_h)} = \left(|v|^2_{H^2(\omega_h)} + \|v\|^2_{H^1(\omega_h)}\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{L_2(Q_{h\tau})} = \left(\tau\sum_{k=1}^{M}\|v^k\|_h^2\right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} = \left[\tau\sum_{k=1}^{M}\left(\left\|D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right\|_h^2 + \|v\|^2_{H^2(\omega_h)}\right)\right]^{1/2},$$

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = \left[\tau\sum_{k=1}^{M}\left(\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left(\|v\|_h^2\right)\right)^k + \|v^k_{\bar{x}}]|_h^2\right)\right]^{1/2}.$$

Последња од наведених норми је дискретни аналогон норме (2.13). Она је добро дефинисана јер је први сабирак суме на десној страни позитиван на основу леме 3.2.

Б. Јовановић и А. Делић су разматрали сличан проблем са интерфејсом ([13]). У том случају неки од коефицијената једначине садрже сингуларне дистрибуције, на пример Диракову дистрибуцију а поједини парцијални изводи решења имају прекид на интерфејсу, тј. на носачу Диракове дистрибуције. Зато ћемо навести резултате до којих су дошли, а важе и овде са незнатним изменама. Тврђења наводимо без доказа јер ће детаљнија извођења уследити на дводимензионом задатку. Дакле, важе следеће оцене стабилности и брзине конвергенције.

Теорема 3.6. ([13]) *Нека је $0<\alpha<1$. Тада је диференцијска схема (3.11)-(3.13) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \le C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{3.14}$$

Теорема 3.7. ([13]) *Нека је $0<\alpha<1$. Тада је диференцијска схема (3.11)-(3.13) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{3.15}$$

Нека је u решење почетно-граничног проблема $(3.8)-(3.10)$ и v решење дискретизованог задатка $(3.11)-(3.13)$ са $\bar{f}=f$. Грешка схеме $z=u-v$ је функција дефинисана у чворовима мреже $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Стављајући $v = u - z$ у (3.11) – (3.13) добијамо следеће

$$D^{\alpha}_{t,0+\tau} z^k - z^k_{x\bar{x}} = \psi^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M,$$

где је

$$\psi^k = D^{\alpha}_{t,0+,\tau} u^k - u^k_{x\bar{x}} - \bar{f}^k.$$

Теорема 3.8. *Нека решење и почетно-граничног проблема (3.8)-(3.10) припада простору $C([0,T], C^4(\Omega)) \cap C^2([0,T], C(\bar{\Omega}))$ и $f \in C(\bar{Q})$. Тада решење v диференцијског задатка (3.11)-(3.13) конвергира ка и и важе следеће оцене брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{L_2(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}),$$

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}),$$

$$\|u - v\|_{H^{2,\alpha}_{+}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}).$$

У случају да је $\bar{f} = T_1^2 f$, може се показати да диферецијска схема (3.11) – (3.13) конвергира под слабијим претпоставкама глаткости решења *u* него у претходној теореми.

Теорема 3.9. *Нека решење и почетно-граничног проблема (3.8)-(3.10) припада простору $C^2([0,T] \cap C(\bar{\Omega})) \cap C([0,T], H^3(\Omega))$. Тада решење v диференцијског задатка (3.11)-(3.13) конвергира ка и и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{H^{2,\alpha}_{+}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}).$$

3.2.2 Схема с тежином

За почетно-гранични проблем (3.8)–(3.10) у радовима Алиханова ([3],[2]), предложена је схема са тежином. Он је разматрао како први тако и трећи гранични проблем. Проблему (3.8) – (3.10) придружимо фамилију схема

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^k - \sigma v^k_{x\bar{x}} - (1-\sigma) v^{k-1}_{x\bar{x}} = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{3.16}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad t \in \omega^{+}_{\tau}, \tag{3.17}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h. \tag{3.18}$$

Дата схема се за $\sigma = 0$ своди на експлицитну, у којој се вредности функције v^k, $k = 1, \dots, M$ директно израчунавају, док за $\sigma = 1$ добијамо већ разматрану имплицитну схему. Наведимо још једну последицу леме 3.3.

Последица 3.10. ([3]) *За било коју функцију $v(t)$ дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_\tau$ важи следећа неједнакост*

$$\left(\sigma v^k + (1-\sigma) v^{k-1}\right) D^\alpha_{t,0+,\tau} v^k \geq \frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2)\right)^k + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{2(2-2^{1-\alpha})} \left((3-2^{1-\alpha})\sigma - 1\right) \left(D^\alpha_{t,0+,\tau} v^k\right)^2. \quad (3.19)$$

Дискретни аналогон норме (2.13) се, због присуства тежинског коефицијента, дефинише нешто другачије него код имплицитне схеме

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = \left[\tau \sum_{k=1}^{M} \left(\left(D^\alpha_{t,0+,\tau}\left(\|v\|_h^2\right)\right)^k + \|\sigma v^k_{\bar{x}} + (1-\sigma) v^{k-1}_{\bar{x}}]|_h^2\right)\right]^{1/2}.$$

Теорема 3.11. *Нека је $0 < \alpha < 1$ и $\sigma \geq 1/(3-2^{1-\alpha})$. Диференцијска схема (3.16)-(3.18) је апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}.$$

Доказ. Помножимо једначину (3.16) са $v^{(\sigma)} = \sigma v^k + (1-\sigma) v^{k-1}$. На основу последице 3.10 следи

$$\frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}(v^2)\right)^k + \frac{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{2(2-2^{1-\alpha})} \left((3-2^{1-\alpha})\sigma - 1\right) \left(D^\alpha_{t,0+,\tau} v^k\right)^2 - v^{(\sigma)}(\sigma v^k_{x\bar{x}} + (1-\sigma) v^{k-1}_{x\bar{x}}) = v^{(\sigma)} \bar{f}^k. \quad (3.20)$$

За $\sigma \geq 1/(3-2^{1-\alpha})$, множећи са h и сумирајући по чворовима мреже $\bar{\omega}_h$ добијамо

$$\frac{1}{2} \left(D^\alpha_{t,0+,\tau}\left(\|v\|_h^2\right)\right)^k + \|\sigma v^k_{\bar{x}} + (1-\sigma) v^{k-1}_{\bar{x}}]|_h^2 \leq \varepsilon \left\|\sigma v^k + (1-\sigma) v^{k-1}\right\|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\|\bar{f}\right\|_h^2.$$

Ако применимо дискретну Поенкареову неједнакост у једнодимензионом случају ([45]),

$$\|v\|_h^2 \leq \frac{1}{8} \|v_{\bar{x}}]|_h^2, \quad (3.21)$$

следи

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left(\|v\|_h^2\right)\right)^k + \left(2-\frac{\varepsilon}{4}\right)\|\sigma v^k_{\bar{x}} + (1-\sigma)v^{k-1}_{\bar{x}}]|_h^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}\right\|_h^2,$$

одакле, за $\varepsilon = 4$ и сабирајући по $k = 1, \ldots, M$, очигледно следи тврђење теореме, где је $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. □

Сада можемо да се позабавимо и питањем конвергенције дате схеме. Нека је u решење почетно-граничног проблема (3.8) – (3.10) и v решење дискретизованог задатка (3.16) – (3.18) са $\bar{f} = T_1^2 f$. Грешка схеме $z = u - v$ је добро дефинисана у чворовима мреже $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Стављајући $v = u - z$ у (3.16) добијамо

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z^k - \sigma z^k_{x\bar{x}} - (1-\sigma)z^{k-1}_{x\bar{x}} = D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k - \sigma u^k_{x\bar{x}} - (1-\sigma)u^{k-1}_{x\bar{x}} - T_1^2\left(D^{\alpha}_{t,0+}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^k$$

$$= D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k - T_1^2 D^{\alpha}_{t,0+}u^k - \sigma u^k_{x\bar{x}} - (1-\sigma)u^{k-1}_{x\bar{x}} + u^k_{x\bar{x}}$$

$$= \left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u - T_1^2 D^{\alpha}_{t,0+}u\right)^k + (1-\sigma)\tau u^k_{x\bar{x}\bar{t}}$$

$$= \xi^k + \varsigma^k_x = \psi^k.$$

Тако грешка задовољава следећи задатак

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z^k - \sigma z^k_{x\bar{x}} - (1-\sigma)z^{k-1}_{x\bar{x}} = \psi^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{3.22}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau^+, \tag{3.23}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.24}$$

где је

$$\xi = D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u - T_1^2 D^{\alpha}_{t,0+}u \quad \text{и} \quad \varsigma = (1-\sigma)\tau u_{\bar{x}\bar{t}}.$$

Теорема 3.12. *Нека је* $\sigma \ge 1/(3-2^{1-\alpha})$. *Тада је диференцијска схема* (3.22) – (3.24) *апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \le C\left[\tau\sum_{k=1}^{M}\left(\|\xi^k\|_h^2 + \|\varsigma^k\|_h^2\right)\right]^{1/2}. \tag{3.25}$$

Доказ. Помножимо (3.22) скаларно са $z^{(\sigma)} = \sigma z^k + (1-\sigma)z^{k-1}$. Ако применимо последицу 3.10 и парцијалну сумацију имамо

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\|z\|_h^2 + \|\sigma z^k_{\bar{x}} + (1-\sigma)z^{k-1}_{\bar{x}}]|_h^2 \le \left(\xi^k, z^{(\sigma)}\right)_h + \left(\varsigma^k_x, z^{(\sigma)}\right)_h. \tag{3.26}$$

Оценимо сада чланове на десној страни.

$$\left|\left(\xi^k, z^{(\sigma)}\right)_h\right| \leq \varepsilon \|z^{(\sigma)}\|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\xi^k\|_h^2 \leq \frac{\varepsilon}{8}\|\sigma z_{\bar{x}}^k + (1-\sigma) z_{\bar{x}}^{k-1}]|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\xi^k\|_h^2,$$

$$\left|\left(\varsigma_x^k, z^{(\sigma)}\right)_h\right| = |(\varsigma^k, z_{\bar{x}}^{(\sigma)}]_h| \leq \varepsilon \|\sigma z_{\bar{x}}^k + (1-\sigma) z_{\bar{x}}^{k-1}]|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\varsigma^k\|_h^2,$$

Сада из (3.26) следи

$$D_{t,0+,\tau}^{\alpha}\|z\|_h^2 + \left(2 - \frac{9\varepsilon}{4}\right)\|\sigma z_{\bar{x}}^k + (1-\sigma) z_{\bar{x}}^{k-1}]|_h^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left(\|\xi^k\|_h^2 + \|\varsigma^k\|_h^2\right).$$

За $\varepsilon = \frac{4}{9}$, множећи претходну неједнакост са τ и сумирајући је по $k = 1, \dots, M$, добијамо тврђење теореме где је $C = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. $\square$

Да би се оценила брзина конвергенције схеме (3.16)-(3.18) у норми $\|\cdot\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$, довољно је оценити чланове који се јављају на десној страни (3.25).

Теорема 3.13. *Нека решење u почетно-граничног проблема (3.8)-(3.10) припада простору* $C^2([0,T], C[0,1]) \cap C_+^{\alpha}([0,T], H^2(0,1)) \cap H^1((0,T), C^1[0,1])$ *и нека је* $\sigma \geq 1/(3-2^{1-\alpha})$. *Тада решење v диференцијске схеме (3.16)-(3.18) са* $\bar{f} = T_1^2 f$ *конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau). \tag{3.27}$$

Доказ. Нека је $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где је

$$\xi_1 = D_{t,0+,\tau}^{\alpha} u - D_{t,0+}^{\alpha} u, \qquad \xi_2 = D_{t,0+}^{\alpha} u - T_1^2 D_{t,0+}^{\alpha} u = D_{t,0+}^{\alpha}(u - T_1^2 u).$$

На основу леме 3.1 следи

$$\|\xi_1^k\|_h^2 = \left(\xi_1^k, \xi_1^k\right)_h = h \sum_{x \in \omega_h} (\xi_1^k)^2$$

$$\leq \left(\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \left(1 + 2^{-\alpha}\right)\right]\right)^2 h \sum_{x \in \omega_h}\left(\max_{\bar{Q}_t}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|\right)^2$$

$$\leq C^2 \tau^{2(2-\alpha)}\left(\max_{i \leq 2}\max_{0 \leq t \leq T}\max_{x \in \omega_h}\left|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x,t)\right|\right)^2 h \sum_{x \in \omega_h} 1$$

$$= C^2 \tau^{2(2-\alpha)}\|u\|_{C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))}^2 \|1\|_{L_2(\omega_h)}^2,$$

где је $Q_t = \Omega \times (0,T)$ и $C = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha})\right]$. Множећи са τ и сумирајући ове норме по слојевима, добијамо

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{M} \|\xi_1^k\|_h^2\right)^{1/2} \leq C\tau^{2-\alpha} \|u\|_{C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))}, \tag{3.28}$$

где је C израчунљива константа. У даљем раду ћемо са C означавати позитивну константу независну од u, h, τ, која може узимати различите вредности у различитим формулама.

Следећи члан који оцењујемо је ξ_2. Посматрајмо само функцију која је под дејством оператора извода разломљеног реда. Она има следећу интегралну репрезентацију.

$$u - T_1^2 u = -(T_1^2 u - u) = -\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)[u(x',t) - u(x,t)]\,dx'$$

$$= -\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\int_{x}^{x'} \frac{\partial u}{\partial x}(x'',t)\,dx''dx'$$

$$= -\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\int_{x}^{x'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x'',t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)dx''dx'$$

$$= -\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\int_{x}^{x'} \left(\int_{x}^{x''} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x''',t)\,dx''' + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)dx''dx'.$$

Пошто је

$$-\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\int_{x}^{x'} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx''dx' = 0,$$

добијамо да важи следеће

$$u - T_1^2 u = -\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{x'}^{x}\int_{x''}^{x}\left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x''',t)\,dx'''dx''dx'.$$

Даље је, применом Коши–Шварцове неједнакости

$$\left|(u - T_1^2 u)(x_i,t_k)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_i-h}^{x_i+h}\int_{x_i-h}^{x_i+h}\int_{x_i-h}^{x_i+h}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| dx'''dx''dx'$$

$$\leq \frac{(2h)^{2+1/2}}{h}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Множећи са h и сумирајући по $i = 1, \dots, N-1$, добијамо

$$\|\xi_2^k\|_h^2 = h \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_2(x_i, t_k)|^2 \leq \frac{2(2h)^5}{h} \|D_{t,0+}^\alpha u(\cdot, t_k)\|_{H^2(0,1)}^2.$$

Најзад, множећи последњу неједнакост са τ и сумирајући је по временским слојевима, после очигледне мајорације следи

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{M} \|\xi_2^k\|_h^2\right)^{1/2} \leq Ch^2 \left(\tau \sum_{k=1}^{M} \|D_{t,0+}^\alpha u(\cdot, t_k)\|_{H^2(0,1)}^2\right)^{1/2} \leq Ch^2 \|u\|_{C_+^\alpha([0,T],H^2(0,1))}. \tag{3.29}$$

Оценимо на крају ς.

$$|\varsigma(x_i, t_k)| = |(1-\sigma)\tau u_{\bar{x}\bar{t}}(x_i, t_k)| \leq \left| \frac{\tau}{h\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx' dt' \right|$$

$$\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{C^1[x_i, x_{i+1}]} dt' \leq \tau^{1/2} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{C^1[x_i, x_{i+1}]}^2 dt' \right)^{1/2}$$

$$= \tau^{1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2((t_k, t_{k+1}), C^1[x_i, x_{i+1}])} \leq \tau^{1/2} \|u\|_{H^1((t_k, t_{k+1}), C^1[x_i, x_{i+1}])},$$

Даље, сумирајући претходну неједнакост по чворовима мреже $\bar{\omega}_h$ и потом по свим временским слојевима добијамо

$$\|\varsigma^k\|_h^2 = h \sum_{i=0}^{N-1} |\varsigma(x_i, t_k)|^2 \leq h \sum_{i=0}^{N-1} \tau \|u\|_{H^1((t_k, t_{k+1}), C^1[x_i, x_{i+1}])}^2 = \tau \|u\|_{H^1((t_k, t_{k+1}), C^1[0,1])}^2,$$

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{M} \|\varsigma^k\|_h^2\right)^{1/2} \leq C\tau \|u\|_{H^1(0,T), C^1(\bar{\Omega}))}. \tag{3.30}$$

Тврђење теореме следи из (3.28) – (3.30). □

Можемо приметити да се услов $\sigma \geq 1/(3 - 2^{1-\alpha})$ за $\alpha = 1$ своди на добро познат услов стабилности схеме с тежином за класичну једначину дифузије.

3.3 Дводимензиони случај

Предмет изучавања ове тезе јесте заправо дводимензиона једначина субдифузије. И за њу ћемо поставити имплицитну и схему са тежином и испитати стабилност и брзину конвергенције. Најпре уведимо појам мреже, скаларне производе и норме.

Нека је $\bar{\Omega} = [0,1]\times[0,1]$ и $\bar{Q} = \bar{\Omega}\times[0,T]$. Дефинишимо равномерну мрежу $\bar{Q}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ где је $\bar{\omega}_h = \{x = (n_1 h, n_2 h) : n_1, n_2 = 0,1,...,N; h = 1/N\}$ и $\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau : k = 0,1,...,M; \tau = T/M\}$. Уведимо такође мреже $\omega_h = \bar{\omega}_h \cap \Omega$, $\omega_{0h} = \bar{\omega}_h \cap ((0,1]\times(0,1])$, $\omega_{1h} = \bar{\omega}_h \cap ((0,1]\times(0,1))$, $\omega_{2h} = \bar{\omega}_h \cap ((0,1)\times(0,1])$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T)$, $\omega_\tau^- = \bar{\omega}_\tau \cap [0,T)$, $\omega_\tau^+ = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T]$ и $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$. Користићемо стандардне ознаке

$$v = v(x,t), \quad \hat{v} = v(x,t+\tau), \quad \check{v} = v(x,t-\tau), \quad v^k = v(x,t_k), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_{x_i} = \frac{v(x+he_i,t) - v(x,t)}{h} = v_{\bar{x}_i}(x+he_i,t), \quad i = 1,2,$$
$$v_t = \frac{v(x,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} = v_{\bar{t}}(x,t+\tau) = \hat{v}_{\bar{t}},$$

где је e_i јединични вектор осе $0x_i$.

