

Наставно-научно веће
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
Универзитет у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета која је одржана дана 14. новембра 2014. г. одређени смо у Комисију за преглед и оцену докторске дисертације Ивана Димитријевића. После прегледа рукописа кандидатове дисертације **Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације** подносимо следећи

ИЗВЕШТАЈ

1) БИОГРАФИЈА ИВАНА ДИМИТРИЈЕВИЋА

Иван Димитријевић рођен је у Београду 22. 06. 1983. године. Дипломирао је 2007. године са просечном оценом 9.59. У октобру 2007. године Иван Димитријевић је уписао докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Геометрија. На докторским студијама положио је све испите са просечном оценом 10 (десет).

Од октобра 2010. године ради на Математичком факултету у Београду као сарадник у настави, а од 2012. године је у звању асистента. Држао је вежбе из предмета Линеарна алгебра и Аналитичка геометрија, Геометрија 1, Геометрија 3, Геометрија 5, Математика 1 и Биоматематика. Од 2008. године је учесник пројекта „Геометрија, образовање и визуелизација са применама“ (бр. 174012). У периоду 2008-2010. био је стипендиста – докторант Министарства за науку и технолошки развој Републике Србије.

Иван Димитријевић је више пута излагао резултате своје дисертације на семинару *Геометрија, образовање и визуелизација са применама*. Учествовао је на 11 научних скупова, од чега на 9 скупова са научним саопштењем. Објавио је 10 научних радова: од чега су 4 (1 самосталан) објављени у журналима са SCI листе, остали радови објављени су углавном у рецензираним зборницима радова од стране реномираних издавача (као што су Springer, AIP) (1 самосталан) и 1 рад је у припреми за часопис.

2) ПРОБЛЕМ И САДРЖАЈ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Година 2015. је била 100-годишњица постојања опште теорије релативности, која је Ајнштајнова теорија гравитације. Ова теорија се сматра једном од најлепших по форми и најфундаменталнијих по садржају физичких теорија. И поред великог успеха у описивању гравитационих феномена, она има и своје недостатке, па се истражују

разне могуће њене модификације. Један од проблема је постојање космолошког сингуларитета, који се састоји у томе да космолошка решења у тренутку настанка васионе одговарају бесконачној густини материје. Тражење решења за овај проблем, и неке друге проблеме, довело је до увођења и разматрања нелокалне генерализације Ајнштајнове теорије гравитације. Нелокална генерализација Ајнштајнове теорије гравитације је један вид њене модификације у оквиру псеудо-Риманове геометрије укључујући у формулацију модификације изводе по просторно-временским координатама до бесконачног реда. Просторно-временски изводи су овде повезани у форми Даламберовог оператора. Ова дисертација је посвећена изучавању геометријске модификације Ајнштајнове теорије гравитације кроз њену генерализацију помоћу просторно-временске нелокалности.

Дисертација И. Димитријевића *Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације* садржи укупно 96 страна. Поред наслова и апстракта на српском и енглеском језику, података о ментору и члановима комисије за одбрану, захвалности и литературе од 65 референци, дисертација садржи следеће делове:

- Увод
- Псеудо-Риманова геометрија
- Ајнштајнова теорија гравитације
- Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације
- Космолошке пертурбације
- Закључак
- Додатак А: Увод у варијациони рачун
- Додатак Б: Модел са нелокалним чланом облика $R^p \mathcal{F}(\square) R^q$.

Увод. Увод садржи кратак осврт на општу теорију релативности, уз навођење неких њених добрих и лоших својстава. Наведен је проблем космолошког сингуларитета и проблем теоријског објашњења убрзаног ширења васионе, као и проблем да Ајнштајнова теорија гравитације није проверена на великим космичким растојањима. Ови проблеми су главна мотивација за разматрање генерализације Ајнштајнове теорије гравитације у овој дисертацији. Уведен је појам нелокалне модификације и поменуто је општа форма модела нелокалне генерализације, који се у дисертацији детаљно разматра.

Псеудо-Риманова геометрија. У овом поглављу дат је преглед основних појмови из псеудо-Риманове геометрије, који су потребни за боље разумевање математичких својстава опште теорије релативности и њене модификације.