Дефинишимо и следеће скаларне производе и норме.

$$(v,w)_h = (v,w)_{L_2(\omega_h)} = h^2 \sum_{x\in\omega_h} vw, \quad \|v\|_h = \|v\|_{L_2(\omega_h)} = (v,v)_h^{1/2},$$

$$(v,w)_{ih} = (v,w)_{L^2(\omega_{ih})} = h^2 \sum_{x\in\omega_{ih}} vw, \quad \|v\|_{ih} = \|v\|_{L_2(\omega_{ih})} = (v,v)_{ih}^{1/2}, \quad i = 0,1,2,$$

$$|v|^2_{H^1(\omega_h)} = \sum_{i=1}^{2} \|v_{\bar{x}_i}\|^2_{ih}, \quad \|v\|^2_{H^1(\omega_h)} = |v|^2_{H^1(\omega_h)} + \|v\|^2_h,$$

$$|v|^2_{H^2(\omega_h)} = \sum_{i=1}^{2} \|v_{x_i\bar{x}_i}\|^2_h + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|^2_{0h}, \quad \|v\|^2_{H^2(\omega_h)} = |v|^2_{H^2(\omega_h)} + \|v\|^2_{H^1(\omega_h)},$$

$$\|v\|^2_{L_2(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{M} \|v^k\|^2_h, \quad \|v\|^2_{L_2(Q_{ih\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{M} \|v^k\|^2_{ih}, \quad i = 0,1,2,$$

$$\|v\|^2_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{M} \left[\left(D^\alpha_{t,0+,\tau}\big(\|v\|^2_h\big) \right)^k + \|v^k\|^2_{H^1(\omega_h)} \right], \tag{3.31}$$

$$\|v\|^2_{H^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{M} \left[\left\| (D^\alpha_{t,0+,\tau} v)^k \right\|^2_h + \|v^k\|^2_{H^2(\omega_h)} \right].$$

3.3.1 Имплицитна схема

Апроксимирајмо задатак (2.3) – (2.5) на следећи начин

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k - v^k_{x_1\bar{x}_1} - v^k_{x_2\bar{x}_2} = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \dots, M, \tag{3.32}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau^+, \tag{3.33}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.34}$$

где је $\bar{f} = T_1T_2f$ уколико f није непрекидна функција. Једначину (3.32) можемо писати и у облику

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k + Av^k = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \dots, M, \tag{3.35}$$

где је

$$Av = -\Delta_h v = -v_{x_1\bar{x}_1} - v_{x_2\bar{x}_2} \tag{3.36}$$

дискретни Лапласов оператор. Означимо такође,

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{где је} \quad A_1v = -v_{x_1\bar{x}_2} \quad \text{и} \quad A_2v = -v_{x_2\bar{x}_2}. \tag{3.37}$$

Оператор A је позитивно дефинитан па је одговарајућа енергетска норма $\|v\|_A = (Av,v)^{1/2}$ добро дефинисана. Важи следеће

$$\|v\|_A^2 = (Av,v)_h = \|v_{\bar{x}_1}\|_{1h}^2 + \|v_{\bar{x}_2}\|_{2h}^2 = |v|^2_{H^1(\omega_h)}, \tag{3.38}$$

$$\|Av\|_h^2 = (Av,Av)_h = \sum_{i=1}^{2} \|v_{x_i\bar{x}_i}\|_h^2 + 2\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_{0h}^2 = |v|^2_{H^2(\omega_h)}, \tag{3.39}$$

Теорема 3.14. *Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је диференцијска схема (3.32)-(3.34) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \left\|\bar{f}\right\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{3.40}$$

Доказ. Помножимо једначину (3.32) скаларно са v^k

$$\left(v^k, D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h - \left(v^k, v^k_{x_1\bar{x}_1}\right)_h - \left(v^k, v^k_{x_2\bar{x}_2}\right)_h = \left(v^k, \bar{f}^k\right)_h.$$

После парцијалне сумације и примене леме 3.3 на левој страни, као и

Коши–Шварцове и $\varepsilon-$неједнакости на десној, добијамо

$$\frac{1}{2}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(v)^2\right)^k + \left\|v^k_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \left\|v^k_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} \leq \varepsilon \left\|v^k\right\|^2_h + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Ако применимо још и дискретну Поенкареову неједнакост у дводимензионом случају ([45]),

$$\|v\|^2_h \leq \frac{1}{16}|v|^2_{H^1(\omega_h)}, \tag{3.41}$$

из претходне неједнакости следи

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(v)^2\right)^k + \left(2 - \frac{\varepsilon}{8}\right)\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Додајмо и левој и десној страни ове неједнакости $\|v^k\|^2_h$, и поново применимо (3.41),

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(v)^2\right)^k + \left(2 - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{1}{16}\right)\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} + \left\|v^k\right\|^2_h \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

За $\varepsilon = \frac{15}{2}$ и сумирајући по $k = 1, \ldots, M$, долазимо до тражене априорне оцене. $\square$

Ако је u решење проблема (2.3) – (2.5) а v решење (3.32) – (3.34), онда грешка $z = u - v$ дефинисана на $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ задовољава следеће

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z^k - z^k_{x_1\bar{x}_1} - z^k_{x_2\bar{x}_2} = D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k - u^k_{x_1\bar{x}_1} - u^k_{x_2\bar{x}_2} + T_1T_2\left(D^{\alpha}_{t,0+}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^k$$

$$= \left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u - T_1T_2D^{\alpha}_{t,0+}u\right)^k + \left(T_1T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1}\right)^k + \left(T_1T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u_{x_2\bar{x}_1}\right)^k$$

$$= \bar{\xi}^k + \eta_1 + \eta_2 = \psi^k.$$

Дакле, грешка схеме задовољава следећи задатак

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z^k - z^k_{x_1\bar{x}_1} - z^k_{x_2\bar{x}_2} = \psi^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{3.42}$$

$$z(0,t) = 0, \quad z(1,t) = 0, \quad t \in \omega^+_\tau, \tag{3.43}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.44}$$

где је

$$\bar{\xi} = D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u - T_1T_2D^{\alpha}_{t,0+}u, \quad \eta_1 = T_1T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1}, \quad \eta_2 = T_1T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u_{x_2\bar{x}_2}.$$

Посматрајмо члан η_1. Стекловљеви оператори комутирају па имамо

$$\begin{aligned}
\eta_1 = T_1T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1} &= T_2\left(\frac{1}{h}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1', x_2, t)\,dx_1'\right) - u_{x_1\bar{x}_1}(x_1,x_2,t)\\
&= T_2\left(\frac{1}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1+h/2,x_2,t) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1-h/2,x_2,t)\right)\right) - u_{x_1\bar{x}_1}(x_1,x_2,t)\\
&= T_2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1-h/2,x_2,t)\right)_{x_1} - u_{x_1\bar{x}_1}\\
&= \left(T_2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1-h/2,x_2,t) - u_{\bar{x}_1}(x_1,x_2,t)\right)_{x_1} = \zeta_{1,x_1}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Аналогно, $\eta_2 = \zeta_{2,x_2}$ где је

$$\zeta_2(x_1,x_2,t) = T_1\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2-h/2,t) - u_{\bar{x}_2}(x_1,x_2,t). \tag{3.46}$$

Пошто грешка z задовољава задатак (3.32) – (3.34) за $\bar{f} = \psi$, следећа теорема је директна последица теореме 3.14.

Теорема 3.15. *Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је диференцијска схема (3.42)-(3.44) апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \le C\left[\tau\sum_{k=1}^{M}\left(\left\|\bar{\xi}^k\right\|_h^2 + \sum_{i=1}^{2}\left\|\zeta_i^k\right\|_h^2\right)\right]^{1/2}. \tag{3.47}$$

Сада преостаје да одредимо брзину конвергенције имплицитне схеме тако што ћемо оценити чланове на десној страни последње неједнакости.

Теорема 3.16. *Нека решење и почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору $C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))\cap C([0,T],H^3(\Omega))$. Тада решење v диференцијске схеме (3.32)-(3.34) са $\bar{f} = T_1T_2f$ конвергира ка и и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u-v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2+\tau^{2-\alpha}). \tag{3.48}$$

Доказ. Слично као у доказу теореме 3.13, нека је $\bar{\xi} = \xi_1 + \bar{\xi}_2$, где је

$$\bar{\xi}_2 = D_{t,0+}^{\alpha}u - T_1T_2D_{t,0+}^{\alpha}u = D_{t,0+}^{\alpha}(u - T_1T_2u).$$

За ξ_1 важи оцена (3.28). Сада оценимо и $\bar{\xi}_2$ при чему посматрамо само функцију под дејством фракционог извода. За њу важи следећа интегрална репрезентација

$$
\begin{aligned}
(u - T_1T_2u)\,(x_1,x_2) &= u(x_1,x_2) - \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} u(x_1',x_2')\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \left[u(x_1,x_2) - u(x_1',x_2')\right]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \left[u(x_1,x_2) - u(x_1',x_2) + u(x_1',x_2) - u(x_1',x_2')\right]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \left[\int_{x_1'}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2)\,dx_1'' + \int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2'')\,dx_2''\right]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \Bigg[\int_{x_1'}^{x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2') + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2')\right)\,dx_1'' \\
&\qquad + \int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2'')\,dx_2'')\Bigg]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \Bigg[\int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(x_1'',x_2'')\,dx_2''dx_1'' \\
&\qquad + \int_{x_1'}^{x}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2')\,dx_1'' + \int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2'')\,dx_2'')\Bigg]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \Bigg[\int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(x_1'',x_2'')\,dx_2''dx_1'' \\
&\qquad + \int_{x_1'}^{x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1'',x_2') - \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2') + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2')\right)\,dx_1'' \\
&\qquad + \int_{x_2'}^{x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2'') - \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2)\right)\,dx_2''\Bigg]\,dx_2'dx_1' \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2} \Bigg[\int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(x_1'',x_2'')\,dx_2''dx_1'' \\
&\qquad - \int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_1''}^{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1''',x_2')\,dx_1'''dx_1'' + \int_{x_1'}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2')\,dx_1'' \\
&\qquad - \int_{x_2'}^{x_2}\int_{x_2''}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1',x_2''')\,dx_2'''dx_2'' + \int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2)\,dx_2''\Bigg]\,dx_2'dx_1'
\end{aligned}
$$

Пошто је

$$
\frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left[\int_{x_1'}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2')\,dx_1'' + \int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1',x_2)\,dx_2''\right]dx_2'dx_1' = 0,
$$

најзад следи

$$(u - T_1T_2u)\,(x_1,x_2) = \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left[\int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_2'}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(x_1'',x_2'')\,dx_2''dx_1''\right.$$

$$\left. -\int_{x_1'}^{x_1}\int_{x_1''}^{x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1''',x_2')\,dx_1'''dx_1'' - \int_{x_2'}^{x_2}\int_{x_2''}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1',x_2''')\,dx_2'''dx_2''\right]dx_2'dx_1'.$$

Даље је

$$|(u - T_1T_2u)(ih,jh,t_k)| \le \frac{1}{h^2}\int_{ih-h/2}^{ih+h/2}\int_{jh-h/2}^{jh+h/2}\left[\int_{ih-h/2}^{ih+h/2}\int_{jh-h/2}^{jh+h/2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right|dx_2''dx_1''\right.$$

$$\left. +\int_{ih-h/2}^{ih+h/2}\int_{ih-h/2}^{ih+h/2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|dx_1'''dx_1'' + \int_{jh-h/2}^{jh+h/2}\int_{jh-h/2}^{jh+h/2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|dx_2'''dx_2''\right]dx_2'dx_1'.$$

Нека је $K_{ij} = ((i-1/2)h,(i+1/2)h)\times((j-1/2)h,(j+1/2)h)$ основна ћелија области Ω. Примењујући неједнакост Коши–Шварца добијамо

$$h^2\sum_{(ih,jh)\in\omega_h}|(u - T_1T_2u)(ih,jh,t_k)|^2$$
$$\le h^4\sum_{i,j}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right\|^2_{L_2(K_{i,j})} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right\|^2_{L_2(K_{i,j})} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right\|^2_{L_2(K_{i,j})}\right).$$

Ако искористимо особину да је L_2 норма функције на јединичном квадрату адитивна по фамилији $\{K_{i,j}\}$ међусобно дисјунктних Лебег мерљивих подскупова, добијамо

$$\left\|\bar{\xi}_2^k\right\|_h^2 \le h^4\left|D^\alpha_{t,0+}u(\cdot,\cdot,t_k)\right|^2_{H^2(\Omega)} \le h^4\left\|D^\alpha_{t,0+}u(\cdot,\cdot,t_k)\right\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Најзад, множећи последњу неједнакост са τ и сумирајући је по временским слојевима, после очигледне мајорације добијамо

$$\left(\tau\sum_{k=1}^{M}\left\|\bar{\xi}_2^k\right\|_h^2\right)^{1/2} \le Ch^2\left(\tau\sum_{k=1}^{M}\left\|D^\alpha_{t,0+}u(\cdot,\cdot,t_k)\right\|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{1/2} \le Ch^2\,\|u\|_{C^\alpha_+([0,T],H^2(\Omega))}. \tag{3.49}$$

Да бисмо оценили чланове ζ_1 и ζ_2 користићемо Брамбл–Хилбертову лему. Нека је $(x_1,x_2) = (ih,jh)$ фиксирана тачка а $x' = (x_1',x_2')$ текућа променљива. Уведимо смену променљиве

$$x_1' = x_1 - h/2 + \tilde{x}_1h,\ \ -1/2 \le \tilde{x}_1 \le 1/2; \qquad x_2' = x_2 + \tilde{x}_2h,\ \ -1/2 \le \tilde{x}_2 \le 1/2.$$

Сада је

$$u(x') = u(x'_1, x'_2) = u(x_1 - h/2 + \tilde{x}_1 h, x_2 + \tilde{x}_2 h) = \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{u}(\tilde{x}).$$

Користећи правило за извод сложене функције имамо

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = h \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

Тада је $\zeta_1(ih, jh) = \frac{1}{h} \tilde{\zeta}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right)$, где је

$$\tilde{\zeta}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(0, \tilde{x}_2) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, 0) \right] d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2.$$

На основу теореме о трагу 1.6 следи

$$|\tilde{\zeta}_1(\tilde{u})| \leq C_s \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right\|_{H^s(K)}, \qquad s > 1/2,$$

где је $K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тако је $\tilde{\zeta}_1$, за $s = 2$, ограничен линеаран функционал аргумента $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}$ на $H^2(K)$. Штавише, $\tilde{\zeta}_1 = 0$ за $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1^k \tilde{x}_2^l$, $k, l \in \{0, 1\}$. На основу теореме 1.8 постоји позитивна константа $C = C(s)$ тако да

$$\left| \tilde{\zeta}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \right| \leq C \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{H^2(K)}.$$

Враћајући се са $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ на оригиналне промењиве x_1 и x_2 добијамо

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{H^2(K)} = \left\{ \iint_K \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1^{1+k} \partial \tilde{x}_2^{2-k}} \right)^2 d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \right\}^{1/2} =$$

$$\left\{ \iint_{K_{i,j}} \sum_{k=0}^{2} \left(h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^{1+k} \partial x_2^{2-k}} \right)^2 \frac{dx_1 dx_2}{h^2} \right\}^{1/2} = h^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{H^2(K_{i,j})},$$

односно

$$|\zeta_1(ih, jh)| \leq Ch \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{H^2(K_{i,j})}.$$

Пошто је и H^2 полунорма адитивна по фамилији елементарних ћелија, важи

$$\|\zeta_1^k\|_{1h}^2 = h^2 \sum_{(ih,jh) \in \omega_{1h}} |\zeta_1(ih, jh, t_k)|^2 \leq Ch^4 \left| \frac{\partial u^k}{\partial x_1} \right|_{H^2(\Omega)}^2 \leq Ch^4 |u^k|_{H^3(\Omega)}^2.$$

Аналогно,

$$\left\|\zeta_2^k\right\|_{2h}^2 \le Ch^4 \left|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right|_{H^2(\Omega)}^2 \le Ch^4 \left|u^k\right|_{H^3(\Omega)}^2 .$$

Из последње две неједнакости следи

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{2} \left\|\zeta_i^k\right\|_{ih}^2\right)\right)^{1/2} \le Ch^2 \left\|u\right\|_{C([0,T],H^3(\Omega))} . \tag{3.50}$$

Тврђење следи из (3.28), (3.49) и (3.50). □

Оцена стабилности и оцена брзине конвергенције могу се извести и у јачој норми $\|\cdot\|_{H_+^{2,\alpha}}$. Потребна нам је следећа лема.

Лема 3.17. *За функцију v дефинисану на мрежи $\bar{\omega}_h$ која задовољава услов $v(x) = 0$, $x \in \gamma_h$, важи следећа неједнакост*

$$|v|_{H^2(\omega_h)} \le \|v\|_{H^2(\omega_h)} \le \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{16^2}}\, |v|_{H^2(\omega_h)} ,$$

односно постоји еквиваленција између полунорме и норме у $H^2(\omega_h)$.

Доказ. Тривијално, користећи дефиницију норме у $H^2(\omega_h)$ и неједнакост (3.41). □

Теорема 3.18. *Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је диференцијска схема (3.32)-(3.34) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C \left\|\bar{f}\right\|_{L_2(Q_{h\tau})} . \tag{3.51}$$

Доказ. Множећи скаларно (3.35) са Av^k, добијамо

$$\left(Av^k, D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v^k\right)_h + \left(Av^k, Av^k\right)_h = \left(Av^k, \bar{f}^k\right)_h$$

Даље је, на основу леме 3.3

$$\left(Av^k, D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v^k\right)_h = \left(v_{\bar{x}_1}^k, D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v_{\bar{x}_1}^k\right)_h + \left(v_{\bar{x}_2}^k, D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v_{\bar{x}_2}^k\right)_h \ge 0,$$

па изостављајући први члан у претходној једнакости и узимајући у обзир (3.39), следи

$$|v^k|_{H^2(\omega_h)}^2 \le \frac{1}{2} \left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 + \frac{1}{2} \left\|\bar{f}^k\right\|_h^2 . \tag{3.52}$$

Множећи скаларно (3.35) са $D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k$, добијамо

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k, D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h + \left(Av^k, D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h = \left(\bar{f}^k, D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h,$$

одакле следи

$$\left\|D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right\|_h^2 \leq \frac{1}{2}\left\|D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right\|_h^2 + \frac{1}{2}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2. \tag{3.53}$$

Сабирајући (3.52) и (3.53) и користећи лему 3.17 добијамо тврђење теореме. □

Сада можемо оценити грешку у норми $\|\cdot\|_{H^2_+(Q_{h\tau})}$. Пошто је $f \in C(\bar{Q})$ можемо узети да је $\bar{f} = f$. Тада је

$$\psi^k = \xi_1^k + \nu_1^k + \nu_2^k$$

где смо сада означили

$$\nu_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1}, \quad \nu_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u_{x_2\bar{x}_2}. \tag{3.54}$$

Теорема 3.19. *Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је диференцијска схема (3.42)-(3.44) апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{H^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})} \leq C\left[\tau\sum_{k=1}^{M}\left(\left\|\xi_1^k\right\|_h^2 + \sum_{i=1}^{2}\left\|\nu_i^k\right\|_h^2\right)\right]^{1/2}. \tag{3.55}$$

Теорема 3.20. *Нека решење u почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору $C^2([0,T], C(\bar{\Omega})) \cap C([0,T], H^4(\Omega))$. Тада решење v диференцијске схеме (3.32)-(3.34) са $\bar{f} = f$ конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{H^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}). \tag{3.56}$$

Доказ. Оцена за ξ_1 је већ показана те важи (3.28). Чланови ν_i, $i = 1, 2$, могу да се оцене применом Брамбл–Хилбертове леме. Нека је $x = (x_1, x_2)$ фиксирана тачка, $e = e(x) = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h)$ елементарна ћелија и $u = u(x') = u(x_1', x_2')$. Уводећи смену променљиве

$$x_1' = x_1 + \tilde{x}_1 h, \; -1 \leq \tilde{x}_1 \leq 1; \qquad x_2' = x_2 + \tilde{x}_2 h, \; -1 \leq \tilde{x}_2 \leq 1, \tag{3.57}$$

постиже се обострано једнозначно пресликавање e на $E = (-1, 1)^2$, па имамо да је

$$u(x') = u(x_1 + \tilde{x}_1 h, x_2 + \tilde{x}_2 h) = \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1^2}(0,0),$$

па је

$$\nu_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1\bar{x}_1} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1^2}(0,0) - \tilde{u}(1,0) + 2\tilde{u}(0,0) - \tilde{u}(-1,0)\right] \equiv \tilde{\nu}_1(\tilde{u}).$$

Линеарност функционала $\tilde{\nu}_1$ се показује непосредно, док ограничност следи из теорема потапања

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1^2}(0,0) - \tilde{u}(1,0) + 2\tilde{u}(0,0) - \tilde{u}(-1,0)\right| \leq \max_{\bar{E}}\left|\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1^2}\right| + 4\max_{\bar{E}}|\tilde{u}|$$

$$\leq C_1 \|u\|_{H^p(\bar{E})} + 4C_2 \|u\|_{H^q(\bar{E})} \leq C_3 \|u\|_{H^s(\bar{E})},$$

где је $q > 1$, $p = q + 2 > 3$ и $s > 3$.

Непосредно се проверава да се функционал $\tilde{\nu}_1$ анулира на полиномима од две променљиве степена не већег од три, односно када је $\tilde{u}$ било који елемент скупа $\{1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_1^2, \tilde{x}_1\tilde{x}_2, \tilde{x}_2^2, \tilde{x}_1^3, \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2, \tilde{x}_1\tilde{x}_2^2, \tilde{x}_2^3\}$, па на основу леме 1.9 следи

$$|\tilde{\nu}_1(u)| \leq \frac{C_3}{h^2}|\tilde{u}|_{H^s(E)}, \quad 3 < s \leq 4.$$

Враћајући се на старе променљиве, за $s = 4$ лако се добија

$$|\tilde{u}|_{H^4(E)} \leq h^3|u|_{H^4(e)},$$

$$\|\nu_1^k\|_h^2 = h^2\sum_{i,j}|\nu_1(ih, jh, t_k)|^2 \leq Ch^2\left(h^2\sum_{i,j}\left|u^k\right|_{H^4(e)}^2\right),$$

па после сумирања по $k = 1, \ldots M$, и очигледне мајорације по t важи

$$\|\nu_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq Ch^2\,\|u\|_{C([0,T],H^4(\Omega))}. \tag{3.58}$$

Аналогна оцена важи и за ν_2, те резултат следи из (3.28) и (3.58). $\square$

3.3.2 Схема с тежином

Задатак (2.3) – (2.5) можемо апроксимирати на следећи начин

$$D_{t,0,\tau}^\alpha v^k + \sigma A v^k + (1-\sigma)Av^{k-1} = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{3.59}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau^+, \tag{3.60}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.61}$$

где је A оператор дефинисан у 3.3.1. Ако дефинишемо норму

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = \left[\tau \sum_{k=1}^{M} \left(\left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha} \left(\|v\|_h^2 \right) \right)^k + \left| \sigma v^k + (1-\sigma) v^{k-1} \right|_{H^1(\omega_h)}^2 \right) \right]^{1/2},$$

следећа теорема се доказује аналогно теореми 3.12.

Теорема 3.21. *Нека је $0 < \alpha < 1$ и $\sigma \geq 1/(3-2^{1-\alpha})$. Диференцијска схема (3.59)-(3.61) је апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}.$$

Грешка ове схеме z задовољава исти задатак (3.59)-(3.61) за $\bar{f} = \psi$, где је

$$\psi = \bar{\xi} + \zeta_{1,x_1} + \zeta_{2,x_2} + \varsigma_{1,x_1} + \varsigma_{2,x_2},$$

при чему је

$$\varsigma_1 = (1-\sigma)\tau u_{\bar{x}_1\bar{t}}, \quad \varsigma_2 = (1-\sigma)\tau u_{\bar{x}_2\bar{t}},$$

док су остали чланови на десној страни једнакости већ дефинисани. Овде смо такође претпостављали да f није непрекидна функција, па смо узимали усредњене вредности на уобичајени начин. Директна последица претходне теореме је следећа априорна оцена

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \left[\tau \sum_{k=1}^{M} \left(\|\bar{\xi}^k\|_h^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(\|\zeta_i^k\|_h^2 + \|\varsigma_i^k\|_h^2 \right) \right) \right]^{1/2}.$$

Теорема 3.22. *Нека решење u почетно-граничног проблема (3.8)-(3.10) припада простору $C^2([0,T], C(\bar{\Omega})) \cap C_+^{\alpha}([0,T], H^2(\Omega)) \cap C([0,T], H^3(\Omega)) \cap H^1((0,T),$ $C^1(\bar{\Omega}))$ и нека је $\sigma \geq 1/(3-2^{1-\alpha})$. Тада решење v диференцијске схеме (3.59)-(3.61) са $\bar{f} = T_1 T_2 f$ конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau). \tag{3.62}$$

Доказ. Доказ следи из (3.28), (3.30), (3.49) и (3.50). □

3.4 Једначина са промењљивим коефицијентима

На крају овог поглавља размотримо једначину субдифузије са промењљивим коефицијентима (2.6) и са додатним условима (2.4), (2.5). Позитивна дефинитност оператора $\mathcal{L}$ и услови елиптичности (2.7) омогућују да се и у овом случају изведу априорне оцене сличне као у претходно размотреним случајевима.

3.4.1 Имплицитна схема

Имплицитна схема за почетно-гранични проблем (2.6), (2.4), (2.5) гласи

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^k + \mathcal{L}_h v^k = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, M, \tag{3.63}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau^+, \tag{3.64}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.65}$$

где је дискретна апроксимација оператора $\mathcal{L}$ дата са

$$\mathcal{L}_h v = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \Big[\big(a_{ij} v_{x_j}\big)_{\bar{x}_i} + \big(a_{ij} v_{\bar{x}_j}\big)_{x_i} \Big] + av. \tag{3.66}$$

У даљем раду сматраћемо да $a_{ij}, a \in C(\bar{\Omega})$.

Теорема 3.23. *Нека је $0 < \alpha < 1$ и $a_{ij}, a \in C(\bar{\Omega})$. Диференцијска схема (3.63)-(3.65) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{t\tau})} \le C \left\|\bar{f}\right\|_{L_2(Q_{h\tau})}.$$

Доказ. Множећи скаларно (3.63) са v^k добијамо

$$\big(v^k, D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^k\big)_h + \big(v^k, \mathcal{L}_h v^k\big)_h = \big(v^k, \bar{f}^k\big)_h.$$

Пошто је $\mathcal{L}_h$ позитивно дефинитан и самоконјугован, енергетска норма $\|v\|_{\mathcal{L}_h} = (\mathcal{L}_h v, v)^{1/2}$ је добро дефинисана. Користећи особине елиптичности (2.7) важи

$$c_0 |v|^2_{H^1(\omega_h)} \le \|v\|^2_{\mathcal{L}_h} \le c_1 |v|^2_{H^1(\omega_h)} + c_2 \|v\|^2_h, \tag{3.67}$$

где је $c_1 = 2\max_{i,j} \|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}$ и $c_2 = \|a\|_{C(\bar{\Omega})}$. Из последње једнакости тако добијамо

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|^2_h + c_0\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} \le \varepsilon\|v^k\|^2_h + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Даље је, на основу (3.41)

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|^2_h + \left(2c_0 - \frac{\varepsilon}{8}\right)\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} \le \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Нека је $\varepsilon = 8c_0$. Додајмо левој и десној страни $\delta\|v^k\|^2_h$ и поново применимо (3.41)

$$16c_0 D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|^2_h + \left(16c_0^2 - \frac{\delta}{16}\right)\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} + \delta\left\|v^k\right\|^2_h \le \left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Изаберимо δ тако да је $16c_0^2 - \frac{\delta}{16} = \delta$. Одатле добијамо да је $\delta = \frac{256c_0^2}{17}$, па имамо

$$16c_0 D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|^2_h + \frac{256c_0^2}{17}\left(\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} + \left\|v^k\right\|^2_h\right) \le \left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Ако је $C = 16c_0\min\{1, \frac{16c_0}{17}\}$, тим пре важи неједнакост

$$C\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h + |v^k|_{H^1(\omega_h)} + \left\|v^k\right\|_h\right) \le \left\|\bar{f}^k\right\|^2_h.$$

Множећи са τ и сумирајући по $k = 1, \ldots, M$, добијамо тражену априорну оцену. $\square$

Задатак који задовољава грешка ове схеме је следећи

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z^k + \mathcal{L}_h z^k = \psi^k, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, \ldots, M, \tag{3.68}$$

$$z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \gamma_h \times \omega^+_\tau, \tag{3.69}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{3.70}$$

где је

$$\psi^k = \left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k - T_1T_2D^{\alpha}_{t,0+}u^k\right) + \left(\mathcal{L}_h u^k - T_1T_2\mathcal{L}u^k\right) = \bar{\xi}^k + \eta^k + \sum_{i,j=1}^{2}\eta^k_{ij,x_i},$$

при чему је $\bar{\xi}$ већ дефинисано и

$$\eta = au - T_1T_2(au),$$

$$\eta_{ij} = T_{3-i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\Big|_{(x-0.5he_i,t)} - \frac{1}{2}\Big[\left(a_{ij}u_{\bar{x}_j}\right)\Big|_{(x,t)} + \left(a_{ij}u_{x_j}\right)\Big|_{(x-he_i,t)}\Big], \quad i,j = 1,2.$$

Теорема 3.24. *Нека је* $0 < \alpha < 1$ *и* $a_{ij}, a \in C(\bar{\Omega})$. *Диференцијска схема (3.68)-(3.70) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C\left[\|\bar{\xi}\|_{L^2(Q_{h\tau})} + \|\eta\|_{L^2(Q_{h\tau})} + \sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|_{L^2(Q_{ih\tau})}\right].$$

Доказ. Доказ је изводи на исти начин као и доказ теореме 3.24, при чему се у оцени чланова на десној страни који садрже коначне разлике користи и парцијална сумација. □

Теорема 3.25. *Нека је* $a_{ij}, a \in H^2(\Omega)$ *и нека решење и почетно-граничног проблема (2.6), (2.4), (2.5) припада простору* $C^2([0,T], C(\bar{\Omega})) \cap C([0,T], H^3(\Omega))$. *Тада решење* v *схеме (3.63)-(3.65) са* $\bar{f} = T_1 T_2 f$ *конвергира ка* u *и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{2-\alpha}).$$

Доказ. Нека је $\bar{\xi} = \xi_1 + \bar{\xi}_2$ као у доказу теореме 3.17. Дакле, важи оцена

$$\|\bar{\xi}\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq C\left(\tau^{2-\alpha}\|u\|_{C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))} + h^2\|u\|_{C^{\alpha}_{+}([0,T],H^2(\Omega))}\right). \tag{3.71}$$

Члан η оценимо помоћу леме Брамбла-Хилберта. Нека је $K = K(x) = (x_1 - h/2, x_1 + h/2) \times (x_2 - h/2, x_2 + h/2)$ елементарни квадрат који се сменом промењљивих (3.57) пресликава на, раније дефинисан, канонски квадрат E. Из репрезентације функционала η

$$\eta = au - \int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_2-h/2}^{x_2-h/2} a(x')u(x')dx_1'dx_2' = \tilde{a}\tilde{u} - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \tilde{a}\tilde{u}d\tilde{x}_1'd\tilde{x}_2' \equiv \tilde{\eta}$$

следи ограниченост

$$|\tilde{\eta}| \leq \|\tilde{a}\tilde{u}\|_{C(\bar{E})} \leq C\|\tilde{a}\tilde{u}\|_{H^2(E)},$$

док је линеарност очигледна. Важи да је $\tilde{\eta} = 0$ када је au једнак неком од елемената скупа $\{1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2.\}$ Враћајући се на старе промењљиве и на основу леме 1.8 следи

$$|\eta| \leq Ch|au|_{H^2(K)}.$$

Сумирајући ову неједнакост по чворовима мреже ω_h и користећи особине мултипликатора у просторима Собољева добијамо

$$\|\eta\|_h \le Ch^2 \|au\|_{H^2(\Omega)} \le Ch^2 \|a\|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} . \tag{3.72}$$

Најзад, после сумирања по чворовима мреже ω_τ^+, следи

$$\|\eta\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2 \|a\|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{C([0,T],H^2(\Omega))} .$$

Да бисмо оценили члан η_{ij}, разложићемо га претходно на следећи начин

$$\begin{aligned}
&\eta_{ij} = \eta_{ij1} + \eta_{ij2} + \eta_{ij3} + \eta_{ij4}, \qquad \text{где је}\\
&\eta_{ij1} = T_{3-i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\Big|_{(x-0.5he_i,t)} - T_{3-i}\,(a_{ij})\,\Big|_{(x-0.5he_i)} T_{3-i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\Big|_{(x-0.5he_i,t)},\\
&\eta_{ij2} = T_{3-i}\,(a_{ij})\,\Big|_{(x-0.5he_i)}\Big[T_{3-i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\Big|_{(x-0.5he_i,t)}\\
&\qquad -\frac{1}{2}\Big(u_{\bar{x}_j}(x,t) + u_{x_j}(x-he_i,t)\Big)\Big],\\
&\eta_{ij3} = \frac{1}{2}\Big[T_{3-i}\,(a_{ij})\,\Big|_{(x-0.5he_i)} - \frac{1}{2}\Big(a_{ij}(x) + a_{ij}(x-he_i)\Big)\Big]\\
&\qquad \times\Big[u_{\bar{x}_j}(x,t) + u_{x_j}(x-he_i,t)\Big],\\
&\eta_{ij4} = -\frac{1}{4}\Big[a_{ij}(x) - a_{ij}(x-he_i)\Big]\Big[u_{\bar{x}_j}(x,t) - u_{x_j}(x-he_i,t)\Big].
\end{aligned}$$

Покажимо како се може оценити члан η_{ij1}. Нека је $K_i = K(x-0.5he_i)$ елементарни квадрат који се сменом променљивих

$$x_i' = x_i - h/2 + \tilde{x}_i h, \ \ -1/2 \le \tilde{x}_i \le 1/2; \quad x_{3-i}' = x_{3-i} + \tilde{x}_{3-i}h, \ \ -1/2 \le \tilde{x}_{3-i} \le 1/2,$$

пресликава на канонски квадрат E. Из репрезентације

$$\eta_{ij1}(a_{ij},u) = \frac{1}{h}\left[\int_{-1/2}^{1/2} \tilde{a}_{ij}(\tilde{x})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j}\,d\tilde{x}_{3-i}' - \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{a}_{ij}(\tilde{x})\,d\tilde{x}_{3-i}' \times \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j}(\tilde{x})\,d\tilde{x}_{3-i}'\right],$$