Ајнштајнова теорија гравитације. Ово поглавље садржи кратак преглед опште теорије релативности, тј. Ајнштајнове теорије гравитације. Дате су формулације њених

двају принципа: принцип опште релативности и принцип еквиваленције. Наведене су Ајнштајнове једначине за гравитационо поље, које повезују метрику псеудо-Римановог простора са расподелом материје преко тензора енергије-импулса. Дато је и Ајнштајн-Хилбертово дејство. Побројане су класичне експерименталне потврде опште теорије релативности. Нарочито је истакнута примена Ајнштајнових једначина у космологији. Дат је израз за Фридман-Робертсон-Вокерову метрику која одговара хомогеној и изотропној васиони. Наведене су две Фридманове једначине за космички скалирајући фактор, који карактерише просторну еволуцију (ширење) васионе. Дати су основни потребни појмови из космологије. Указано је на космолошке проблеме опште теорије релативности, укључујући проблем тамне материје, тамне енергије и космолошког сингуларитета, и потребу њене модификације.

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације. На почетку је кратко представљена $f(R)$ модификација стандардне гравитације. Остатак овог поглавља односи се на увођење и разраду модела нелокалне модификације опште теорије релативности. Уведена је једна класа модела нелокалне модификације Ајнштајнове теорије гравитације без материје помоћу дејства датог општим изразом (3.9), где је нелокалност изражена помоћу аналитичке функције Даламберовог оператора. Дате су варијације кривинских тензора. Детаљно је представљено извођење одговарајућих једначина кретања за гравитационо поље, што представља уопштење Ајнштајнових једначина. Ове нелинеарне диференцијалне једначине, израз (3.62), садрже просторно-временске изводе до бесконачног реда и доста су сложене у односу на Ајнштајнове једначине. Показано је да дивергенција овако проширеног Ајнштајновог тензора једнака нули. За случај хомогеног и изотропног простора остају само две линеарно независне једначине кретања, за које се у космолошком случају узимају траг једначине и њена 00-компонента.

У наставку овог поглавља дата је детаљна анализа неколико конкретних случајева нелокалности задане дејством (3.9). Нађена су егзактна космолошка решења за скалирајући фактор $a(t)$, углавном несингуларна у почетном тренутку. Такође, дата је анализа случаја са константном скаларном кривином R и наведена сва релевантна космолошка решења.

Космолошке пертурбације. У овом поглављу уведене су и анализиране стандардном процедуром космолошке пертурбације за случај космолошког решења де Ситеровог типа. Уместо космичког времена, коришћено је конформно време. У једначинама кретања узети су у разматрање чланови линеарни по пертурбацијама, тј. случај малих пертурбација. Детаљно су разматране скаларне пертурбације и нађени Бардинови потенцијали. Анализом Бардинових потенцијала нађени су услови стабилности решења. На крају овог поглавља дат је кратак приказ разматрања слабих пертурбација простора Минковског и нађене диференцијалне једначине кретања гравитационих таласа, које су исте као у Ајнштајновој теорији гравитације.

Закључак. У овом делу дисертације наведени су основни научни резултати које дисертација садржи. Такође су указани неки перспективни правци даљег истраживања разматраних нелокалних модела гравитације, укључујући могућност имитације тамне материје и тамне енергије.

Додатак А. Овај додатак садржи увод у варијациони рачун, који се доста користи у овој дисертацији при извођењу једначина кретања за гравитационо поље.

Додатак Б. У овом додатку су изложени детаљи једног од модела нелокалне гравитације.

3) МЕТОДИ КОРИШЋЕНИ У ИСТРАЖИВАЊУ

У току научног истраживања проблематике ове докторске дисертације коришћени су разни методи псеудо-Риманове геометрије. Коришћење тензорског рачуна омогућава да разматрани изрази имају исти облик у свим референтним системима који су међусобно повезани општим координатним трансформацијама. Варијациони рачун је коришћен у извођењу једначина кретања за гравитационо поље, односно елементе метричког тензора, методом принципа минималног дејства. Ради коваријантности, просторно-временски изводи су уграђени у Даламберов оператор, који потом постаје аргумент неке аналитичке функције. Коришћена аналитичка форма просторно-временске нелокалности потиче из теорије струна, која садржи гравитацију кроз динамику струна као веома малих 1-димензионих објеката. Решавање сложених нелинеарних диференцијалних једначина кретања, које садрже изводе до бесконачног реда, рађено је углавном помоћу погодних анзаца.

4) НАУЧНИ ДОПРИНОС ДИСЕРТАЦИЈЕ

Главни научни допринос састоји се у конструкцији и разради једне класе модела нелокално генерализане Ајнштајнове теорије гравитације. Посебно треба истаћи:

- изведене су једначине кретања за гравитационо поље (метрички тензор),
- добијена су нова егзактна космолошка решења за скалирајући фактор, међу њима и несингуларна решења облика $e^{\gamma t^2}$,
- добијена су сва релевантна космолошка решења са константном скаларном кривином,
- нађени су нови анзаци за решавање неких конкретних диференцијалних једначина са изводима до бесконачног реда,
- добијени резултати су атрактивни и перспективни за даља истраживања геометријске генерализације Ајнштајнове теорије гравитације и њене примене на разматрање проблема савремене космологије.