следи

$$|\eta_{ij1}(a_{ij},u)| \le \frac{C}{h}\max_{\bar{E}}|\tilde{a}_{ij}|\max_{\bar{E}}\left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j}\right|$$

те ограниченост функционала следи из теорема потапања, односно,

$$\max_{\bar{E}}|\tilde{a}_{ij}| \le C\|\tilde{a}_{ij}\|_{W_q^\lambda(\bar{E})} \text{ за } \lambda > \frac{2}{q} \quad \text{и} \quad \max_{\bar{E}}\left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j}\right| \le C\|\tilde{u}\|_{W_r^\mu(\bar{E})} \text{ за } \mu > 1 + \frac{2}{r},$$

док се линеарност показује непосредно. Дакле $\tilde{\eta}_{ij}$ је ограничен билинеарни функционал аргумента $(\tilde{a}_{ij}, \tilde{u}) \in W_q^\lambda(\bar{E}) \times W_r^\mu(\bar{E})$, које се анулира када је $\tilde{a}_{ij}$ константа или када је $\tilde{u}$ неки елемент из скупа $\{1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$. На основу леме 1.9 имамо

$$|\eta_{ij1}| \leq \frac{C}{h} |\tilde{a}_{ij}|_{W_q^\lambda(\bar{E})} |\tilde{u}|_{W_r^\mu(\bar{E})}, \quad \lambda \leq 1, \mu \leq 2.$$

и враћањем на првобитне променљиве следи

$$|\eta_{ij1}| \leq Ch^{\lambda+\mu-\frac{2}{q}-\frac{2}{r}-1} |a_{ij}|_{W_q^\lambda(K_i)} |u|_{W_r^\mu(K_i)}, \quad \lambda \leq 1, \mu \leq 2.$$

Ако узмемо да је $r = 2q/(q-2)$, биће $\mu > 2 - \frac{2}{q}$, одакле следи $2 < \lambda + \mu \leq 3$. Сада, на основу Хелдерове неједнакости и потапања

$$W_2^{\lambda+\mu-1}(\Omega) \hookrightarrow W_q^\lambda(\Omega) \text{ за } \mu > 2 - \frac{2}{q}, \quad W_2^{\lambda+\mu}(\Omega) \hookrightarrow W_{2q/(q-2)}^\mu(\Omega) \text{ за } \lambda > \frac{2}{q},$$

добијамо

$$\begin{aligned}
\|\eta_{ij1}\|_{ih} &\leq \left(h^2 \sum_{x \in \omega_{ih}} C^2 h^{2(\lambda+\mu-2)} |a_{ij}|^2_{W_q^\lambda(K_i)} |u|^2_{W^\mu_{2q/(q-2)}(K_i)} \right)^{1/2} \\
&\leq Ch^{\lambda+\mu-1} \, |a_{ij}|_{W_q^\lambda(\Omega)} \, |u|_{W^\mu_{2q/(q-2)}(\Omega)} \\
&\leq Ch^{\lambda+\mu-1} \, \|a_{ij}\|_{W_2^{\lambda+\mu-1}(\Omega)} \, \|u\|_{W_2^{\lambda+\mu}(\Omega)}, \quad 2 < \lambda + \mu \leq 3.
\end{aligned}$$

За $\lambda + \mu = 3$, сумирајући по чворовима мреже ω_τ^+, важи

$$\|\eta_{ij1}\|_{L_2(Q_{ih\tau})} \leq Ch^2 \, \|a_{ij}\|_{H^2(\Omega)} \, \|u\|_{C([0,T], H^3(\Omega).)} \tag{3.73}$$

За други члан, односно η_{ij2} важи

$$|\eta_{ij2}| \leq \frac{C}{h} \|\tilde{a}\|_{C(\bar{E})} \|\tilde{u}\|_{W_2^s(\bar{E})}, \quad s > 1,$$

па је то ограничен линеаран функционал од $(\tilde{a}_{ij}, \tilde{u}) \in C(\bar{E}) \times W_2^s(\bar{E})$ који се анулира када је $\tilde{u}$ полином највише другог степена. Отуда, применом леме 1.9 и преласком на старе координате добијамо

$$|\eta_{ij2}|_{ih} \leq Ch^{s-2} |a|_{W_2^2(\Omega)} |u|_{W_2^s(\Omega)}, \quad 1 < s \leq 3,$$

па после сумирања по чворовима мреже ω_{ih}, за $s=3$, следи

$$\|\eta_{ij2}\|_{ih} \le Ch^2\|a\|_{H^2(\Omega)}\|u(\cdot,t)\|_{H^3(\Omega)},$$

а значи и оцена облика (3.73).

Изрази η_{ijk}, $k=3,4$ се могу оценити овако

$$|\eta_{ijk}| \le \frac{C}{h}\max_{\bar{E}}\|\tilde{a}_{ij}\|\max_{\bar{E}}\|\tilde{u}\| \le \frac{C}{h}\|\tilde{a}_{ij}\|_{W_q^\lambda(E)}\|\tilde{u}\|_{W^\mu_{2q/(q-2)}(E)},\ \lambda > \frac{2}{q},\ \mu > 1-\frac{2}{q}.$$

Применом леме Брамбла–Хилберта и за ова два члана добијамо оцене облика (3.73). Тврђење теореме следи на основу (3.71) – (3.73). $\square$

Ова схема је стабилна и у норми простора $H^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})$.

Теорема 3.26. *Нека је $0<\alpha<1$ и $a_{ij}\in C^1(\bar{Q})$. Тада је схема (3.63)-(3.65) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{H^{2,\alpha}_+(Q_{t\tau})} \le C\left\|\bar{f}\right\|_{L_2(Q_{h\tau})}.$$

Доказ. Доказ се изводи аналогно доказу теореме 3.18. Дакле, једначину (3.63) множимо скаларно са $\mathcal{L}_h v^k$ и $D^\alpha_{t,0+,\tau}v^k$. Због услова (2.7), производ $(\mathcal{L}_h v^k, D^\alpha_{t,0+,\tau}v^k)_h$ је позитиван, а важи и дискретни аналогон друге основне неједнакости ([28])

$$|v|_{H^2(\omega_h)} \le C\|\mathcal{L}_h v\|_{L_2(\omega_h)} + ||v||_{H^1(\omega_h)}.$$

$\square$

Теорема 3.27. *Нека је $0<\alpha<1$. Диференцијска схема (3.68)-(3.70) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{H^{2,\alpha}_+(Q_{h\tau})} \le C\left[\left\|\bar{\xi}\right\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\eta\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \sum_{i,j=1}^{2}\|\eta_{ij,x_i}\|_{L_2(Q_{ih\tau})}\right].$$

Оцењујући η_{ij,x_i} на сличан начин као у доказу теореме 3.26 долазимо до исте оцене брзине конвегренције под нешто јачим ограничењима на глаткост решења, десне стране и коефицијената једначине. ([5],[23]).

На крају овог поглавља изведимо неколико закључака. Имплицитна схема, иако безусловно стабилна, није економична за $n\ge 2$. Једино је у једнодимензионом случају матрица система тродијагонална и систем се може решити помоћу $O(N)$ аритметичких операција где је N број непознатих чворова мреже. Међутим, за $n \geq 2$, у општем случају, матрица система се не може свести на $(2m+1)-$ дијагонални облик за $m = const$ ([21]). Осим тога, рачунска сложеност и време заузећа процесора постаје критично када се примене нумерички алгоритми да би се решио вишедимензиони проблем. Природно се намеће проблем конструкције схеме која би спајала добре особине претходних схема, тј. била економична и апсолутно стабилна. Те особине имају различите варијанте схема промењливих праваца ([20],[45]).

4 Схеме промењљивих праваца

4.1 Адитивна схема

Уведимо мрежу $\bar{Q}_{h\tau}$ у области $\bar{Q} = [0,1] \times [0,1] \times [0,T]$ на исти начин као у одељку 3.3 за $M = 2m$ и апроксимирајмо почетно-гранични проблем (2.3) – (2.5) следећом схемом

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^{2k-1} - 2v^{2k-1}_{x_1\bar{x}_1} = \bar{f}^{2k-1}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1,2,\dots,m \tag{4.1}$$

$$D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^{2k} - 2v^{2k}_{x_2\bar{x}_2} = \bar{f}^{2k}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1,2,\dots,m \tag{4.2}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \gamma_h \times \omega_h^+, \tag{4.3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h. \tag{4.4}$$

Ако је функција f са десне стране непрекидна функција, онда узимамо $f = \bar{f}$. У супротном се мора извршити усредњавање вредности што се постиже операторима Стеклова, рецимо $\bar{f} = T_1 T_2 f$.

Идеја адитивне схеме је у томе да се дводимензиони проблем сведе на два једнодимензиона. Због тога је схема економична. Ниједна од једначина ове схеме не апроксимира једначину (2.3) али је њихов полузбир апроксимира. Вредности непознате функције v у чворовима мреже се добијају редом по временским слојевима. Скуп унутрашњих чворова на једном слоју може да се посматра као колекција чворова дуж хоризонталних и вертикалних редова. На непарним слојевима решење се добија дуж редова а на парним дуж колона, решавањем N независних линеарних система са тродијагоналном матрицом. Такав систем се ефикасно решава Томасовим алгоритмом. Са друге стране, решење v^k на $k-$том временском слоју експлицитно зависи од решења на свим претходним слојевима па је нумеричка сложеност $O(N^2M^2)$. Оцене грешке ћемо изводити у већ познатој норми која је, због природе апроксимације, облика

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = \left[\tau \sum_{k=1}^{M} \left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau} \big(\|v\|_h^2 \big) \right)^k + \tau \sum_{k=1}^{m} \left(\big\|v^{2k-1}_{\bar{x}_1}\big\|^2_{L^2(\omega_{1h})} + \big\|v^{2k}_{\bar{x}_2}\big\|^2_{L_2(\omega_{2h})} \right) \right]^{1/2}.$$

Сада ћемо навести тврђење које гарантује стабилност адитивне диференцијске схеме.

Теорема 4.1. ([18]) *Нека је* $0 < \alpha < 1$. *Тада је диференцијска схема (4.1)-(4.4) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{4.5}$$

Доказ. Помножимо скаларно једначине (4.1) и (4.2) са v^{2k-1} и v^{2k}, редом. Добићемо

$$\left(v^{2k-1}, D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^{2k-1}\right)_h - 2\left(v^{2k-1}_{x_1\bar{x}_1}, v^{2k-1}\right)_h = \left(\bar{f}^{2k-1}, v^{2k-1}\right)_h,$$

$$\left(v^{2k}, D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^{2k}\right)_h - 2\left(v^{2k}_{x_2\bar{x}_2}, v^{2k}\right)_h = \left(\bar{f}^{2k}, v^{2k}\right)_h.$$

Користећи лему 3.3 и парцијалну сумацију на левој страни претходних једнакости а неједнакост Коши–Шварца и ε неједнакост на десној страни, добијамо

$$\frac{1}{2}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\big(\|v\|_h^2\big)\right)^{2k-1} + 2\left\|v^{2k-1}_{\bar{x_1}}\right\|^2_{1h} \leq \varepsilon\left\|v^{2k-1}\right\|^2_h + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^{2k-1}\right\|^2_h,$$

$$\frac{1}{2}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\big(\|v\|_h^2\big)\right)^{2k} + 2\left\|v^{2k}_{\bar{x_2}}\right\|^2_{2h} \leq \varepsilon\left\|v^{2k}\right\|^2_h + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^{2k}\right\|^2_h.$$

Ако искористимо дискретну Поенкареову неједнакост (3.21), имамо да је

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\big(\|v\|_h^2\big)\right)^{2k-1} + \left(4 - \frac{2}{8}\varepsilon\right)\left\|v^{2k-1}_{\bar{x_1}}\right\|^2_{1h} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}^{2k+1}\right\|^2_h,$$

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\big(\|v\|_h^2\big)\right)^{2k} + \left(4 - \frac{2}{8}\varepsilon\right)\left\|v^{2k}_{\bar{x_2}}\right\|^2_{2h} \leq \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{f}^{2k}\right\|^2_h.$$

Сабирајући последње две неједнакости за $\varepsilon = 12$, множећи са τ и сумирајући по $k = 1, \dots, m$, добијамо априорну оцену (4.5) где је $C = \frac{1}{24}$. □

4.1.1 Конвергенција адитивне диференцијске схеме

Нека је u решење почетно-граничног проблема (2.3) – (2.5) и v решење дискретизованог задатка (4.1) – (4.4) са $\bar{f} = T_1T_2f$. Грешка схеме $z = u - v$ је функција дефинисана у чворовима мреже $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Стављајући $v = u - z$ у (4.1) – (4.2) добијамо следеће

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(u-z)\right)^{2k-1} - 2(u-z)^{2k-1}_{x_1\bar{x}_1} = T_1T_2f^{2k-1}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(u-z)\right)^{2k} - 2(u-z)^{2k}_{x_2\bar{x}_2} = T_1T_2f^{2k}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

односно

$$D_{t,0+,\tau}^{\alpha} z^{2k-1} - 2 z_{x_1 \bar{x}_1}^{2k-1} = \psi_1^{2k-1}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{4.6}$$

$$D_{t,0+,\tau}^{\alpha} z^{2k} - 2 z_{x_2 \bar{x}_2}^{2k} = \psi_2^{2k}, \quad x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{4.7}$$

где је

$$\begin{aligned}
\psi_1^{2k-1} =& D_{t,0+,\tau}^{\alpha} u^{2k-1} - 2 u_{x_1 \bar{x}_1}^{2k-1} - T_1 T_2 \left(D_{t,0+}^{\alpha} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^{2k-1} \\
&= \left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha} u - T_1 T_2 D_{t,0+}^{\alpha} u \right)^{2k-1} + 2 \left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - u_{x_1 \bar{x}_1} \right)^{2k-1} \\
&+ T_1 T_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^{2k-1} = \bar{\xi}^{2k-1} + \eta_1^{2k-1} + \chi^{2k-1}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\psi_2^{2k} =& D_{t,0+,\tau}^{\alpha} u^{2k} - 2 u_{x_2 \bar{x}_2}^{2k} - T_1 T_2 \left(D_{t,0+}^{\alpha} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^{2k} \\
&= \left(D_{t,0+,\tau}^{\alpha} u - T_1 T_2 D_{t,0+}^{\alpha} u \right)^{2k} + 2 \left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u_{x_2 \bar{x}_2} \right)^{2k} \\
&- T_1 T_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^{2k} = \bar{\xi}^{2k} + \eta_2^{2k} - \chi^{2k},
\end{aligned}$$

где су $\bar{\xi}$ и η_i, $i = 1, 2$ већ дефинисани а $\chi = T_1 T_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)$. У тачкама са границе области као и у почетном тренутку грешка је једнака нули, односно

$$z = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{4.8}$$

$$z^0 = z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h. \tag{4.9}$$

Лема 4.2. ([18]) *Адитивна диференцијска схема (4.6)-(4.9) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\begin{aligned}
\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \Bigg(& \tau \sum_{k=1}^{2m} \|\bar{\xi}^k\|_h^2 + \tau \sum_{k=1}^{m} \|\zeta_1^{2k-1}\|_{1h}^2 + \tau \sum_{k=1}^{m} \|\zeta_2^{2k}\|_{2h}^2 \\
& + \tau^3 \sum_{k=1}^{m} \|\chi_t^{2k-1}\|_h^2 + \tau^{1+\alpha} \sum_{k=1}^{m} \|\chi^{2k}\|_h^2 \Bigg)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Доказ. Помножимо скаларно једначине (4.6) и (4.7) са z^{2k-1} и z^{2k}, редом.

Ако применимо парцијалну сумацију добијамо

$$\left(z^{2k-1}, D^{\alpha}_{t,0+,\tau} z^{2k-1}\right)_h + 2\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} = \left(\psi^{2k-1}_1, z^{2k-1}\right)_h =$$
$$\left(\bar{\xi}^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h - \left(\zeta^{2k-1}_1, z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right)_{1h} + \left(\chi^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h$$

и

$$\left(z^{2k}, D^{\alpha}_{t,0+,\tau} z^{2k}\right)_h + 2\left\|z^{2k}_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} = \left(\psi^{2k}_2, z^{2k}\right)_h =$$
$$\left(\bar{\xi}^{2k}, z^{2k}\right)_h - \left(\zeta^{2k}_2, z^{2k}_{\bar{x}_2}\right)_{2h} - \left(\chi^{2k}, z^{2k}\right)_h .$$

Сумирајући ове две једнакости, користећи лему 3.5 и одузимајући и додајући члан $\left(\chi^{2k}, z^{2k-1}\right)$ са десне стране, следи

$$\frac{1}{2}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(\|z\|^2_h)\right)^{2k-1} + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}\left\|z^{2k-1}_t\right\|^2_h + 2\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h}$$
$$+\frac{1}{2}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(\|z\|^2_h)\right)^{2k} + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}\left\|z^{2k}_t\right\|^2_h + 2\left\|z^{2k}_{\bar{x}_2}\right\|^2_h$$
$$\leq \left(\bar{\xi}^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h + \left(\bar{\xi}^{2k}, z^{2k}\right)_h - \left(\zeta^{2k-1}_1, z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right)_{1h} - \left(\zeta^{2k}_2, z^{2k}_{\bar{x}_2}\right)_{2h}$$
$$-\left(\chi^{2k} - \chi^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h - \left(\chi^{2k}, z^{2k} - z^{2k-1}\right)_h .$$

Сада оценимо чланове на десној страни.

$$\left|\left(\bar{\xi}^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|z^{2k-1}\right\|^2_h + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{\xi}^{2k-1}\right\|^2_h \leq \frac{\varepsilon}{16}\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{\xi}^{2k-1}\right\|^2_h ,$$

$$\left|\left(\bar{\xi}^{2k}, z^{2k}\right)_h\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|z^{2k}\right\|^2_h + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{\xi}^{2k}\right\|^2_h \leq \frac{\varepsilon}{16}\left\|z^{2k}_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\bar{\xi}^{2k}\right\|^2_h ,$$

$$\left|\left(\zeta^{2k-1}_1, z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right)_{1h}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\zeta^{2k-1}_1\right\|^2_{1h} ,$$

$$\left|\left(\zeta^{2k}_2, z^{2k}_{\bar{x}_2}\right)_{2h}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|z^{2k}_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\zeta^{2k}_2\right\|^2_{2h} ,$$

$$\left|\left(\chi^{2k} - \chi^{2k-1}, z^{2k-1}\right)_h\right| = \left|\left(\tau\chi^{2k-1}_t, z^{2k-1}\right)_h\right| \leq \frac{\varepsilon}{16}\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{\tau^2}{2\varepsilon}\left\|\chi^{2k-1}_t\right\|^2_h ,$$

$$\left|\left(\chi^{2k}, z^{2k} - z^{2k-1}\right)_h\right| = \tau\left|\left(\chi^{2k}, z^{2k-1}_t\right)_h\right| \leq \frac{\tau\delta}{2}\|z^{2k-1}_t\|^2_h + \frac{\tau}{2\delta}\|\chi^{2k}\|^2_h.$$

Из последње неједнакости, за $\delta = c\tau^{1-\alpha}$, следи

$$\left|\left(\chi^{2k}, z^{2k} - z^{2k-1}\right)_h\right| \leq \frac{c}{2}\tau^{2-\alpha}\|z^{2k-1}_t\|^2_h + \frac{\tau^{\alpha}}{2c}\|\chi^{2k}\|^2_h.$$

За $c=\frac{2(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}$ после очигледних мајорација, добијамо

$$\begin{aligned}
&\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left(\|z\|_h^2\right)\right)^{2k-1}+\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left(\|z\|_h^2\right)\right)^{2k}+\left(4-\frac{5\varepsilon}{4}\right)\left\|z^{2k-1}_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h}+\left(4-\frac{5\varepsilon}{4}\right)\left\|z^{2k}_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h}\\
&\le C\left(\left\|\bar{\xi}^{2k-1}\right\|^2_h+\left\|\bar{\xi}^{2k}\right\|^2_h+\left\|\zeta_1^{2k-1}\right\|^2_{1h}+\left\|\zeta_2^{2k}\right\|^2_{2h}+\tau^2\left\|\chi_t^{2k-1}\right\|^2_h+\tau^{\alpha}\left\|\chi^{2k}\right\|^2_h\right),
\end{aligned}$$

За $\varepsilon=\frac{12}{5}$, множећи последњу неједнакост са τ и сумирајући по $k=1,\dots,m$, добијамо априорну оцену (4.10) где је $C=\max\left\{\frac{5}{12},\frac{1}{c}\right\}$. □

Дакле, да би се проценила величина грешке уведене адитивне схеме довољно је оценити чланове који се јављају на десној страни (4.10).

Теорема 4.3. ([18]) *Нека решење u почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору $C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))\cap C^1([0,T],H^2(\Omega))\cap C([0,T],H^3(\Omega))$. Тада решење v диференцијске схеме (4.1)-(4.4) са $\bar{f}=T_1T_2f$ конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције:*

$$\|u-v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}=O(h^2+\tau^{\alpha/2}). \tag{4.11}$$

Доказ. Изрази $\bar{\xi}$ и ζ_i су већ оцењени раније и за њих важе оцене облика (3.71) и (3.50). Члан χ се лако оцењује директно

$$\|\chi(\cdot,t)\|_h\le C\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)},$$

што повлачи следеће

$$\left(\tau^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{m}\|\chi^{2k}(\cdot,t_k)\|_h^2\right)^{1/2}\le C\tau^{\alpha/2}\max_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)}=C\tau^{\alpha/2}\|u\|_{C([0,T],H^2(\Omega))}. \tag{4.12}$$

Како је $\chi_t=\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau}\frac{\partial\chi(\cdot,t')}{\partial t}\,dt'\le\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|$ следи

$$\left(\tau^{3}\sum_{k=1}^{m}\|\chi_t^{2k-1}(\cdot,t_k)\|_h^2\right)^{1/2}\le C\tau\|u\|_{C^1([0,T],H^2(\Omega))}, \tag{4.13}$$

па је теорема доказана у потпуности. □

4.1.2 Нумерички експеримент

Посматрајмо почетно-гранични проблем (2.3)-(2.5) са

$$f(x,t) = f(x_1,x_2,t) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)t^3\left(\frac{t^{-\alpha}\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} + 2\pi^2\right),$$

чије је тачно решење

$$u(x,t) = u(x_1,x_2,t) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\,t^3.$$

За различите вредности α, проблем је решен применом адитивне схеме (4.1)-(4.4).

Претпоставимо да је $E(h,\tau) = O(h^p+\tau^q)$, где је $E(h,\tau)$ нека норма грешке z. Тада је, за довољно мало τ, $E(h,\tau)\approx c_1 h^p$, односно

$$\log_2 E(h,\tau) \approx \log_2 c_1 + p\log_2 h, \quad \frac{E(h,\tau)}{E(\frac{h}{2},\tau)} \approx 2^p, \quad \log_2\frac{E(h,\tau)}{E(\frac{h}{2},\tau)} \approx p.$$

Слично, за довољно мало h, $E(h,\tau)\approx c_2\tau^q$, односно

$$\log_2 E(h,\tau) \approx \log_2 c_2 + q\log_2 \tau, \quad \frac{E(h,\tau)}{E(h,\frac{\tau}{2})} \approx 2^q, \quad \log_2\frac{E(h,\tau)}{E(h,\frac{\tau}{2})} \approx q.$$

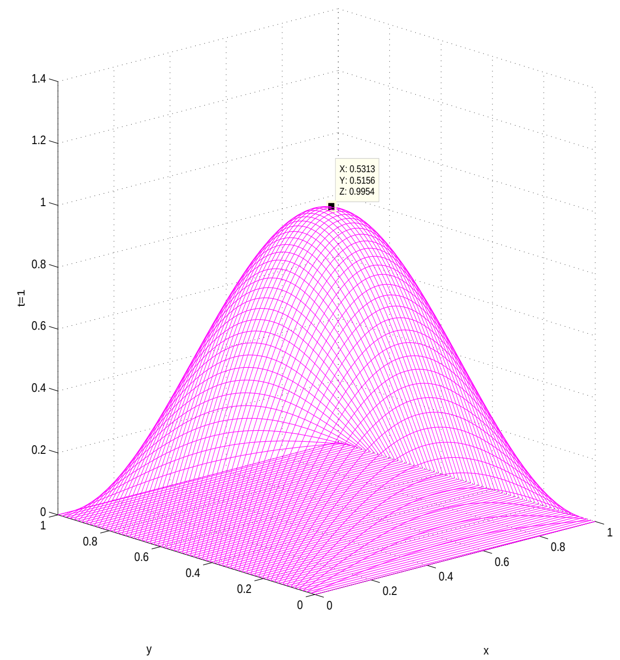
Норма грешке и брзина конвергенције како у правцу просторних, тако и у правцу временске координате, приказани су у следећим табелама. Добили смо оцену у нормама $\|\cdot\|_{L^2(Q_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$. Дати резултати сугеришу да је брзина конвергенције у правцу t чак већа него предвиђена $O(\tau^{\alpha/2})$. То може бити тема нашег даљег истраживања.

Табела 1: Грешка и брзина конвергенције за фиксирано $\tau = 2^{-12}$.

α	h	$\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})}$	$\log_2\frac{\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})}}{\|z\|_{L_2(Q_{h/2\tau})}}$	$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$	$\log_2\frac{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}}{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h/2\tau})}}$
0.5	2^{-2}	$9.07810\cdot 10^{-3}$	2.03	$3.15568\cdot 10^{-2}$	2.01
	2^{-3}	$2.22514\cdot 10^{-3}$	2.01	$7.85253\cdot 10^{-3}$	2.00
	2^{-4}	$5.53610\cdot 10^{-4}$	2.00	$1.96106\cdot 10^{-3}$	2.00
	2^{-5}	$1.38200\cdot 10^{-4}$	/	$1.38200\cdot 10^{-4}$	/
0.9	2^{-2}	$8.54922\cdot 10^{-3}$	2.02	$3.68682\cdot 10^{-3}$	2.01
	2^{-3}	$2.10267\cdot 10^{-3}$	2.00	$8.33999\cdot 10^{-3}$	2.00
	2^{-4}	$5.25980\cdot 10^{-4}$	1.97	$2.09138\cdot 10^{-3}$	1.98
	2^{-5}	$1.33970\cdot 10^{-4}$	/	$5.32060\cdot 10^{-4}$	/

Табела 2: Грешка и брзина конвергенције за фиксирано $h = 2^{-11}$.

α	τ	$\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})}$	$\log_2 \frac{\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})}}{\|z\|_{L_2(Q_{h\tau/2})}}$	$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}$	$\log_2 \frac{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}}{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau/2})}}$
0.5	2^{-3}	$7.57410 \cdot 10^{-4}$	1.47	$2.58562 \cdot 10^{-3}$	1.46
	2^{-4}	$2.74110 \cdot 10^{-4}$	1.47	$9.37210 \cdot 10^{-4}$	1.47
	2^{-5}	$9.90400 \cdot 10^{-5}$	1.47	$3.38800 \cdot 10^{-4}$	1.47
	2^{-6}	$3.56710 \cdot 10^{-5}$	/	$1.22040 \cdot 10^{-4}$	/
0.9	2^{-3}	$3.68682 \cdot 10^{-3}$	1.12	$1.29852 \cdot 10^{-2}$	1.11
	2^{-4}	$1.70209 \cdot 10^{-3}$	1.11	$6.03312 \cdot 10^{-3}$	1.11
	2^{-5}	$7.90220 \cdot 10^{-4}$	1.10	$2.80974 \cdot 10^{-3}$	1.10
	2^{-6}	$3.67880 \cdot 10^{-4}$	/	$1.31002 \cdot 10^{-3}$	/



Слика 1: Нумеричко решење на временском слоју $t_M = 1$, за $\alpha = 0.9$, $h = 2^{-6}$ и $\tau = 2^{-6}$

4.2 Факторизована схема

4.2.1 Порекло факторизоване схеме

Посматрајмо $n-$димензиону параболичку једначину

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} L_i u + f, \quad (x,t) \in (0,1)^n \times (0,T)$$

са почетним и граничним условима

$$u(x,0)=0,\quad x\in\bar\Omega,\qquad\qquad u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t\in(0,T),$$

где је $L_i u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Ако уведемо равномерну мрежу ω_h у области $(0,1)^n$ са кораком $h=1/N$ и мрежу ω_τ у области $(0,T)$ са кораком $\tau=1/M$, на уобичајени начин, дати задатак можемо апроксимирати експлицитном

$$v_t^k+\Lambda v^k=\bar f^k,\quad x\in\omega_h,\quad k=1,\dots M, \tag{4.14}$$

или имплицитном схемом

$$v_t^k+\Lambda \hat v^k=\bar f^k,\quad x\in\omega_h,\quad k=1,\dots M, \tag{4.15}$$

са уобичајеним условима

$$v(x,0)=0,\quad x\in\bar\omega_h,\qquad v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\gamma_h\times\omega_\tau^+,$$

где је $\Lambda=\sum_{i=1}^n\Lambda_i$, $\Lambda_i v=-v_{x_i\bar x_i}$ у унутрашњим чворовима мреже а иначе нула.

У [45] се може наћи следећи резултат о стабилности диференцијске схеме облика

$$Bv_t+Av=\bar f. \tag{4.16}$$

Лема 4.4. ([45]) *Нека је $A=A^*>0$, $B=B^*>0$ и $AB=BA$. Тада је схема (4.16) стабилна ако и само ако је задовољена операторска неједнакост*

$$B-\frac{\tau}{2}A\ge 0. \tag{4.17}$$

Експлицитна схема (4.14) своди се на облик (4.16) стављајући $A=\Lambda$ и $B=I$. Даље је

$$(\Lambda v,v)_h=\sum_{i=1}^n\|v_{\bar x_i}]|_{ih}^2\le\frac{4n}{h^2}\,\|v\|_h^2,\qquad\text{односно}\qquad\Lambda\le\frac{4n}{h^2}\,I,$$

па ће релација (4.17) бити задовољена уколико је

$$I-\frac{\tau}{2}\frac{4n}{h^2}\,I=\left(1-\frac{2n\tau}{h^2}\right)I\ge 0,\qquad\text{односно}\qquad\tau\le\frac{h^2}{2n}\,.$$

Другим речима, експлицитна схема је условно стабилна, уколико кораци

h и τ задовољавају последњи услов.

Стављајући у (4.15) $\hat{v} = \tau v_t + v$ видимо да се имплицитна схема (4.15) своди се на облик (4.16) где је $A = \Lambda$ и $B = I + \tau\Lambda$. На тај начин, услов (4.17) је тривијално задовољен

$$B - \frac{\tau}{2}A = I + \tau\Lambda - \frac{\tau}{2}\Lambda = I + \frac{\tau}{2}\Lambda > 0,$$

па је имплицитна схема апсолутно стабилна. Међутим, она није економична јер на сваком временском слоју треба решавати дискретизован проблем елиптичког типа.

Размотримо схему облика

$$Bv_t + \Lambda v = \bar{f} \tag{4.18}$$

где је $B = B_1 B_2 \cdots B_n$, $B_i = I + \frac{\tau}{2}\Lambda_i$. Пишући производ $B_1 B_2 \ldots B_n$ у развијеном облику добијамо

$$B = I + \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i + \frac{\tau^2}{4}\sum_{i\neq j}^{n}\Lambda_i\Lambda_j + \cdots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_n\,.$$

Одатле, између осталог, видимо да је оператор B „близак” идентичном оператору I, па схема (4.18) апроксимира нашу једначину. Пошто су оператори Λ_i позитивно дефинитни и међусобно комутативни и пошто је $\Lambda = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_i$ непосредно закључујемо да је услов (4.17) задовољен

$$B - \frac{\tau}{2}A = I + \frac{\tau^2}{4}\sum_{i\neq j}^{n}\Lambda_i\Lambda_j + \cdots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \Lambda_1\Lambda_2\cdots\Lambda_n \geq I > 0\,,$$

па је схема (4.18) апсолутно стабилна. Оператори B_i су лако инвертибилни јер сваком од њих одговара тродијагонална матрица. Одатле следи да исто важи и за њихов производ B, па је схема (4.18) економична. Схеме оваквог типа називају се факторизованим схемама. Оне спајају добре особине експлицитне и имплицитне схеме - економичне су и апсолутно стабилне.

4.2.2 Факторизована схема за једначину субдифузије

Посматрајмо поново почетно-гранични проблем (2.3)-(2.5). Нека је дата мрежа $\bar{Q}_{h\tau}$ као и у случају имплицитне схеме. Задатак можемо апроксимирати следећом факторизованом схемом

$$\left(\left(I+\theta\tau^{\alpha}A_1\right)\left(I+\theta\tau^{\alpha}A_2\right)D^{\alpha}_{t,0+,\tau}v\right)^k-\Delta_h v^{k-1}=\bar{f}^k,\quad x\in\omega_h, \tag{4.19}$$

$k=1,2,\ldots,M,$ са датим почетним и граничним условима

$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\gamma_h\times\omega_\tau^+, \tag{4.20}$$

$$v(x,0)=0,\quad x\in\bar{\omega}_h, \tag{4.21}$$

где је I јединични оператор а θ је позитиван параметар. Оператори Δ_h, A_1 и A_2 су дати са (3.36) и (3.37). Ови оператори су самоконјуговани, позитивно дефинитни и узајамно комутативни. Такође, уколико је f непрекидна функција узећемо да је $\bar{f}=f$ а иначе $\bar{f}=T_1T_2f$. Факторизована схема је и нумерички ефикасна. Заиста, матрице придружене операторима $(I+\theta\tau^{\alpha}A_1)$ и $(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)$ су тродијагоналне. Да би се добила вредност решења v на временском слоју t_k, довољно је да се два пута примени Томасов алгоритам. Докажимо сада стабилност диференцијске схеме (4.19)-(4.21) у норми (3.31).