5) РЕФЕРЕНЦЕ ГЕНЕРИСАНЕ У ТОКУ РАДА НА ДИСЕРТАЦИЈИ

а) Публиковани радови

- I. Dimitrijevic, Cosmological solutions in modified gravity with monomial non-locality, Applied Mathematics and Computation **285**:195 – 203, 2016. IF 2014: 1.551 **M21**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity*, Filomat **29** (3):619–628, 2015. IF 2013: 0.753 **M21**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *New cosmological solutions in nonlocal modified gravity*, Romanian Journal of Physics **58** (5-6), 550-559 (2013). IF 2013: 0.745 **M23**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *A new model of nonlocal modified gravity*, Publications de l' Institut Mathematique - Beograd, **94** (108), 187-196 (2013). doi:10.2298/PIM1308187D.). IF 2012: 0.195 **M23**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Constant curvature cosmological solutions in nonlocal gravity*, AIP Conference Proceedings **1634**, 18-23 (2014). **M31**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Stankovic, A. S. Koshelev and Z. Rakic, *On nonlocal modified gravity and its cosmological solutions*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **191**:35–51, 2016. **M31**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *On modified gravity*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **36**, 251-259 (2013). DOI: 10.1007/978-4-431-54270-4 . **M33**
- I. Dimitrijevic, *Some ansätze in nonlocal modified gravity*, Proceedings of the 7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, SFIN XXVI, Series A: Conferences A1, 131-140 (2013). ISBN 978-86-82441-38-0. **M33**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic and Z. Rakic, *Some power-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **111**, 241-250 (2014). DOI:10.1007/978-4-431-55285-7. **M33**
- I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, A. S. Koshelev and Z. Rakic, *Cosmology of modified gravity with a non-local $f(R)$* , 2015, arXiv:1509.04254.

б) Научна саопштења кандидата на конференцијамa

- I. Dimitrijevic, *On Cosmological aspects of $f(R)$ modified gravity*, Lie Theory and its Applications in Physics, Varna (Bulgaria), 20-26. 06. 2011.
- I. Dimitrijevic, *Some cosmological solutions with $f(R)$ modified gravity*, XVI National Conference of Astronomers of Serbia, Belgrade, 10-12. 10. 2011.
- I. Dimitrijevic, *Nonlocal modified gravity*, XVII Geometrical Seminar, Zlatibor, 3-8. 09. 2012.
- I. Dimitrijevic, *On nonlocal modified gravity with cosmological solutions*, 8th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, Belgrade, 24-31. 08. 2014.
- I. Dimitrijevic, *Cosmological perturbation in nonlocal gravity*, XVIII Geometrical Seminar, Vrnjačka Banja, 25-28. 05. 2014.
- I. Dimitrijevic, *On nonlocal modified gravity with cosmological solutions*, V simpozijum matematika i primene, Belgrade, 2014.
- I. Dimitrijevic, *Nonlocal modified gravity*, International Conference on p-ADIC MATHEMATICAL PHYSICS AND ITS APPLICATIONS, Belgrade, 7-12. 09. 2015.

- I. Dimitrijevic, *Nonsingular Big Bang in nonlocal modified gravity*, X SERBIAN-BULGARIAN ASTRONOMICAL CONFERENCE, Belgrade 30. 05 - 03. 06. 2016.
- I. Dimitrijevic, *Nonsingular Big Bang in nonlocal modified gravity*, XIX Geometrical Seminar, Zlatibor, 28. 8.- 4. 9. 2016.

6) ЗАКЉУЧАК

На основу свега наведеног, сматрамо да овај рукопис представља значајан научни допринос истраживању нелокалне геометријске генерализације Ајнштајнове теорије гравитације. Имамо задовољство да предложимо Наставно-научном већу Математичког факултета, Универзитета у Београду, да прихвати рукопис *Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације* као докторску дисертацију кандидата Ивана Димитријевића, и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 20. марта 2017. године

КОМИСИЈА ЗА ПРЕГЛЕД И ОЦЕНУ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Др Зоран Ракић, ментор, ред. професор, Математички факултет, Бгд

Др Бранко Драговић, научни саветник, Институт за физику, Бгд

Др Стана Никчевић, ред. професор, Фармацеутски факултет, Бгд

Др Мирослава Антић, ванр. професор, Математички факултет, Бгд

Др Маја Бурић, ред. професор, Физички факултет, Бгд