Теорема 4.5. ([17]) *Нека је* $0<\alpha<1$ *и* $\theta\geq\frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$. *Тада је диференцијска схема (4.19)-(4.21) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}\leq\frac{\sqrt{17}}{8}\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{4.22}$$

Доказ. Помножимо (4.19) скаларно са v^k, тј.

$$\left(v^k,BD^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h+\left(v^k,Av^{k-1}\right)_h=\left(v^k,\bar{f}^k\right)_h,$$

где је $B=\left(I+\theta\tau^{\alpha}A_1\right)\left(I+\theta\tau^{\alpha}A_2\right)$. Ако додамо и одузмемо $\left(v^k,Av^k\right)_h$ добијамо

$$\left(v^k,BD^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h+\left(v^k,Av^k\right)_h-\left(v^k,A(v^k-v^{k-1})\right)_h=\left(v^k,\bar{f}^k\right)_h. \tag{4.23}$$

Како је и оператор B позитивно дефинитан и самоконјугован, норма $\|v\|_B=(Bv,v)_h^{1/2}$ је добро дефинисана. Осим тога постоји и јединствени корен оператора B кога означавамо са $B^{1/2}$. Он је такође позитивно дефинитан и самоконјугован. Отуда, применом леме 3.5, следи

$$\left(v^k,BD^{\alpha}_{t,0+,\tau}v^k\right)_h=\left(B^{1/2}v^k,D^{\alpha}_{t,0+,\tau}B^{1/2}v^k\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}(B^{1/2}v^k, B^{1/2}v^k)_h + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}(B^{1/2}v_t^{k-1}, B^{1/2}v_t^{k-1})$$

$$= \frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_B^2 + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}\left\|v_t^{k-1}\right\|_B^2.$$

Даље је

$$\left(v^k, A(v^k - v^{k-1})\right)_h = \left(\frac{v^k + v^{k-1}}{2} + \frac{v^k - v^{k-1}}{2}, A(v^k - v^{k-1})\right)_h$$

$$= \frac{1}{2}\left(v^k + v^{k-1}, A(v^k - v^{k-1})\right) + \frac{\tau^2}{2}\left(v_t^{k-1}, Av_t^{k-1}\right)_h$$

$$= \frac{1}{2}\left\|v^k\right\|_A^2 - \frac{1}{2}\left\|v^{k-1}\right\|_A^2 + \frac{\tau^2}{2}\left\|v_t^{k-1}\right\|_A^2.$$

Применом Коши–Шварцове и ε–неједнакости из (4.23) следи

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_B^2 + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}\left\|v_t^{k-1}\right\|_B^2 + \frac{1}{2}\left\|v^k\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\left\|v^{k-1}\right\|_A^2 - \frac{\tau^2}{2}\left\|v_t^{k-1}\right\|_A^2$$
$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2 + \varepsilon\left\|v^k\right\|_h^2. \tag{4.24}$$

Важе једнакости (3.38) и (3.39). Затим, за оператор B важи следеће

$$B = I + \theta\tau^{\alpha}A + \theta^2\tau^{2\alpha}A_1A_2 \geq I, \quad B \geq \theta\tau^{\alpha}A,$$

па је

$$\|v\|_B^2 \geq \|v\|_h^2 \quad \text{и} \quad \|v\|_B^2 \geq \theta\tau^{\alpha}\|v\|_A^2.$$

На основу тога и користећи дискретну Поенкареову неједнакост (3.41), из (4.24) добијамо

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h^2 + \left(\theta\frac{1-2^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{1}{2}\right)\tau^2\left\|v_t^{k-1}\right\|_A + \frac{1}{2}\left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)}^2 + \frac{1}{2}\left|v^{k-1}\right|_{H^1(\omega_h)}^2$$
$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2 + \frac{\varepsilon}{16}\left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)}^2.$$

За $\theta \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$ израз у загради на левој страни претходне неједнакости је позитиван. За тако изабрано θ, изостављајући позитивне сабирке, тим пре важи следећа неједнакост

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h^2 + \frac{1}{2}\left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)}^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2 + \frac{\varepsilon}{16}\left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)}^2.$$

Нека је $\varepsilon = 4$. Додајмо левој и десној страни $\delta\|v^k\|_h^2$. На исти начин као и у доказу теореме 3.23 налазимо да је $\delta = \frac{64}{17}$, па добијамо

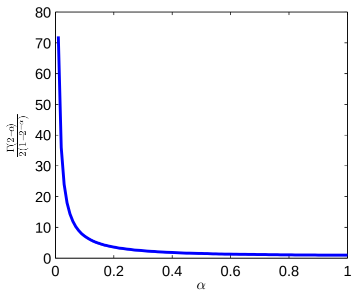
$$8D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h^2 + \frac{64}{17}\left(\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)} + \|v^k\|_h^2\right) \le \left\|\bar{f}^k\right\|_h^2.$$

Множећи са τ и сумирајући по $k = 1, \dots, M$, због позитивности првог сабирка тим пре важи

$$\frac{64}{17}\left(\tau\sum_{k=1}^{M}\left(D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left(\|v\|_h^2\right)\right)^k + \tau\sum_{k=1}^{M}\|v^k\|^2_{H^1(\omega_h)}\right) \le \left\|\bar{f}^k\right\|_h^2,$$

одакле следи априорна оцена (4.22). □

На следећој слици је приказан график функције $\theta_{min}(\alpha) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$ која представља најмању допустиву вредност θ у зависности од α.



Слика 2: Доња граница допустивих вредности за θ

4.2.3 Конвергенција факторизоване диференцијске схеме

Нека је u решење почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) а v решење дискретизованог задатка (4.19)-(4.21) са $\bar{f} = T_1T_2f$. Грешка схеме $z = u - v$ је функција дефинисана на мрежи $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$. Ако ставимо $v = u - z$ у једначине (4.19)-(4.21) добијамо следеће

$$\left(\left(I + \theta\tau^{\alpha}A_1\right)\left(I + \theta\tau^{\alpha}A_2\right)D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z\right)^k - \Delta_h z^{k-1} = \psi^k, \tag{4.25}$$

$$x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

$$z = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{4.26}$$

$$z^0 = z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \tag{4.27}$$

где је

$$\psi^k = \left(I + \theta\tau^{\alpha}A_1\right)\left(I + \theta\tau^{\alpha}A_2\right)D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k - \Delta_h u^{k-1} - T_1T_2f^k$$

$$= (I + \theta\tau^\alpha A_1)(I + \theta\tau^\alpha A_2) D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k - \Delta_h u^{k-1} - T_1 T_2 \left(D^\alpha_{t,0+} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^k$$

$$= \big((I + \theta\tau^\alpha A_1)(I + \theta\tau^\alpha A_2) D^\alpha_{t,0+,\tau} u - T_1 T_2 D^\alpha_{t,0+} u \big)^k$$

$$+ \left[\left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^k - u^{k-1}_{x_1 \bar{x}_1} \right] + \left[\left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} \right)^k - u^{k-1}_{x_2 \bar{x}_2} \right]$$

$$= D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k + \theta\tau^\alpha A D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k + \theta^2 \tau^{2\alpha} A_1 A_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k - T_1 T_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k$$

$$+ \left[\left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^k - u^k_{x_1 \bar{x}_1} + u^k_{x_1 \bar{x}_1} - u^{k-1}_{x_1 \bar{x}_1} \right] + \left[\left(T_1 T_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} \right)^k - u^k_{x_2 \bar{x}_2} + u^k_{x_2 \bar{x}_2} - u^{k-1}_{x_2 \bar{x}_2} \right]. \tag{4.28}$$

Чланове на десној страни можемо груписати и записати на следећи начин

$$D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k - T_1 T_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k = \left(D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k - D^\alpha_{t,0+} u^k \right) + \left(D^\alpha_{t,0+} u^k - T_1 T_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k \right),$$

$$\theta\tau^\alpha A D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k = \theta\tau^\alpha (A_1 + A_2) D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k = -\theta\tau^\alpha D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k_{x_1 \bar{x}_1} - \theta\tau^\alpha D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k_{x_2 \bar{x}_2},$$

$$\theta^2 \tau^{2\alpha} A_1 A_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k = \frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} A_1 A_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k + \frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} A_1 A_2 D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k$$

$$= \left(\frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k_{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2} \right)_{x_1} + \left(\frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} D^\alpha_{t,0+,\tau} u^k_{x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2} \right)_{x_2},$$

$$u^k_{x_1 \bar{x}_1} - u^{k-1}_{x_1 \bar{x}_1} = \tau \frac{(u^k_{\bar{x}_1} - u^{k-1}_{\bar{x}_1})_{x_1}}{\tau} = \left(\tau u^k_{\bar{t} \bar{x}_1} \right)_{x_1},$$

$$u^k_{x_2 \bar{x}_2} - u^{k-1}_{x_2 \bar{x}_2} = \tau \frac{(u^k_{\bar{x}_2} - u^{k-1}_{\bar{x}_2})_{x_2}}{\tau} = \left(\tau u^k_{\bar{t} \bar{x}_2} \right)_{x_2}.$$

Сада ψ^k можемо записати у следећем облику

$$\psi^k = \xi_1^k + \bar{\xi}_2^k + \zeta^k_{1,x_1} + \zeta^k_{2,x_2} + \varsigma^k_{1,x_1} + \varsigma^k_{2,x_2} + \chi^k_{1,x_1} + \chi^k_{2,x_2} + \mu^k_{1,x_1} + \mu^k_{2,x_2},$$

где су ξ_1, $\bar{\xi}_2$, ζ_1 и ζ_2 већ дефинисани, а

$$\varsigma_1 = \tau u_{\bar{t}\bar{x}_1}, \quad \varsigma_2 = \tau u_{\bar{t}\bar{x}_2},$$

$$\chi_1 = -\theta\tau^\alpha D^\alpha_{t,0+,\tau} u_{\bar{x}_1}, \quad \chi_2 = -\theta\tau^\alpha D^\alpha_{t,0+,\tau} u_{\bar{x}_2},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} D^\alpha_{t,0+,\tau} u_{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \theta^2 \tau^{2\alpha} D^\alpha_{t,0+,\tau} u_{x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2}.$$

Лема 4.6. ([17]) *Факторизована диференцијска схема (4.19)-(4.21) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \le C\Big[\|\xi_1\|^2_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\bar{\xi}_2\|^2_{L_2(Q_{h\tau})}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2}\left(\|\zeta_i\|^2_{L_2(Q_{ih\tau})} + \|\varsigma_i\|^2_{L_2(Q_{ih\tau})} + \|\chi_i\|^2_{L_2(Q_{ih\tau})} + \|\mu_i\|^2_{L_2(Q_{ih\tau})}\right)\Big]^{1/2}. \quad (4.29)$$

Доказ. Ако помножимо једначину (4.25) скаларно са z^k, добијамо

$$\left(z^k, (I+\theta\tau^\alpha A_1)(I+\theta\tau^\alpha A_2) D^\alpha_{t,0+,\tau} z^k\right)_h - \left(z^k, \Delta_h z^{k-1}\right)_h - \left(z^k, \xi_1^k\right)_h$$
$$= \left(z^k, \bar{\xi}_2^k\right)_h + \left(z^k, \zeta^k_{1,x_1}\right)_h + \left(z^k, \zeta^k_{2,x_2}\right)_h + \left(z^k, \varsigma^k_{1,x_1}\right)_h + \left(z^k, \varsigma^k_{2,x_2}\right)_h$$
$$+ \left(z^k, \chi^k_{1,x_1}\right)_h + \left(z^k, \chi^k_{2,x_2}\right)_h + \left(z^k, \mu^k_{1,x_1}\right)_h + \left(z^k, \mu^k_{2,x_2}\right)_h. \quad (4.30)$$

Сада можемо лако да оценимо чланове на десној страни. Примењујући већ познате неједнакости и парцијалну сумацију следи

$$\left|\left(z^k, \bar{\xi}_2^k\right)_h\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k\right\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\bar{\xi}_2^k\right\|_h^2 \le \frac{\varepsilon_1}{32}|z^k|^2_{H^1(\omega_h)} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\bar{\xi}_2^k\right\|_h^2, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

$$\left|\left(z^k, \zeta^k_{1,x_1}\right)\right| = \left|\left(\zeta^k_1, z^k_{\bar{x}_1}\right)_{1h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\zeta^k_1\right\|^2_{1h},$$

$$\left|\left(z^k, \zeta^k_{2,x_2}\right)\right| = \left|\left(\zeta^k_2, z^k_{\bar{x}_2}\right)_{2h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\zeta^k_2\right\|^2_{2h},$$

$$\left|\left(z^k, \varsigma^k_{1,x_1}\right)\right| = \left|\left(\varsigma^k_1, z^k_{\bar{x}_1}\right)_{1h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\varsigma^k_1\right\|^2_{1h},$$

$$\left|\left(z^k, \varsigma^k_{2,x_2}\right)\right| = \left|\left(\varsigma^k_2, z^k_{\bar{x}_2}\right)_{2h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\varsigma^k_2\right\|^2_{2h},$$

$$\left|\left(z^k, \chi^k_{1,x_1}\right)\right| = \left|\left(\chi^k_1, z^k_{\bar{x}_1}\right)_{1h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\chi^k_1\right\|^2_{1h},$$

$$\left|\left(z^k, \chi^k_{2,x_2}\right)\right| = \left|\left(\chi^k_2, z^k_{\bar{x}_2}\right)_{2h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\chi^k_2\right\|^2_{2h},$$

$$\left|\left(z^k, \mu^k_{1,x_1}\right)\right| = \left|\left(\mu^k_1, z^k_{\bar{x}_1}\right)_{1h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_1}\right\|^2_{1h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\mu^k_1\right\|^2_{1h},$$

$$\left|\left(z^k, \mu^k_{2,x_2}\right)\right| = \left|\left(\mu^k_2, z^k_{\bar{x}_2}\right)_{2h}\right| \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left\|z^k_{\bar{x}_2}\right\|^2_{2h} + \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|\mu^k_2\right\|^2_{2h}.$$

Трансформишимо леву страну у (4.30) као у доказу теореме 4.5 при чему улогу $\bar{f}^k$ игра ξ_1^k. Одатле следи

$$\frac{1}{2}D^\alpha_{t,0+,\tau}\|z^k\|^2 + \frac{1}{2}|z^k|^2_{H^1(\omega_h)} \le \frac{1}{4\varepsilon}\|\xi_1^k\|_h^2 + \left(\frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon_1}{32} + 4\frac{\varepsilon_1}{2}\right)|z^k|^2_{H^1(\omega_h)}$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon_1}\Big(\|\bar{\xi}_2^k\|_h^2 + \|\zeta_1^k\|^2_{1h} + \|\zeta_2^k\|^2_{2h} + \|\varsigma_1^k\|^2_{1h} + \|\varsigma_2^k\|^2_{2h}$$

$$+\|\chi_1^k\|_{1h}^2 + \|\chi_2^k\|_{2h}^2 + \|\mu_1^k\|_{1h}^2 + \|\mu_2^k\|_{2h}^2\Big).$$

Оцена (4.29) лако следи за довољно мало ε и ε_1 и после сумирања по $k = 1, \dots, M$. □

Теорема 4.7. ([17]) *Нека решење и почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору* $C^2([0,T], C(\bar{\Omega})) \cap C^1([0,T], H^3(\Omega))$ *и нека је* $\theta \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$. *Тада решење* v *диференцијске схеме (4.19)-(4.21) са* $\bar{f} = T_1 T_2 f$ *конвергира ка* u *и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^\alpha). \tag{4.31}$$

Доказ. Да бисмо добили оцену брзине конвергенције схеме (4.19)-(4.21) неопходно је оценити чланове на десној страни (4.29). За неке чланове је то већ учињено па важи (3.28), (3.30), (3.49), (3.50), док се χ и μ оцењују скоро директно па имамо

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{m} \|\chi_i^k\|_{ih}^2\right)^{1/2} \leq C\tau^\alpha \|u\|_{C^1([0,T], C^1(\bar{\Omega}))}, \quad i = 1, 2, \tag{4.32}$$

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{m} \|\mu_i^k\|_{ih}^2\right)^{1/2} \leq C\tau^{2\alpha} \|u\|_{C_+^\alpha([0,T], H^3(\Omega))}, \quad i = 1, 2. \tag{4.33}$$

□

Покажимо стабилност схеме и у норми $\|\cdot\|_{H_+^{2,\alpha}(\Omega_{h\tau})}$. Та оцена је дискретна верзија теореме 2.8 у случају када је $\mathcal{L} = -\Delta$.

Теорема 4.8. ([12]) *Нека је* $0 < \alpha < 1$ *и* $\theta \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$. *Тада је схема (4.19)-(4.21) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \leq C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{4.34}$$

Доказ. Множећи (4.19) скаларно са Av^k, на сличан начин као у доказу теореме 4.5 долазимо до неједнакости

$$\frac{1}{2} D_{t,0+,\tau}^\alpha \left\|v^k\right\|_{AB}^2 + \frac{\tau^{2-\alpha}(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)} \left\|v_t^{k-1}\right\|_{AB}^2 + \frac{1}{2}\left\|Av^k\right\|_h^2 + \frac{1}{2}\left\|Av^{k-1}\right\|_h^2 - \frac{\tau^2}{2}\left\|Av_t^{k-1}\right\|_h^2$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2 + \varepsilon\left\|Av^k\right\|_h^2.$$

Како важи (3.39) и

$$\|v\|_{AB}^2 \geq \|v\|_A^2 = |v|_{H^1(\omega_h)}\,, \quad \|v\|_{AB}^2 \geq \theta\tau^\alpha \|v\|_{A^2}^2 = \theta\tau^\alpha |v|_{H^2(\omega_h)}^2$$

следи

$$\frac{1}{2} D_{t,0+,\tau}^\alpha \left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)}^2 + \left(\theta \frac{1-2^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{1}{2}\right) \tau^2 \left|v_t^{k-1}\right|_{H^2(\omega_h)} + \frac{1}{2}\left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 + \frac{1}{2}\left|v^{k-1}\right|_{H^2(\omega_h)}^2$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar f^k\right\|_h^2 + \varepsilon\left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 .$$

За $\theta \geq \frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}$, $\varepsilon = 1/4$ и сумирајући по $k = 1, \ldots, M$, добијамо

$$2\tau \sum_{k=1}^M D_{t,0+,\tau}^\alpha |v^k|_{H^1(\omega_h)}^2 + \tau \sum_{k=1}^M |v^k|_{H^2(\omega_h)}^2 \leq 4\|\bar f^k\|_{L_2(Q_{h\tau})}^2,$$

односно

$$\tau \sum_{k=1}^M |v^k|_{H^2(\omega_h)}^2 \leq 4\|\bar f^k\|_{L_2(Q_{h\tau})}^2. \tag{4.35}$$

Из (4.19) следи

$$\left\|D_{t,0+,\tau}^\alpha v^k\right\|_h \leq \left\|B D_{t,0+,\tau}^\alpha v^k\right\|_h \leq \left\|A v^{k-1}\right\|_h + \left\|\bar f^k\right\|_h = \left|v^{k-1}\right|_{H^2(\omega_h)} + \left\|\bar f^k\right\|_h .$$

Квадрирајући последњу неједнакост и сумирајући по k, добијамо

$$\tau \sum_{k=1}^M \left\|D_{t,0+,\tau}^\alpha v^k\right\|_h^2 \leq 2\tau \sum_{k=1}^M \left|v^{k-1}\right|_{H^2(\omega_h)}^2 + 2\tau \sum_{k=1}^M \left\|\bar f^k\right\|_h^2 .$$

Даље је

$$\tau \sum_{k=1}^M \left|v^{k-1}\right|_{H^2(\omega_h)}^2 = \tau \sum_{k=0}^{M-1} \left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 = \tau \sum_{k=1}^{M-1} \left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 \leq \tau \sum_{k=1}^M \left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2 ,$$

па тако, узимајући у озир (4.35), добијамо

$$\tau \sum_{k=1}^M \left\|D_{t,0+,\tau}^\alpha v^k\right\|_h^2 \leq 10\tau \sum_{k=1}^M \left\|\bar f^k\right\|_h^2 .$$

Сабирањем ове неједнакости са (4.35) долазимо до

$$\tau\sum_{k=1}^{M}\left\|D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v^k\right\|_h^2+\tau\sum_{k=1}^{M}\left|v^k\right|_{H^2(\omega_h)}^2\le 14\tau\sum_{k=1}^{M}\left\|\bar{f}^k\right\|_h^2.$$

□

Пошто $f\in C(\bar{Q})$ једначина (4.19) се редукује у једначину

$$\left((I+\theta\tau^{\alpha}A_1)\,(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)\,D_{t,0+,\tau}^{\alpha}v\right)^k+Av^{k-1}=f^k,\quad x\in\omega_h, \tag{4.36}$$

Грешка z задовољава једначину

$$\left(\,(I+\theta\tau^{\alpha}A_1)\,(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)\,D_{t,0+,\tau}^{\alpha}z\right)^k+Az^{k-1}=\psi^k,\quad x\in\omega_h, \tag{4.37}$$

и хомогене услове (4.26), (4.27). Овде је означено

$$\psi^k=(I+\theta\tau^{\alpha}A_1)\,(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)\,D_{t,0+,\tau}^{\alpha}u^k-\Delta u^{k-1}-f^k$$

$$=\xi_1^k+\bar{\mu}^k+\sum_{i=1}^{2}\left(\nu_i^k+\varsigma_i^k+\bar{\chi}_i^k\right),$$

где су

$$\bar{\chi}_i=-\theta\tau^{\alpha}D_{t,0+,\tau}^{\alpha}u_{x_i\bar{x}_i}=\chi_{i,x_i},$$

$$\bar{\mu}=\theta^2\tau^{2\alpha}D_{t,0+,\tau}^{\alpha}u_{\bar{x}_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}=\mu_{1,x_1}+\mu_{2,x_2}.$$

нове величине, док су остале познате од раније.

Теорема 4.9. ([12]) *Нека важе претпоставке претходне теореме и нека решење и почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору* $C^2([0,T],$ $C(\bar{\Omega}))\cap C_+^{\alpha}([0,T],H^4(\Omega))\cap H^1((0,T),H^2(\Omega))$. *Тада решење* v *диференцијске с хеме (4.19)-(4.21) конвергира ка* u *и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u-v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})}=O(h^2+\tau^{\alpha}).$$

Доказ. Примењујући априорну оцену (4.34) на (4.37) добијамо

$$\|u-v\|_{H^{2,\alpha}(Q_{h\tau})}=\|z\|_{H^{2,\alpha}(Q_{h\tau})}\le C\|\psi\|_{L_2(Q_{h\tau})}\le C\Bigg[\|\xi_1\|_{L_2(Q_{h\tau})}$$
$$+\|\bar{\mu}\|_{L_2(Q_{h\tau})}+\sum_{i=1}^{2}\Big(\|\eta_i\|_{L_2(Q_ih\tau)}+\|\varsigma_i\|_{L_2(Q_{ih\tau})}+\|\bar{\chi}_i\|_{L_2(Q_{ih\tau})}\Big)\Bigg]$$

Чланови $\bar{\chi}_i$ и $\bar{\mu}$ се оцењују скоро директно

$$\|\bar{\chi}_i\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\tau^{\alpha} \|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T],H^2(\Omega))}, \tag{4.38}$$

$$\|\bar{\mu}\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\tau^{2\alpha} \|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T],H^4(\Omega))}. \tag{4.39}$$

Резултат следи из (3.28), (3.58), (4.38) и (4.39). □

4.2.4 Модификована факторизована схема

У новије време се, у литератури, може срести још један облик факторизоване схеме за почетно-гранични проблем (2.3)-(2.5) ([52]). За разлику од схеме која је описана у претходном одељку и код које уз фракциони извод имамо производ два диференцијска оператора, овде имамо само један његов „део”. Осим тога, нова схема је, у основи, и пре додатка тог оператора, имплицитна. Наиме, уместо једначине (4.19) посматрајмо једначину

$$\left(I + \mu^2 A_1 A_2\right) D_{t,0+,\tau}^{\alpha} v^k + A v^k = \bar{f}^k, \quad x \in \omega_h, \tag{4.40}$$

где је $\mu = \Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}$. Тој једначини придружујемо почетне и граничне услове (4.20), (4.21). И ова схема је нумерички ефикасна. Ако дискретизовани фракциони извод представимо формулом (3.2), једначина (4.40) је еквивалентна следећој

$$\left(I + \mu^2 A_1 A_2\right) \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(v^k + \sum_{l=1}^{k-1} \left[a_{k-l+1} - a_{k-l}\right] v^l - a_k v^0 \right) + A_1 v^k + A_2 v^k = \bar{f}^k,$$

која се, после множења са μ, лако трансформише у следећу једначину

$$\begin{aligned}(I + \mu A_1)(I + \mu A_2) v^k = \\ -\sum_{l=1}^{k-1} \left[a_{k-l+1} - a_{k-l}\right] \left(v^l + \mu^2 v^l_{x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}\right) + a_k \left(v^0 + \mu^2 v^0_{x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2}\right) + \mu \bar{f}^k.\end{aligned}$$

Да бисмо добили вредност решења на $k-$том слоју неопходно је решити два система једначина са тродијагоналном матрицом.

Теорема 4.10. *Нека је $0 < \alpha < 1$. Тада је диференцијска схема (4.40), (4.20), (4.21), апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{4.41}$$

Доказ. Помножимо једначину (4.40) скаларно са v^k, тј.

$$\left(v^k, \tilde{B} D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^k\right)_h + \left(v^k, A v^k\right)_h = \left(v^k, \bar{f}^k\right)_h,$$

где је $\tilde{B} = I + \mu^2 A_1 A_2$. Како је $\tilde{B}$ позитивно дефинитан и самоконјугован оператор, норма $\|v\|_{\tilde{B}} = (\tilde{B}v, v)_h^{1/2}$ је добро дефинисана. Слично као и у доказу теореме 4.5, долазимо до следећих неједнакости

$$\left(v^k, \tilde{B} D^{\alpha}_{t,0+,\tau} v^k\right)_h \geq \frac{1}{2} D^{\alpha}_{t,0+,\tau} \|v^k\|^2_{\tilde{B}},$$

$$\frac{1}{2} D^{\alpha}_{t,0+,\tau} \left\|v^k\right\|^2_{\tilde{B}} + \left\|v^k\right\|_A \leq \frac{1}{4} \left\|\bar{f}^k\right\|^2_h + \varepsilon \left\|v^k\right\|^2_h,$$

$$\tilde{B} = I + \mu^2 A_1 A_2 \geq I, \quad \|v\|^2_{\tilde{B}} \geq \|v\|^2_h,$$

$$\frac{1}{2} D^{\alpha}_{t,0+,\tau} \left\|v^k\right\|^2_h + \left|v^k\right|_{H^1(\omega_h)} \leq \frac{1}{4} \left\|\bar{f}^k\right\|^2_h + \frac{\varepsilon}{16} \left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)},$$

одакле се, на већ познати начин, добија априора оцена (4.41). □

У односу на класичну факторизовану, предност ове схеме је у томе што се постиже нешто већа брзина конвергенције у норми $\|\cdot\|_{B^{1,\alpha/2}}$.

Нека је u решење задатка (2.3)-(2.5) а v решење (4.40), (4.20), (4.21) са $\bar{f} = T_1 T_2 f$. Грешка схеме z задовољава једначину

$$\left(I + \mu^2 A_1 A_2\right) D^{\alpha}_{t,0+,\tau} z^k + A z^k = \psi^k, \quad x \in \omega_h, \tag{4.42}$$

и хомогене услове (4.26), (4.27). Функција ψ се може разложити на следећи начин

$$\psi^k = \left(I + \mu^2 A_1 A_2\right) D^{\alpha}_{t,0+,\tau} u^k + A u^k - T_1 T_2 \left(D^{\alpha}_{t,0+} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^k =$$

$$\xi_1^k + \bar{\xi}_2^k + \zeta^k_{1,x_1} + \zeta^k_{2,x_2} + \tilde{\mu}^k_{1,x_1} + \tilde{\mu}^k_{2,x_2},$$

где је

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{2} \mu^2 D^{\alpha}_{t,0+,\tau} u_{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2} \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{1}{2} \mu^2 D^{\alpha}_{t,0+,\tau} u_{x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2}.$$

Теорема 4.11. *Диференцијска схема (4.42), (4.26), (4.27) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C \left[\|\xi_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\bar{\xi}_2\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \sum_{i=1}^{2} \left(\|\zeta_i\|_{L_2(Q_{ih\tau})} + \|\tilde{\mu}_i\|_{L_2(Q_{ih\tau})} \right) \right].$$

Теорема 4.12. *Нека решење и почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору* $C^2([0,T],C(\bar\Omega))\cap C_+^\alpha([0,T],H^3(\Omega))$. *Тада решење v диференцијске схеме* (4.40), *(4.20), (4.21) са* $\bar f = T_1T_2 f$ *конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u-v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2+\min\{\tau^{2\alpha},\tau^{2-\alpha}\}).$$

Доказ. Тврђење следи из (3.28), (3.49), (3.50) и следеће оцене за члан $\tilde\mu_i$

$$\left(\tau\sum_{k=1}^{M}\|\tilde\mu_i\|_{ih}^2\right)^{1/2} \le C\mu^2\|u\|_{C_+^\alpha([0,T],H^3(\Omega))} = C\tau^{2\alpha}\|u\|_{C_+^\alpha([0,T],H^3(\Omega))}.$$

□

Такође, није тешко показати стабилност схеме и у норми $\|\cdot\|_{H_+^{2,\alpha}}$. У тој норми, под нешто јачим условом на глаткост решења добијамо исту брзину конвергенције као и у претходној теореми.

Теорема 4.13. *Нека је* $0<\alpha<1$. *Тада је диференцијска схема (4.40), (4.20), (4.21), апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C\|\bar f\|_{L_2(Q_{h\tau})}. \tag{4.43}$$

Доказ. Аналогно доказу теореме 4.8. □

Теорема 4.14. *За* $\bar f = f$, *диференцијска схема (4.42), (4.26), (4.27) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{H_+^{2,\alpha}(Q_{h\tau})} \le C\left[\|\xi_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \sum_{i=1}^{2}\|\nu_i\|_{L_2(Q_{ih\tau})} + \|\tilde\mu\|_{L_2(Q_{h\tau})}\right],$$

где је $\tilde\mu = \mu^2 D_{t,0+,\tau}^\alpha u_{x_1\bar x_1 x_2\bar x_2}$, *док су* ξ_1 *и* ν_i *дефинисане раније.*

Доказ. За $\bar f = f\in C(\bar\Omega)$, десна страна у (4.42) је облика

$$\psi^k = \left(D_{t,0+,\tau}^\alpha u - D_{t,0+}^\alpha u\right)^k + Au^k + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \mu^2 A_1A_2 D_{t,0+,\tau}^\alpha u^k$$

$$= \xi_1^k + \sum_{i=1}^{2}\nu_i^k + \tilde\mu^k.$$

Применом априорне оцене (4.43), тврђење теореме непосредно следи. □

Теорема 4.15. *Нека решење u почетно-граничног проблема (2.3)-(2.5) припада простору* $C^2([0,T],C(\bar{\Omega}))\cap C_+^\alpha([0,T],H^4(\Omega))$. *Тада решење v диференцијске схеме (4.40), (4.20), (4.21) конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u-v\|_{H^{2,\alpha}(Q_{h\tau})}=O(h^2+\min\{\tau^{2\alpha},\tau^{2-\alpha}\}).$$

Доказ. Тврђење следи из (3.28), (3.58) и следеће оцене за члан $\tilde{\mu}$

$$\left(\tau\sum_{k=1}^{M}\|\tilde{\mu}\|_h^2\right)^{1/2}\le C\mu^2\,\|u\|_{C_+^\alpha([0,T],H^4(\Omega))}=C\tau^{2\alpha}\,\|u\|_{C_+^\alpha([0,T],H^4(\Omega))}\,.$$

□

4.2.5 Факторизована схема за једначину са променљивим коефицијентима

Оцене стабилности и брзине конвергенције добијене у одељку 4.2.3 важе и када се посматра једначина с променљивим коефицијентима (2.6). Факторизована схема је дата једначином

$$\left((I+\theta\tau^\alpha A_1)(I+\theta\tau^\alpha A_2)\,D_{t,0+,\tau}^\alpha v\right)^k+\mathcal{L}_h v^{k-1}=\bar{f}^k,\quad x\in\omega_h,\tag{4.44}$$

и уобичајеним почетним и граничним условима (4.20), (4.21), где је диференцијски оператор $\mathcal{L}_h$ дефинисан формулом (3.66). Напоменимо да се модификована факторизована схема (4.40), (4.20), (4.21), не може пренети на једначину с променљивим коефицијентима (2.6). Следећи резултати се могу наћи у [12].

Теорема 4.16. *Нека је* $0<\alpha<1$, $a_{ij},a\in C(\bar{\Omega})$ *и* $\theta\ge\frac{\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}\max_{i,j}\|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}$. *Тада је, за довољно мало* τ, *диференцијска схема (4.44), (4.20), (4.21) апсолутно стабилна и њено решење задовољава следећу априорну оцену*

$$\|v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})}\le C\|\bar{f}\|_{L_2(Q_{h\tau})}.\tag{4.45}$$

Доказ. Множећи (4.44) скаларно са v^k, користећи (3.67) и

$$\|v\|_B^2=\|v\|_h^2+\theta\tau^\alpha\|v\|_{A_1+A_2}^2+\theta^2\tau^{2\alpha}\|v\|_{A_1A_2}^2=\|v\|_h^2+\theta\tau^\alpha\|v\|_{H^1(\omega_h)}^2+\theta^2\tau^{2\alpha}\|v_{\bar{x}_1\bar{x}_2}\|_{0h}^2,$$

на сличан начин као у доказу теореме 4.5 долазимо до

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h^2+\Big(\theta\frac{(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{c_1}{2}\Big)\tau^2\left|v_t^{k-1}\right|^2_{H^1(\omega_h)}$$

$$+\Big(\frac{1-2^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{c_2}{2}\tau^{\alpha}\Big)\tau^{2-\alpha}\left\|v_t^{k-1}\right\|_h^2+\frac{c_0}{2}\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)}+\frac{c_0}{2}\left|v^{k-1}\right|^2_{H^1(\omega_h)}$$

$$\leq\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar f^k\right\|_h^2+\varepsilon\left\|v^k\right\|_h^2,$$

одакле за

$$\theta\geq\theta_0=\frac{c_1\Gamma(2-\alpha)}{2(1-2^{-\alpha})}=\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-2^{-\alpha}}\max_{ij}\left\|a_{ij}\right\|_{C(\bar\Omega)}$$

и

$$\tau\leq\tau_0=\left(\frac{2(1-2^{-\alpha})}{c_2\Gamma(2-\alpha)}\right)^{1/\alpha}=\left(\frac{2(1-2^{-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\left\|a\right\|_{C(\bar\Omega)}}\right)^{1/\alpha},$$

добијамо

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}_{t,0+,\tau}\left\|v^k\right\|_h^2+\frac{c_0}{2}\left|v^k\right|^2_{H^1(\omega_h)}+\frac{c_0}{2}|v^{k-1}|^2_{H^1(\omega_h)}\leq\frac{1}{4\varepsilon}\left\|\bar f^k\right\|_h^2+\varepsilon\|v^k\|_h^2.$$

Одавде, слично као и у доказу теореме 3.23, долазимо до тврђења теореме. $\square$

У овом случају грешка схеме задовољава једначину

$$\big((I+\theta\tau^{\alpha}A_1)(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)D^{\alpha}_{t,0+,\tau}z\big)^k+\mathcal{L}_h z^{k-1}=\psi^k,\quad x\in\omega_h,\tag{4.46}$$

где је

$$\psi^k=(I+\theta\tau^{\alpha}A_1)(I+\theta\tau^{\alpha}A_2)D^{\alpha}_{t,0+,\tau}u^k+\mathcal{L}_h u^{k-1}-T_1T_2f^k$$

$$=\bar\xi^k+\bar\eta^k+\sum_{i,j=1}^{2}\left(\eta^k_{ij,x_i}+\zeta^k_{ij,x_i}\right)+\sum_{i=1}^{2}\left(\chi^k_{i,x_i}+\mu^m_{i,x_i}\right),$$

и

$$\bar\eta=a\check u-T_1T_2(au),$$

$$\zeta_{ij}=\frac{\tau}{2}\Big[\left(a_{ij}u_{\bar x_j\bar t}\right)\big|_{(x,t)}+\left(a_{ij}u_{x_j\bar t}\right)\big|_{(x-he_i,t)}\Big],$$

Теорема 4.17. *Под претпоставкама теореме 4.16, схема (4.46), (4.26),* *(4.27) је апсолутно стабилна и важи следећа априорна оцена*

$$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} \leq C\Big[\sum_{i,j=1}^{2}\big(\|\eta_{ij}\|_{L^2(Q_{ih\tau})} + \|\zeta_{ij}\|_{L^2(Q_{ih\tau})}\big)$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\big(\|\chi_i\|_{L^2(Q_{ih\tau})} + \|\mu_i\|_{L^2(Q_{ih\tau})}\big) + \|\bar{\xi}\|_{L^2(Q_{h\tau})} + \|\bar{\eta}\|_{L^2(Q_{h\tau})}\Big].$$

Теорема 4.18. *Нека важе претпоставке теореме 4.16, $a_{ij}, a \in H^2(\Omega)$ и нека решење u задатка* (2.6), *са почетно-граничним условима (2.4), (2.5) припада простору $C^2([0,T], C(\bar{\Omega})) \cap C_+^{\alpha}([0,T], H^3(\Omega)) \cap H^1((0,T), H^2(\Omega))$. Тада решење v диференцијске схеме (4.44), (4.20), (4.21) са $f = T_1T_2f$ конвергира ка u и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$\|u - v\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h\tau})} = O(h^2 + \tau^{\alpha}).$$

Доказ. Ако представимо $\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2$, где је

$$\bar{\eta}_1 = a\check{u} - T_1T_2(a\check{u}) \qquad \text{и} \qquad \bar{\eta}_2 = T_1T_2(a\check{u}) - T_1T_2(au) = -\tau T_1T_2(au_{\bar{t}}),$$

онда за $\bar{\eta}_1$ важи оцена облика (3.72), док се чланови $\bar{\eta}_2$, ζ_{ij}, χ_i и μ_i могу оценити директно

$$\|\bar{\eta}_2\|_{L^2(Q_{h\tau})} \leq C\tau\|a\|_{C(\bar{\Omega})}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq C\tau\|a\|_{C(\bar{\Omega})}\|u\|_{C^1([0,T],L^2(\Omega))}, \tag{4.47}$$

$$\|\zeta_{ij}\|_{L^2(Q_{ih\tau})} \leq C\tau\,\|a_{ij}\|_{C(\bar{\Omega})}\|u\|_{H^1((0,T),H^2(\Omega))}, \tag{4.48}$$

$$\|\chi_i\|_{L^2(Q_{ih\tau})} \leq C\tau^{\alpha}\,\|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T],H^2(\Omega))}, \tag{4.49}$$

$$\|\mu_i\|_{L^2(Q_{ih\tau})} \leq C\tau^{2\alpha}\,\|u\|_{C_+^{\alpha}([0,T],H^3(\Omega))}. \tag{4.50}$$

□

Резултат следи из (3.71)-(3.73) и (4.47)-(4.50).

4.2.6 Нумерички експеримент

Посматрајмо почетно гранични проблем (2.3)-(2.5) са

$$f(x,t) = f(x_1,x_2,t) = \sin(\pi x_1)t^2\left(\frac{t^{-\alpha}\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)}x_2(1-x_2) + \pi^2 x_2(1-x_2) + 2\right),$$

чије је тачно решење

$$u(x,t) = u(x_1, x_2, t) = \sin(\pi x_1) x_2 (1 - x_2)\, t^2.$$

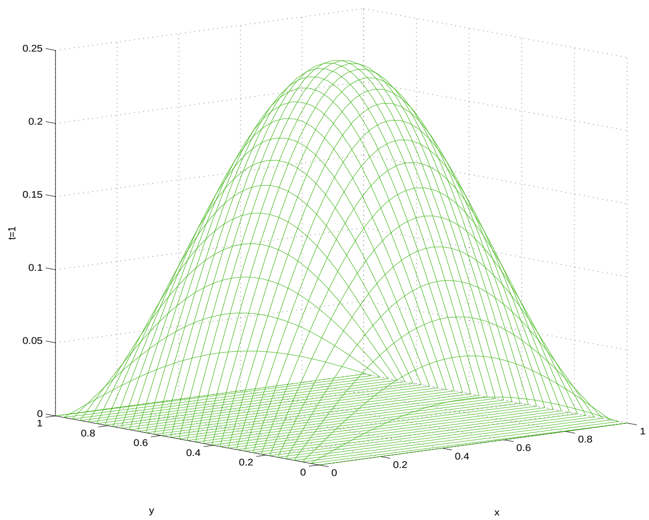
Проблем је решен применом факторизоване схеме (4.19)-(4.21). Норма у којој смо мерили величину грешке и одређивали брзину конвергенције дата је са (3.31).

Табела 3: Грешка и брзина конвергенције за фиксирано $\tau = 2^{-15}$.

α	h	$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h,\tau})}$	$\log_2 \frac{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h,\tau})}}{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h/2,\tau})}}$
0.9	2^{-2}	$6.620177 \cdot 10^{-3}$	2.03
	2^{-3}	$1.626035 \cdot 10^{-3}$	2.09
	2^{-4}	$3.810321 \cdot 10^{-4}$	2.44
	2^{-5}	$7.039282 \cdot 10^{-5}$	/

Табела 4: Грешка и брзина конвергенције за фиксирано $h = 2^{-9}$.

α	τ	$\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h,\tau})}$	$\log_2 \frac{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h,\tau})}}{\|z\|_{B^{1,\alpha/2}(Q_{h,\tau/2})}}$
0.7	2^{-4}	$8.996563 \cdot 10^{-2}$	0.79
	2^{-5}	$5.204351 \cdot 10^{-2}$	0.78
	2^{-6}	$3.040074 \cdot 10^{-2}$	0.74
	2^{-7}	$1.817394 \cdot 10^{-2}$	0.71
	2^{-8}	$1.108810 \cdot 10^{-2}$	/



Слика 3: Нумеричко решење на временском слоју $t_M = 1$, за $\alpha = 0.9$, $h = 2^{-5}$ и $\tau = 2^{-6}$

5 Закључак

Идеја за увођење појма извода разломљеног реда појавила се готово када и диференцијални рачун. Међутим, помак у истраживању фракционог рачуна десио се у другој половини двадесетог века. Испоставило се да изводи разломљеног реда, као оператори нелокалног карактера, могу имати значајну примену у моделовању процеса са „меморијским ефектом". Широк је спектар могућности за њихову употребу; од описа процеса у механици и динамици па до описа процеса у живим организмима и друштвеним заједницама.

У овом раду приказан је почетно-гранични проблем за дводимензиону једначину субдифузије. Уведени су специјални функционални простори собољевског типа у којима је изграђена теорија егзистенције и јединствености решења. Допринос овог рада је у конструкцији економичних диференцијских схема за решавање датог задатка. Имплицитна схема је због своје апсолутне стабилности боља у односу на експлицитну. Међутим, у вишедимензионим задацима, у општем случају, системи линеарних једначина који се добијају применом имплицитне схеме нису лако решиви. Зато се тада прибегава локално једнодимензионим или многокомпонентним схемама. У раду су предложене адитивна и факторизована схема за које је испитана стабилност и одређена оцена брзине конвергенције у одговарајућим нормама.

Нумерички експеримент показује да је брзина конвергенције адитивне схеме по временској промењљивој нешто већа од добијене теоријске, што подстиче на даља истраживања. Такође се претпоставља да брзина конвергенције зависи од глаткости генералисаног решења посматраног почетно-граничног проблема па је у интересу што више снизити услов на глаткост решења. И најзад, схеме предложеног типа могу се применити за апроксимацију других проблема за парцијалне једначине разломљеног реда као што су почетно-гранични проблеми за једначину супердифузије, проблеми с интерфејсом или трансмисиони проблеми.

Литература

[1] А. А. Алиханов. *Разностные методы краевых задач для волнового уравнения с дробной производной по времени.* Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 17(2): 13–20, 2008.

[2] A. A. Alikhanov. *A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations.* Differential Equations, 46(5): 660–666, 2010.

[3] A. A. Alikhanov. *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings.* Appl. Math. Comput., 219(8): 3938–3946, 2012.

[4] T. Atanacković, S. Pilipoviić, B. Stanković, D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics.* ISTE Ltd, London, 2014.

[5] G. K. Berikelashvili. *The convergence in W_2^2 of the difference solution of the dirichlet problem.* USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 30(2): 89–92, 1990.

[6] G. Bolin, P. Xueke, H. Fenghui. *Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2015.

[7] J.-P. Bouchaud, A. Georges. *Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications.* Phys. Rep., 195: 127–293, 1990.

[8] J. H. Bramble, S. R. Hilbert. *Estimation of linear functionals on sobolev spaces with application to fourier transforms and spline interpolation.* SIAM J. Numer. Anal., 7(1): 112–124, 1970.

[9] A. Carpinteri, F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* Springer, Wien, 1997.

[10] A. V. Chechkin, R. Gorenflo, I. M. Sokolov. *Fractional diffusion in inhomogeneous media.* J. Phys. A: Math. Gen, 38: L679–L684, 2005.

[11] M. Chen, W. Deng. *A second-order numerical method for two-dimensional two-sided spaces fractional convection diffusion equation.* Appl. Math. Model., 38: 3244–3259, 2014.

[12] A. Delić, S. G. Hodžić, B. S. Jovanović. *Factorized Difference Scheme for two-dimensional Subdiffusion Equation in Nonhomogeneous Media.* Publ. Inst. Math., 2015. To appear.

[13] A. Delić, B. S. Jovanović. *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation.* Appl. Math. Comput., 229: 467–479, 2014.

[14] T. Dupont, R. Scott. *Polynomial approximation of functions in sobolev spaces.* Math. Comp., 34(150): 441–463, 1980.

[15] V. J. Ervin, J. P. Roop. *Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation.* Numer. Methods Partial Differential Equations, 22(3): 558–576, 2005.

[16] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, P. Paradisi. *Time fractional diffusion: A discrete random walk approach.* Nonlinear Dynamics, 29(1): 129–143, 2002.

[17] S. G. Hodžić. *Factorized Difference Scheme for 2D Fractional in Time Diffusion Equation.* Aplicable Analysis and Discrete Mathematics, 9(2): 199–208, 2015.

[18] S. G. Hodžić, B. S. Jovanović. *Additive difference scheme for two-dimensional fractional in time diffusion equation.* Filomat, 2015. To appear.

[19] C. M. Ionescu, W. Kosiski, R. D. Keyser. *Viscoelasticity and fractal structure in a model of human lungs.* Arch. Mech., 62: 21–48, 2010.

[20] Б. С. Йованович. *Аддитивная разностная схема для нестационарного уравнения четвертого порядка в произвольной области.* Журнал вычислительной математики и математической физики, 12: 377–383, 1977.

[21] B. S. Jovanović. *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina.* Matematički institut, Beograd, 1989.

[22] B. S. Jovanović. *Parcijalne jednačine.* Matematički fakultet, Beograd, 1999.

[23] B. S. Jovanović, E. Süli. *Analysis of Finite Difference Schemes.* Springer, 2014.

[24] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, A. Delić. *Boundary value problems for fractional pde and their numerical approximation.* Lect. Notes Comput. Sci., 8236: 231–238, 2013.

[25] N. Kalton, S. Montgomery-Smith. *Interpolation of Banach Spaces.* In W. B. Johanson, J. Lindenstrauss (eds.), *Handbook of the Geometry of Banach Spaces,*, volume 2, pp. 1133–1172. Elsevier.

[26] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science and Technology, Boston, 2006.

[27] P. Kumar, O. P. Agrawal. *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations.* Signal Process., 86: 2602–2610, 2006.

[28] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* Academic Press, New York, 1968.

[29] M. M. Lafisheva, M. K. Shkhanukov-Lafishev. *Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation.* Comput. Math. Math. Phys., 48(10): 1875–1884, 2008.

[30] X. Li, C. Xu. *A space-time method for the time fractional diffusion equation.* SIAM J. Numer. Anal., 47(3): 2108–2131, 2009.

[31] Y. Lin, X. Li, C. Xu. *Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation.* Math. Comp., 80(275): 1369–1396, 2011.

[32] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Мир, Москва, 1971.

[33] E. R. Love, L. C. Young. *On fractional integration by parts.* Proc. Lond. Math. Soc., s2-44(1): 1–35, 1938.

[34] Y. Luchko. *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation.* J. Math. Anal. Appl., 351: 218–223, 2009.

[35] Y. Luchko. *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation.* Computers and Mathematics with Applications, 59: 1766–1772, 2010.

[36] Y. Luchko. *Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation.* J. Math. Anal. Appl., 374: 538–548, 2011.

[37] F. Mainardi. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation.* Appl. Math. Lett., 9(6): 23–28, 1996.

[38] F. Mainardi, A. Mura, G. Pagnini, R. Gorenflo. *Sub-diffusion equations of fractional order and their fundamental solutions.* In K. Taş, J. A. Tenreiro Machado, D. Baleanu (eds.), *Mathematical Methods in Engineering*, pp. 23–55. Springer.

[39] R. Metzeler, J. Klafter. *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach.* Phys. Rep., 339: 1–77, 2000.

[40] S. Momani, Z. Odibat. *Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order.* Phys. Lett. A, 365: 345–350, 2007.

[41] А. М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение.* Физматлит, 2003.

[42] K. B. Oldham, J. Spanier. *The Fractional Calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[43] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[44] J. P. Roop. *Computational aspects of FEM approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in* $\mathbb{R}^2$. J. Comput. Appl. Math., 193: 243–268, 2006.

[45] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 2001.

[46] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications.* Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987. (in Russian).

[47] W. R. Schneider, W. Wess. *Fractional diffusion and wave equations.* J. Math. Phys., 213(1): 205–213, 2006.

[48] E. M. Stein, G. L. Weiss. *Introduction to Harmonic Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Mathematical Series, Princeton Univ. Press, 1971.

[49] Z. Z. Sun, X. Wu. *A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system.* Appl. Numer. Math., 56(2): 193–209, 2006.

[50] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North-Holland Publishing Company, 1978.

[51] В. В. Учайкин. *Метод дробных производных.* Артишок, 2008.

[52] W. Yao, J. Sun, B. Wu, S. Shi. *Numerical simulation of a class of a fractional subdiffusion equation via the alternating direction implicit method.* Numer. Methods Partial Differential Equations, 000: 000–000, 2015.

[53] W. Yiang, Y. Lin. *Approximate solution of the fractional advection-dispersion equation.* Comput. Phys. Commun., 181: 557–561, 2010.

[54] P. Zhuang, F. Liu. *Finite difference approximation for two-dimensional time fractional diffusion equation.* J. Algorithms Comput. Technol., 1(1): 1–15, 2007.

Биографија

Образовање

Сандра Хоџић је рођена 27. августа 1987. године у Новом Пазару. Основну школу „Сретен Младеновић" завршила је у Десимировцу и „Прву крагујевачку гимназију" у Крагујевцу. На Математички факултет Универзитета у Београду се уписала 2006. године и дипломирала на смеру Нумеричка математика и оптимизација 2010. године. Мастер рад под називом „*Неки спектрални проблеми и њихово нумеричко решавање*" одбранила је 1. јула 2011. године под менторством професора др Бошка Јовановића, чиме је стекла звање Дипломирани математичар-мастер. На докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, уписала се 2011. године.

Радно искуство и искуство у настави

Од фебруара 2011. до децембра 2012. године радила је као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду. Од децембра 2012. ради као асистент на истом факултету, где је држала рачунске вежбе из курсева *Увод у нумеричку математику, Линеарно програмирање, Теорија апроксимација и Обрада сигнала.* Све време је ангажована и на Хемијском факултету Универзитета у Београду на курсу *Математика.*

Списак научних радова публикованих или прихваћених за штампу

[1] S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: Finite difference approximation of an elliptic problem with nonlocal boundary condition, Filomat 2014 (to appear).

[2] S. G. Hodžić, B. S. Jovanović: Additive Difference Scheme for Two-Dimensional Fractional in Time Diffusion Equation, Filomat 2015 (to appear).

[3] S. G. Hodžić: Factorized Difference Scheme for 2D Fractional in Time Diffusion Equation, AADM, 9(2):199–208, 2015.

[4] Aleksandra Delić, Sandra Hodžić, Boško S. Jovanović: Factorized Difference Scheme for two-dimensional Subdiffusion Equation in Nonhomogenous Media, Publ. Inst. Math, 2015 (to appear).

Списак научних радова на рецензији

[1] Aleksandra Delić, Sandra Hodžić, Boško S. Jovanović: Difference Scheme for an Interface Problem for Subdiffusion Equation, AADM, 2015.

Радови у зборницима

[1] S. G. Hodžić: Problem sopstvenih vrednosti sa nelokalnim Robin–Dirihleovim graničnim uslovima, Zbornik radova III simpozijum ,,Matematika i primene": 75–82, 2012.

Саопштења на конференцијама

[1] S. G. Hodžić, B. Jovanović: About a nonlocal BVP for Poissons equation, XIII srpski matematički kongres, Vrnjačka banja 2014, Abstracts, p.27.

Учешће на пројектима

[1] „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене", Министарство просвете, науке и технолошког развоја 174015, (2011-2016)

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана Сандра Хоџић

број уписа 2010/2011

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

Сандра Хоџић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Сандра Хоџић

Број уписа 2010/2011

Студијски програм Математика

Наслов рада Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије

Ментор проф. др Бошко Јовановић

Потписани Сандра Хоџић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

Сандра Хоџић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Диференцијске схеме за решавање једначине субдифузије

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 8. 2. 2016.

Сандра Хоџић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.